KONSTRUKTIVE BEGRÜNDUNG DER MODALLOGIK

PAUL LORENZEN
Universität Erlangen

I. *Ontische Modallogik*

Die moderne Logik hat die —auf Aristoteles zurückgehende— Modallogik nur sehr zögernd in ihre Untersuchungen einbezogen. Dies wird dadurch verständlich, dass die moderne Logik bis Russell einschliesslich nur von Mathematikern für die Mathematik entwikelt worden ist. In der Mathematik sind aber Formulierungen wie "Eine Quadratzahl ist unmöglich Primzahl" nur eine ungenaue Redeweise für: "Keine Quadratzahl ist Primzahl."

Die "deontischen" Modalitäten (geboten-erlaubt) werden erst seit ca. 1940 logisch untersucht. Die Logik der "ontischen" Modalitäten (notwending-möglich) hat seit ca. 1960 durch Arbeiten von Kanger, Hintikka und Kripke einen ähnlichen Abschluss erreicht wie die klassische Quantorenlogik.

Zur methodischen Rekonstruktion gehen wir von der Situation einer Redegruppe aus, in der noch keine Modalitäten benutzt werden. Der wichtigste Fall ist der, dass die Elementaraussagen schon mit Zeitindikatoren wie "jetzt", "vergangen" und "zukünftig" gebraucht werden. Während für Vergangenheitsaussagen (im Deutschen: "*N* war *p*") jetzt schon entschieden ist, ob *N* *p* war oder nicht, ist für Zukunftsaussagen (im Deutschen: "*N* wird *p* sein") jetzt noch nicht entschieden —wenn überhaupt Entscheidungen eingehen— ob *N* *p* sein wird oder nicht.

Während also die einfache Behauptung "*N* war *p*" jedenfalls sinnvoll ist —obwohl unser Wissen unzureichend zu einer

Begründung sein mag— ist die einfache Behauptung von Zukunftsaussagen "*N* wird *p* sein" nicht sinnvoll. Haben wir aber ein Wissen *S* über unsere gegenwärtige Situation, einschliesslich von —zumindest vermeintlich gewussten Verlaufsgesetzen (speziell: Naturgesetzen)— so wird es sinnvoll zu untersuchen, ob die fragliche Zukunftsaussage oder ihre Negation von *S* logisch impliziert wird.

Zur Abkürzung schreiben wir "$\Delta_s\ \vartheta$" für "$S \prec \vartheta$" mit "$\prec$" für die logische Implikation — ob dabei die klassische oder die konstruktive Logik zugrunde gelegt wird, ist für das Folgende irrelevant. Liest man "Δ_s" als notwending bzgl. *S*", so ändert dies nichts daran, dass wir nichts über die Zukunft wissen, sondern nur aus "Hypothesen" schliessen (und unsere Schlussfolgerungen als "notwendig" bezeichnen).

Die Rede von einer Notwendigkeit futurischer Aussagen gewinnt erst dadurch Sinn, dass —auf der Metastufe— Implikationen zwischen solchen relativen Notwendigkeitsaussagen bestehen, die *unabhängig* davon sind, auf welches (vermeintliche) Wissen *S* diese "Notwendigkeit" bezogen ist. Ein triviales Beispiel ist das folgende: Es seien μ und $\mu \rightarrow b$ bezüglich *S* "notwendig". Dann ist auch *b* bezüglich *S* "notwendig".

Ersichtlich kommt es hier nur auf die Form des Aussagen μ, *b* und $\mu \rightarrow b$ an. Benutzen wir Variable *a* und *b*, so lautet die "metalogische" Behauptung

$$\Delta_s a \wedge \Delta_s (a \rightarrow b) \rightarrow \Delta_s b$$

Eine Verteidigung im Dialog shieht so aus:

$\Delta_s a \wedge \Delta_s (a \rightarrow b)$?	$\Delta_s a \wedge \Delta_s (a \rightarrow b) \rightarrow \Delta_s b$
?	$\Delta_s b$
$\Delta_s a$	L ?
$\Delta_s (a \rightarrow b)$	R ?

Statt Primformeln erreichen wir hier Δ—Formeln, d.h. Formeln, die mit "Δ" beginnen. Wir erreichen die folgende Dialogstellung mit Δ—Formeln allein:

$$\begin{array}{l|l} \Delta_s\, a & \\ \Delta_s\, (a \rightarrow b) & \Delta_s\, b \end{array}$$

Diese Stellung ist *für jedes S* gewinnbar: Impliziert S nämlich a und $a \rightarrow b$, so auch $a \wedge a \rightarrow b$. Also impliziert S — wegen $a \wedge a \rightarrow b \prec b$ auch b. Das ist nur eine Anwendung des Gentzenschen Hauptsatzes.

Allgemein gilt (was schon Aristoteles in den Analytica priora I,8 benutzt), dass eine Stellung

$$\begin{array}{c|c} \Delta_s A_1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \Delta_s A_m & \Delta_s B \end{array}$$

genau dann *für alle S* zu gewinnen ist, wenn die (modalitätenfreie) Stellung

$$\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ A_m & B \end{array}$$

formal zu gewinnen ist.

Diese Entdeckung, dass von relativen Notwendigkeiten auf weitere geschlossen werden kann, ohne dass man auf ein bestimmtes Wissen S zurückgreifen muss, liefert die Grundlage einer ***Modallogik***: man unterdrücke in den Symbolen Δ_s stets die Angabe von S und operiere mit den Δ—Formeln als Primformeln in Dialogen wie sonst, füge aber als Verteidigung einer Stellung

$$\Sigma\,(\Delta A_1, \ldots \Delta A_m) \parallel \Delta B$$

(in der rechts eine Δ—Formeln steht, links ein System von Formeln, unter denen evtl. Δ—Formeln vorkommen) als Δ—*Regel* den Übergang zu der Stellung

$\Sigma(\Delta A_1 \ldots \Delta A_m$	$A\, B$
A_1	
.	
.	
.	
A_m	B

hinzu. Hier ist vor dem Δ—Schritt ein Querstrich eingefügt, weil nach dem Δ—Schritt nur noch die Δ—freien Formeln $A_1 \ldots A_m$ und B benutzt werden dürfen. Modalformen (also Formeln, die mit "A" zusammengesetzt sind) heissen "modallogisch wahr", wenn sie im Dialog mit Δ—Regel verteidigbar sind. Je nachdem, ob man als allgemeine Dialogregel die konstruktive oder klassische nimmt, erhält man eine konstruktive oder klassische Modallogik. Neben "Δ" definieren wir die "Möglichkeit" ∇ durch

$$\nabla A \leftrightharpoons \rightharpoondown \Delta \rightharpoondown A$$

und die "Kontingenz" $\overline{\underline{X}}$ durch

$$\overline{\underline{X}}\, A \leftrightharpoons \nabla A \wedge \rightharpoondown \Delta A$$

Konstruktiv ist zwischen $\Delta \rightharpoondown A$ und $\rightharpoondown \nabla A$ (A ist unmöglich) zu unterscheiden, weil $\rightharpoondown \nabla$ A per definitionem für $\rightharpoondown \rightharpoondown \Delta \rightharpoondown A$ steht.

Ein Beispiel einer konstruktiven modallogischen Implikation ist:

$$V_x \nabla a x \prec \nabla V_x a x$$

(Die Existenz eines x, für das a möglicherweise wahr ist, impliziert die mögliche Existenz eines x, für das a wahr ist.) Die Verteidigung der These im Dialog sieht folgendermassen aus:

1. $V_x \rightharpoondown \Delta \rightharpoondown a x$		$\rightharpoondown \Delta \rightharpoondown V_x a x$
2. $\Delta \rightharpoondown V_x a x$	?	? 1
3. $\rightharpoondown \Delta \rightharpoondown a y$		$\Delta \rightharpoondown a y$? 3

4.	$\neg V_x a x$		‖	$\neg a y$	
	$a y$	?	‖	$V_x a x$	?4
		?	‖	$a y$	

Es ist bemerkenswert, dass die Umkehrung (der Schluss von der möglichen Existenz auf Existenz der Möglichkeit) kein modallogischer Schluss ist, auch in der klassischen Modallogik nicht. Klassisch modallogisch (aber nicht konstruktiv) gilt z.B.

$$\nabla (a \vee b) \prec \nabla a \vee \nabla b$$

(Die Umkehrung gilt sogar konstruktiv.)

Klassisch gilt ferner $\Delta (a \vee \neg a)$, aber nicht $\Delta a \vee \Delta \neg a$, worauf schon Aristoteles in seinen Ausführungen über die Seeschlacht, die notwendigerweise morgen stattfindet oder nicht stattfindet, hingewiesen hat: weder findet sie morgen notwendigerweise statt, noch findet sie morgen notwendigerweise nicht statt.

Die formalen Dialoge mit Δ—Regeln lassen sich auch auf iterierte Modalformeln wie $\Delta \Delta a$, $\Delta(\nabla a \vee \nabla b), \ldots$ anwenden. Es ist aber umstritten, ob diese Erweiterung für die Sprache der Wissenschaften nützlich ist.

In der Anwendung auf Zukunftsaussagen ist die in der Modallogik übliche Zwischenschaltung der einfachen Wahrheit X zwischen Notwendigkeit Δ und Möglichkeit ∇ sinnlos, da Zukunftsaussagen einfachhin weder wahr noch falsch sind — sie *werden* erst wahr oder falsch.

In der Anwendung auf Gegenwarts— oder Vergangenheitsaussagen gewinnt dagegen die Implikation $\Delta A \prec X A$ (aus der $X A \prec \nabla A$ konstruktiv folgt) einen Sinn, wenn von dem "Wissen" S, auf das Δ (als Δ_s) zunächst bezogen ist, *vorausgesetzt* wird, dass es aus *wahren* Sätzen besteht. Ist S wahr, so folgt aus $S \prec A$ nämlich die Wahrheit von A. Für die Dialogführung bedeutet dies, dass der Opponent beliebige Hypothesen der Form $\Delta A \rightarrow A$ übernimmt. Statt dessen kann er sich auch verpflichten, jede seiner Δ—Formeln ΔA auf einen Angriff "?" durch A zu verteidigen.

II. *Deontische Modallogik*

Die Logik der deontischen Modalitäten (geboten-erlaubt) entspricht formal der Logik der ontischen Modalitäten, soweit diese sich auf Zukünftiges (hierfür sei der Terminus "mellontisch" vorgeschlagen beziehen. Denn das Gebot einer Handlung (oder eines durch Handeln zu bewirkender Zustandes) bezieht sich stets auf *zukünftiges* Tun und Lassen.

Zunächst besteht in der sprachlichen Form aber der folgende Unterschied: Während unser Wissen über die gegenwärtige Situation *und* die Verlaufsgesetze in Indikativssätzen formuliert wird, sind für das Befolgen von Geboten nicht nur indikativische Situations-beschreibungen, sondern auch Imperativsätze, insbesondere bedingte Imperativsätze (die sich an "alle" richten, und die daher als "Normen" an die Stelle allgemeiner Verlaufsgesetze treten) erforderlich.

Modalsätze, ob "mellontische" Notwendigkeiten oder "deontische" Gebotenheiten, sind dagegen grammatisch Indikativsätze. Erst wenn wir —im Gergensatz zur Grammatik unserer Umgangssprache— auch die Gebote als eine neue Art von Imperativsätzen einführen, entsteht eine genaue formale Entsprechung zwischen mellontischen und deontischen Modalitäten.

Wir betrachten dazu Normen, also bedingte Imperative der Form $\varphi \rightarrow\, !\, A$: "wenn φ, dann bewirke (den Zustand),) A!" Mit einem System $!\, S_1$ solcher Normen

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \rightarrow\, !\, A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_u \rightarrow\, !\, A_u \end{array}$$

und der Beschreibung S_0 der Situation, in der sich eine Person N "jetzt" befindet, ist zunächst zu untersuchen, welche der Bedingungen φ_i "jetzt" erfüllt sind; d.h. welche der φ_i

aus S_o logisch folgen. Es seien dies $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_r}$. Aufgrund von ! S_1 sind dann die unbedingten Imperative $A_{i_2}, \ldots,$! A_{i_r} an die Person N gerichtet. Bezüglich ! S_1 ist es daher *geboten*, jeden Zustand B zu bewirken, für den B logisch aus der Konjunktion des $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ folgt.

Mit ! S für das Paar ! S_1, S_o schreiben wir kurz Δ ! S ! B, wenn B in der angegebenen Weise aus geeigneten A_i logisch folgt. Als Aufgabe der deontischen Modallogik stellt sich dann die Untersuchung dessen, was "geboten" ist, relativ zu beliebigem ! S. Der Unterschied zur "mellontischen" Modallogik besteht nur darin, dass "Δ !" anstelle von "Δ" zu schreiben ist. Beidesmal handelt es sich um Behauptungen über die logischen Implikationen, die für alle S bzw. S zu verteidigen sind. Für die ontischen Modalitäten ist es zwar nicht üblich, bei unserem Wissen S, das sich ebenfalls in zwei Teile zerlegt (die Situationsbeschreibung S_o und das System S_1 von Verlaufsgesetzen) explizit auf die Form $\varphi \rightarrow A$ für die Verlaufsgesetze einzugehen — insbesondere weil in der Physik allgemeinere Verlaufsgesetze der Form

$$S_{t+\delta} = F_\delta (S_t)$$

für die "Berechnung" der Situationsbeschreibung $S_{t+\delta}$ zur Zeit $t + \delta$ aus der Situationsbeschreibung S_t zur Zeit t gebraucht werden — diese Verschiedenheit ist aber für die Modallogik irrelevant.

Entsprechend zur Definition weiterer onsticher Modalitäten ∇ und $\overline{\underline{X}}$ definieren wir in der Deontik

$$\nabla ! A \leftrightharpoons \neg \Delta ! \neg A \qquad (\text{"erlaubt"})$$

$$\overline{\underline{X}} ! A \leftrightharpoons \nabla ! A \wedge \neg \Delta ! A \qquad (\text{"freigestellt"})$$

Der logische Schluss von gewissen Imperativen auf weitere (oben hatten wir von ! $A_{i_1}, \ldots,$! A_{i_r} auf ! B geschlossen) lässt sich in der deontischen Modallogik als ein Schluss von Modalaussagen auf weitere formulieren, nämlich als

$$\Delta \,!\, A_{t_1} \wedge \ldots \wedge A \,!\, A_{t_r} \prec \Delta \,!\, A$$

(mit $\prec$ für die modallogische Implikation).

Dies führt dazu —wie es auch im Deutschen üblich ist— schon die Basisnormen aus $!\ S_1$ durch Modalaussagen der Form

$$\varphi \rightarrow \Delta \,!\, A$$

zu ersetzen.

Dadurch entsteht der Eindruck, als ob die Basisnormen "absolut" geboten sind. Aber sie sind nach unserer Konstruktion selbstverstänlich nur relativ zu sich selbst "geboten". Steht man vor der "praktischen" Frage, welche Zwecke (Zielzustände *B*) man sich setzen "solle", so ist die Gebotenheit eines Zieles *B* relativ zu einem System von Basisnormen nur ein Teil der Antwort. Die Basisnormen müssen darüber hinaus darauf befragt werden, ob sie "gerecht" sind. Das Problem, wie Normen zu "rechtfertigen" sind, d.h. wie für ihre Gerechtheit (vernünftig) argumentiert werden kann, gehört nicht mehr zur deontischen Modallogik, es gehört zur Theorie der "praktischen" Wissenschaften (also zur Ethik und zur Theorie der Kulturwissenschaften).

I. *Lógica modal óntica.*

La lógica moderna ha integrado sólo muy lentamente en sus investigaciones a la lógica modal, que se remonta a Aristóteles. Esto se hace comprensible por el hecho de que la lógica moderna, hasta Russell inclusive, fue desarrollada sólo por matemáticos y para las matemáticas. Pero en matemáticas hay, sin embargo, formulaciones como "Es imposible que un número cuadrado sea un número primo", que es sólo una manera imprecisa de decir: "Ningún número cuadrado es un número primo."

Las modalidades "deónticas" (prohibido-permitido) sólo se investigaron a partir de 1940. La lógica de las modalidades "ónticas" (necesario-posible) ha alcanzado, aproximadamente desde 1960, por los trabajos de Kanger, Hintikka y Kripke, un resultado parecido al de la lógica clásica cuantificacional.

Para la reconstrucción metódica partimos de la situación de un universo de discurso, en el que no se usan aún las modalidades. El caso más importante es que las expresiones elementales se usan ya con "*indicadores*" de tiempo como "ahora", "pasado" y "futuro". En tanto que con respecto a enunciados del pasado (en español: "*N* era *p*") se ha decidido ya si "*N* fue *p*" o no; con respecto a los enunciados de futuro en general no se ha decidido todavía ahora si "*N* será *p*" o no.

En tanto que la afirmación sencilla "*N* fue *p* tiene siempre sentido —no obstante que nuestro conocimiento sea insuficiente para su fundamentación— no tiene sentido la afirmación sencilla de los enunciados de futuro. Pero si tenemos un conocimiento *S* sobre nuestra situación presente, e inclusive de supuestas leyes de desarrollo (especialmente leyes naturales) por lo menos, entonces llega a tener sentido investigar si el enunciado problemático de futuro o su negación están lógicamente implicados por *S*.

Para abreviar escribimos "$\Delta_s \vartheta$" para "$S \prec \vartheta$" y "$\prec$" para la implicación lógica —con respecto a lo que sigue a continuación, no tiene importancia alguna el que uno se funde en la lógica clásica o en la constructiva. Si se lee "Δ_s" como "necesario con respecto a *S*", esto no altera nada acerca del hecho de que no sabemos nada acerca del futuro, sino que sólo concluimos por hipótesis (y calificamos nuestras conclusiones como "necesarias").

El examen de la necesidad de los enunciados de futuro adquiere de ese modo sentido en tanto que existan —en el nivel metalógico— implicaciones entre tales enunciados de necesidad relativa, que son *independientes* de cuál sea el (supuesto) conocimiento S, al que se refiere esa necesidad. Un ejemplo trivial es el siguiente: sean μ y $\mu \rightarrow b$ respecto de S "necesarios". Entonces es también b respecto de S "necesario".

Es evidente que aquí importa sólo la forma de los enunciados μ, b y $u \rightarrow b$. Si utilizamos variables a y b la afirmación "metalógica" dice así:

$$\Delta_s\, a \wedge \Delta_s\, (a \rightarrow b) \rightarrow \Delta_s\, b$$

Una defensa en el diálogo tiene el siguiente aspecto:

$\Delta_s\, a \wedge \Delta_s\, (a \rightarrow b)$?	$\Delta_s\, a \wedge \Delta_s\, (a \rightarrow b) \rightarrow \Delta_s\, b$
?	$\Delta_s\, b$
$\Delta_s\, a$	L ?
$\Delta_s\, (a \rightarrow b)$	R ?

En lugar de fórmulas primitivas logramos aquí fórmulas Δ, esto es, fórmulas que con "Δ" comienzan. Logramos la siguiente posición en el diálogo sólo con fórmulas Δ:

$\Delta_s\, a$	
$\Delta_s\, (a \rightarrow b)$	$\Delta_s\, b$

Esta posición se puede lograr lon respecto a *cualquier* S, esto es, si S implica a y $a \rightarrow b$, también $a \wedge a \rightarrow b$. Luego S implica — por $a \wedge a \rightarrow b \prec b$ también b. Esto es sólo una aplicación del "Teorema de Gentzen".

En general vale (lo que ya Aristóteles usó en su *Analytica priora* 1,8) que una posición:

$\Delta_s\, A_1$	
.	
.	
.	
$\Delta_s\, A_m$	$\Delta_s\, B$

se tiene que lograr exactamente *para toda* S, cuando la posición (de modalidades libres)

A_1	
.	
.	
.	
A_m	B

ha de lograrse *formalmente.*

Este descubrimiento de que de necesidades relativas se pueden concluir otras necesidades, sin que se tenga que recurrir a un conocimiento determinado S, nos proporciona el fundamento de una *lógica modal.* Comprímase en los símbolos Δ_s siempre el dato sobre S y opérese con las fórmulas Δ —como fórmulas primitivas en los diálogos como hasta ahora—, pero agreguése como defensa de una posición:

$$\Sigma\,(\Delta A_1 \ldots \Delta A_m \qquad || \qquad \Delta B$$

(en donde a la derecha está una fórmula Δ, y a la izquierda un sistema de fórmulas, entre las cuales se encuentran eventualmente fórmulas Δ), como regla Δ a la transición para la posición.

$\Sigma\,(\Delta A_1 \ldots \Delta A_m$	$A\,B$
A_1	
$\vdots$	
A_m	B

Aquí se inserta antes del paso Δ una línea transversal, porque después del paso Δ sólo se permite usar las fórmulas libres Δ, $A_1 \ldots A_m$ y B. Las fórmulas modales (esto es, las fórmulas compuestas con "A") se llaman "modal lógicamente verdaderas", si en el diálogo se pueden defender con reglas Δ. Según se tomen como reglas dialogales universales las constructivas o las clásicas, se sustenta ya sea una lógica modal constructiva o clásica. Junto a "Δ" definimos la "posibilidad" por

$$\nabla A \leftrightharpoons \rightharpoondown \Delta \rightharpoondown A$$

y la "contingencia" $\underline{\overline{X}}$ por

$$\underline{\overline{X}}\,A \leftrightharpoons \nabla A \wedge \rightharpoondown \Delta A$$

Se debe distinguir constructivamente entre $\Delta \rightharpoondown A$ y $\rightharpoondown \Delta A$ (A es imposible), porque $\rightharpoondown \nabla A$ simboliza *per definitionem* a:

$$\rightharpoondown \rightharpoondown \Delta \rightharpoondown A$$

Un ejemplo de una implicación constructiva en la lógica modal es:

$$V_x \nabla a x \prec \nabla V_x a x$$

(La existencia de una x, por la cual a es posiblemente verdadera, implica la existencia posible de una x, por la cual a es verdadera.)

La defensa de la tesis en el diálogo aparece de la siguiente manera:

1. $V_x \rightarrow A \rightarrow a\,x$	$\rightarrow \Delta \rightarrow V_x\, a\,x$
2. $\Delta \rightarrow V_x\, a\,x$?	? 1
3. $\rightarrow \Delta \rightarrow a\,y$	$\Delta \rightarrow a\,y$? 3
4. $\rightarrow V_x\, a\,x$	$\rightarrow a\,y$
$a\,y$?	$V_x\, a\,x$? 4
?	$a\,y$

Hay que hacer notar que el proceso inverso (el silogismo que parte de la existencia posible a la existencia de la posibiildad) no es un silogismo lógico modal; tampoco lo es en la lógica modal clásica. Vale en la lógica modal clásica (pero no constructivamente)

$$\nabla\,(a \vee b) \prec \nabla a \vee \nabla b$$

(la inversión vale también constructivamente).

Además en la lógica clásica vale $\Delta\,(a \vee \rightarrow a)$, pero no $\Delta\, a \vee \Delta \rightarrow a$. Hecho sobre el que ya Aristóteles llamó la atención en sus comentarios acerca de la batalla naval que necesariamente tendrá lugar mañana o no tendrá lugar; ni tiene lugar mañana necesariamente, ni no tiene lugar mañana necesariamente.

Los diálogos formales con reglas Δ se pueden aplicar también en fórmulas modales repetidas como $\Delta\,\Delta\, a$, $\Delta(\nabla a \vee \nabla b), \ldots$ sin embargo se discute si esta aplicación es útil para el lenguaje de las ciencias.

En la aplicación a enunciados de futuro, la intercalación usual en la lógica modal de la simple verdad X entre la necesidad Δ y la posibilidad ∇ no tiene sentido, pues los enunciados de futuro simplemente no son ni verdaderos ni falsos —sólo llegan a ser verdaderos o falsos.

En cambio, en la aplicación a los enunciados presentes o pasados, la implicación $\Delta A \prec X A$ (de la que se deduce constructivamente $X A \prec \Delta A$) adquiere sentido, si se presupone que del "conocimiento" S, que se refiere primeramente a Δ (como Δ_s), que consta de enunciados verdaderos. Si S es verdadero, entonces se deduce de $S \prec A$, a saber, la verdad de A. En la conducción del diálogo, esto significa que el oponente adopta cualquiera de las hipótesis de la forma $\Delta A \rightarrow A$. En vez de esto se puede obligar también a defender mediante A cualquiera de sus Δ fórmulas ΔA en contra de un ataque "?".

II. *Lógica modal deóntica*

La lógica de las modalidades deónticas (prohibido-permitido) corresponde formalmente a la lógica de las modalidades ónticas, en tanto ésta se refiere a lo futuro (propóganse aquí el término "melóntico"). Puesto que la prohibición de una acción (o de un estado que es fruto de una acción) se refiere siempre a un hacer y dejar hacer *futuro.*

En primer lugar, sin embargo, hay en la forma hablada la siguiente diferencia. Mientras que nuestro conocimiento sobre la situación presente y sobre las leyes de desarrollo se formulan en oraciones indicativas, con respecto a la observancia de las órdenes no sólo se requieren descripciones de situación en forma indicativa, sino también oraciones imperativas, especialmente oraciones imperativas condicionales (que se dirigen a "todos" y, por ello, en cuanto normas, toman el lugar de las leyes generales de desarrollo).

Las oraciones modales, sean necesidades "melóticas" o prohibiciones "deónticas", son en cambio, gramaticalmente, oraciones indicativas. Sólo cuando introducimos —en contraposición a la gramática de nuestro lenguaje coloquial— también las órdenes como una nueva especie de oraciones imperativas, surge una correspondencia formal exacta entre las modalidades "melónticas" y las "deónticas".

Para ello consideramos normas, es decir, los imperativos condicionales de la forma $\varphi \rightarrow \, !A$: "si φ entonces cáusese (el estado) A !". Con un sistema $!S_1$ de tales normas

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \rightarrow \, !A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_u \rightarrow \, !A_u \end{array}$$

y la descripción S_0 de la situación en la que una persona N se encuentra "ahora", se tiene que investigar primero cuáles de las condiciones φ_i se cumplen "ahora", esto es cuál φ_i se sigue lógicamente de S_0. Sean éstas $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_r}$. En virtud de $!S$ se dirigen entonces los imperativos incondicionales $A_{i_1}, \ldots, !A_{i_r}$ a la persona N. Por lo tanto, se ordena con respecto a $!S_1$ causar cualquier estado B, para el cual B se siga lógicamente de la conjunción de $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$.

Con $!S$ para el par $!S_1, S_0$ escribimos abreviando $\Delta \, !S \, !S$ si B, según la manera dada, se sigue lógicamente de las A_i adecuadas. Entonces la investigación de la lógica modal deóntica se presenta como aquello que es "ordenado" relativamente para cualquier $! S$.

La diferencia en relación a la lógica modal "melóntica" consiste sólo en que se tiene que escribir "Δ !" en lugar de "Δ". En ambos casos se trata de afirmaciones sobre las implicaciones con respecto a las cuales tiene que defenderse toda S o sea $! S$. No es ciertamente usual para las modalidades ónticas el referirse explícitamente a la forma $\varphi \rightarrow A$ en cuanto a las leyes de desarrollo, dado nuestro conocimiento S, el cual se descompone igualmente en dos partes (la descripción de la situación S y el sistema S de leyes de desarrollo), especialmente porque en la física se necesitan actualmente leyes generales de desarrollo de la forma:

$$S_{t+\delta} = F_{\delta}(S_t)$$

para el "cálculo" de la descripción de la situación $S_{t+\delta}$ en el tiempo $t + \delta$ de la descripción de la situación S_t en el tiempo t — pero esta diferencia no es pertinente para la lógica modal.

Análogamente a la definición de las otras modalidades ónticas ∇ y X definimos en la lógica deóntica:

$$\nabla ! A \leftrightharpoons \rightarrow \Delta ! \rightarrow A \quad \text{("permitido")}$$

$$\underline{X} ! A \leftrightharpoons \nabla ! A \wedge \rightarrow \Delta ! A \quad \text{("facultativo")}$$

La conclusión lógica de ciertos imperativos a otros (arriba concluimos de $! A_{i_1}, \ldots, ! A_{i_r}, B$), se puede formular en la lógica modal deóntica como una conclusión de enunciados modales a otros, esto es:

$$\Delta ! \Delta_{i_1} \wedge \ldots \wedge A ! A_{i_r} \prec \Delta ! A$$

(el símbolo $\prec$ para la implicación lógica modal).

Esto nos lleva a sustituir —como es también ya usual en alemán— las normas básicas (primitivas) de S por los enunciados modales de la forma:

$$\varphi \rightarrow \Delta ! A$$

De ese modo se origina la impresión de que las normas básicas estuviesen "absolutamente" ordenadas. Pero es evidente que según nuestra construcción, están relativamente "ordenadas" con respecto de sí mismas. Si nos planteamos la pregunta "práctica" de cuáles objetivos (situación final B) nos "deberíamos" poner, entonces, la ordenación de un fin B, relativo a un sistema de normas básicas, es sólo una parte de la respuesta. Deben ponerse en duda las normas básicas más allá de esto, a saber, si son "justas". El problema de cómo sean "justas" las normas, esto es, de cómo se puede argumentar racionalmente el saber de su ser justas, ya no pertenece a la lógica modal deóntica, pertenece a la teoría de las ciencias "prácticas" (por lo tanto, a la ética y a la teoría de las ciencias de la cultura).