CRÍTICA. Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 56, No. 166 (abril 2024): 81–104

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2024.1508

CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN *DAS KONTINUUM*: UNA DISCUSIÓN EN TORNO A LAS INTERPRETACIONES DE FEFERMAN Y AVRON

VÍCTOR GONZÁLEZ ROJO
UNED
España
gonzalez677@alumno.uned.es
https://orcid.org/0000-0001-6694-4686

RESUMEN: En este artículo analizamos conceptos fundamentales que sirven para entender mejor *Das Kontinuum*. Asimismo, defendemos la interpretación de Feferman —sobre todo, en lo referente al tratamiento de los conjuntos aritméticos, y al alcance del sistema que Weyl introdujo en el libro— como la más apropiada para entender la idea original, frente a la interpretación que Arnon Avron propuso recientemente.

PALABRAS CLAVE: Weyl, predicativismo, procedimiento restringido, conjuntos aritméticos, conjuntos de primer nivel

SUMMARY: In this paper we analyse fundamental concepts that serve to better understand *Das Kontinuum*. Likewise, we defend Feferman's interpretation —especially regarding the treatment of arithmetical sets and the scope of the system introduced in Weyl's book— as the most appropriate to understand the original idea, against the interpretation recently proposed by Arnon Avron.

KEY WORDS: Weyl, predicativism, narrower procedure, arithmetical sets, first level sets

1. *Introducción*

En 1918 Weyl escribe *Das Kontinuum*, libro en el que expone sus ideas sobre dos puntos fundamentales: 1) que el análisis clásico (de Dedekind, Cantor y Weierstrass) contiene un círculo vicioso en su núcleo; 2) cómo desarrollar la matemática sin caer en este error. Este libro ha recibido la atención de lógicos y filósofos de la matemática, pues en él se introduce el predicativismo dado los números naturales.[1] Esta posición se considera como otra opción dentro de las corrientes fundacionales de la matemática. Sin embargo, la poca formalización (para los estándares modernos) del sistema presentado

[1] Quizá se debiera hablar de predicativismo dada la *categoría* número natural, pues lo intuitivo, básico, para Weyl, es el "número natural". El conjunto de los naturales pertenece ya a una categoría *ideal* de objetos (como todo conjunto).

en el libro, además de su enfoque puramente filosófico, hacen de su comprensión una tarea no baladí. El objetivo de este artículo es intentar analizar (y formular) el sentido original del texto, además de proponer otras interpretaciones de conceptos fundamentales que difieren de la reciente propuesta de Avron (2020).

Desde, al menos, el último tercio del siglo XX se ha intentado "interpretar" *Das Kontinuum*. Solomon Ferferman publicó su fundamental artículo "Weyl Vindicated: *Das Kontinuum* Seventy Years Later" (1998) donde, por un lado, se analiza y explica de forma condensada el libro y, por otro, se presentan sistemas formales que "representarían" las ideas de Weyl, las cuales consideran una "interpretación aritmética". Por otra parte, en la primera y segunda década de este siglo muchos autores se han seguido interesando por el predicativismo de Weyl, *v.gr.*, Crosilla, Adams, Luo, Avron, etc. El presente texto pretende apoyar la interpretación de Feferman en el artículo mencionado, a saber: que en *Das Kontinuum* Weyl sólo acepta como correctamente definidos los conjuntos aritméticos —que Weyl denomina de "primer nivel"—, y que el sistema de Weyl, aunque pueda exceder ACA_0,[2] es posible interpretarlo dentro de este sistema siguiendo a Feferman 1998 (pp. 268 y ss.). Contraponemos así esta interpretación a la interpretación dada en Avron 2020.

2. *Conceptos esenciales (y problemáticos) en* Das Kontinuum

Dada la dificultad intrínseca del libro queremos primeramente aclarar conceptos clave que resultan fundamentales para entender correctamente el texto de Weyl. Esto es, además, necesario, si se quiere introducir un sistema formal que recoja fielmente sus ideas.

2.1. Círculo vicioso del análisis

Lo que Russell denominó el "principio del círculo vicioso" [*vicious circle principle*], y que lo forzó a desarrollar su lógica ramificada de tipos[3] se resume del siguiente modo en *Das Kontiuum*: "Ningu-

[2] Es un sistema de aritmética de segundo orden denominado "Arithmetical Comprehension Axiom" (ACA). Se puede axiomatizar añadiendo al sistema de primer orden de Peano que axiomatiza la aritmética, el axioma de comprensión: $\exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ (donde $\varphi(x)$ no contiene variables de conjuntos ligadas, aunque puedan estar libres); y el principio de inducción: $\forall X(0 \in X \land \forall x(x \in X \to suc(x) \in X) \to \forall x(x \in X))$ (el principio no se aplica a fórmulas que contengan variables de conjuntos ligadas). Véase Feferman 1998 (p. 271).

[3] Weyl es buen conocedor de esta lógica que Russell desarrolló, y en *Das Kontinuum* tiene un papel relevante. Sucintamente, la idea es: considerar las variables

na totalidad puede contener miembros definidos en términos de sí misma"[4] (Weyl 1918, p. 36).[5]

En este sentido, Weyl afirma que la definición clásica de supremo de un conjunto de reales contiene un círculo vicioso. La definición de supremo dada en Weyl es: "Sea *v.gr.*, un conjunto M acotado de números reales de primer nivel. Para construir su supremo se forma un conjunto γ de racionales, al cual pertenece un racional r si y sólo si *existe* un real en M mayor que r" (1918, p. 23; las cursivas son del original). Weyl afirma después que el conjunto γ es un real (pues cumple tres propiedades que definen a los reales),[6] pero es un real de "segundo nivel", ya que en su definición, "existe", cuantifica a un real de primer nivel.

El hecho de no considerar niveles da lugar a la definición clásica de supremo, y al círculo vicioso mencionado. La definición es impredicativa, pues se pretende definir el supremo en referencia a una totalidad a la que el supremo *ya* pertenece, a saber, la de los números reales. Unos años más tarde, Weyl analizará también el problema en una serie de artículos escritos en 1919, 1921 y 1925: si bien, su crítica la enfocará desde un punto de vista algo distinto a como aparece en el libro. El tratamiento del problema del círculo vicioso en aquellos textos de Weyl es básicamente el mismo. Aunque en este artículo nos centramos en *Das Kontinuum*, expondremos de forma resumida los puntos fundamentales de cómo Weyl presenta el problema del círculo vicioso en los artículos mencionados.

Weyl pretende *demostrar* [*beweisen*] que conceptos como "propiedad de números naturales" y "propiedad de propiedades de números naturales" no son conceptos "extensionalmente definidos" [*umfangsdefinit*]; es decir, dados como una totalidad determinada y completa.

clasificadas en tipos, y las funciones proposicionales (predicados, cuyo valor de verdad depende del valor dado a la variable, *v.gr.*, p(x) = "x es humano") en órdenes (o niveles) dependiendo de la clase de variables que contenga. El orden de una función proposicional se define como el menor natural mayor que el orden de todas sus variables cuantificadas. A su vez, las variables de tipo n, sólo pueden recorrer entidades de orden n. Los objetos de una teoría son considerados de tipo y orden 0.

[4] Cuando no se menciona la versión española en la bibliografía, las traducciones son del autor.

[5] Weyl cita a Russell en inglés.

[6] Las propiedades (que además caracterizan al número real) son: a) si r es un elemento de α (conjunto de racionales), también lo es todo racional r' tal que $r' - r > 0$; b) para cada racional r de α existe un racional r^* de α tal que $r* - r > 0$; c) α no es vacío, pero no todo racional es elemento de α (1918, p. 22).

Primero[7] afirma que el concepto de número natural es extensionalmente definido, y que esto es algo que se nos da intuitivamente. Sin embargo, existen otros conceptos como "objeto" o "propiedad" que no lo son. Para ver que es así define un dominio de propiedades de números al que denomina: k-propiedades. El concepto de k-propiedad es, por definición, extensionalmente definido. Después, supone una propiedad A de propiedades de números naturales. Entonces, según Weyl, siempre se puede definir una nueva propiedad P_A que cae fuera del dominio de las k-propiedades del siguiente modo: x posee P_A si y sólo si existe una k-propiedad de tipo A que posee x. Weyl afirma que el significado de esta P_A es totalmente distinto del de las k-propiedades. Después aclara que, no obstante, esto no significa que no exista en el dominio de las k-propiedades una propiedad que tenga la misma extensión [*umfangsgleich*][8] que aquélla.

Se llega entonces a la conclusión de que el concepto de número real no es un concepto extensionalmente definido, y que, por consiguiente, el concepto de supremo de un conjunto de reales *arbitrario* no tiene sentido.

Su explicación parte de que, si un real es una cortadura de Dedekind, i.e., un conjunto de racionales que se corresponde con una determinada propiedad de los racionales, entonces un conjunto de números reales se corresponde con una propiedad A de propiedades de números racionales. El supremo de este conjunto de reales es, a su vez, el conjunto de aquellos racionales x que tienen una determinada propiedad P_A, a saber: la propiedad que afirma que *existe* una propiedad de tipo A, la cual es poseída por x.

Es por ello que, después de dar esta explicación, Weyl escribe que esto es evidentemente un sinsentido [*evident sinnlos*], pues la existencia de una propiedad como P_A depende de que *exista* (de modo general y sin limitación) una propiedad de cierto tipo, tal que... etc. Por tanto, concluye, el concepto de "*propiedad de números racionales*" no es un concepto definido extensionalmente.

La argumentación de Weyl es, entonces, que dado que una propiedad se define a partir del dominio de las k-propiedades, el cual es un dominio extensionalmente definido, no puede ser que la nueva

[7] Como decimos, el argumento ofrecido se hace en cierto modo "estándar". Esto es, Weyl utiliza este argumento en sus artículos de 1919, 1921 y 1925 variándolo levemente o ampliándolo según el caso.

[8] "Denomino extensionalmente equivalentes a dos propiedades (de los números naturales), si todo número que posee una, también posee la otra, y viceversa; a cada propiedad le corresponde un conjunto, de tal manera que propiedades extensionalmente equivalentes se corresponden con el mismo conjunto" (1919, p. 86).

propiedad pertenezca a este dominio. Al estar definida a partir de la *totalidad* de las *k*-propiedades, *a fortiori* se concluye que no puede ser una de ellas. Por tanto, la propiedad de supremo, tal y como la trata el análisis clásico adolece de un círculo vicioso, ya que no se la trata como de "otro nivel".

2.2. Principios lógico-matemáticos

Al comienzo de su libro (1918, pp. 4–8), Weyl define seis principios con ayuda de los cuales (inicialmente) pretende desarrollar su sistema.

Estos principios son:

1) *Principio de negación.* Dado un juicio (o relación) R, podemos negarlo.

2) *Principio de "coincidencia" o "identificación" de variables.*[9] Dado un juicio R(x, y): "x es tío de y"; podemos hacer R(x x): "x es tío de sí mismo".

3) *Principio de conjunción.* Es posible unir en un juicio dos o más juicios.

4) *Principio de disyunción.* Es posible formar, a partir de dos o más juicios, un juicio disyuntivo.

5) *Principio de compleción.*[10] A partir de un juicio (o relación) y un objeto *a* de una categoría dada podemos "completar" el juicio con *a* del siguiente modo. Sea R (x, y, z), entonces podemos hacer R(x y *a*), de modo que el juicio pasa de ser de *tres* variables a ser un juicio de *dos* variables. Weyl afirma que un juicio en sentido propio, es un juicio sin variables, y que, por tanto, afirma un "estado de cosas" [*Sachverhalt*][11] que es verdadero o falso.

[9] Weyl escribe: "Leerstellen miteinander *zur Deckung bringen* [. . .]" (sic). Véase 1918 (p. 4).

[10] Traducimos aquí "Ausfüllung" por "compleción", dado que Weyl introduce un "Substitutionsprinzip".

[11] El concepto de "Sachverhalt" es un concepto técnico introducido por Husserl. En *Das Kontinuum* es clara la influencia de la fenomenología husserliana. Véase Weyl 1918 (Introducción y capítulo 6).

6) *Principio existencial.* Dado un juicio R(x y z), podemos formar el juicio R(x y *)[12] = S(x, y), el cual significa: "*Existe* un objeto z (perteneciente a una categoría de objetos determinada) tal que R(x y z)". Este principio, además, reduce el número de variables libres.

A partir de la combinación y repetición de estos seis principios básicos se obtienen las propiedades derivadas (si el juicio tiene sólo una variable libre), o las relaciones derivadas (si el juicio tiene dos o más variables libres).

Más adelante (en § 7) introducirá los principios de sustitución y de iteración, fundamentales para su sistema.

7) *Principio de sustitución.* Sean dos relaciones R(u v | x y z)[13] y S(x w U). La variable libre U (en S) se corresponde con la categoría de conjuntos bidimensionales, sus variables libres se corresponden con las variables libres u y v de R. La variable x en R y S se corresponde con la misma categoría de objetos. Consideremos a las variables u, v como dependientes. Luego, podemos definir la función Φ(x y z), cuyo valor se corresponde con la categoría de conjuntos a la que pertenece la variable libre U. Podemos formar así la relación S(x v Φ(x y z)).

Este principio precede al de iteración, pues es utilizado en el mismo.[14]

El principio de iteración es *decisivo* en su sistema y lo introduce de esta forma:

8) *Principio de iteración.* Sea R una relación, R(x x′| X) con x, x′ variables dependientes de la variable X, que es una variable que pertenece a la categoría de conjuntos bidimensionales, cuyas

[12] En *Das Kontinuum*, el símbolo * viene a desempeñar el papel que en lógica de primer orden desempeña el cuantificador ∃, pero aplicado a variables distintas, i.e., si R es una relación, R** se debe entender como $\exists x \exists y$ R x y.

[13] La notación R(u v | x y z) tiene el siguiente sentido. *u* y *v* son variables dependientes; *x*,*y*,*z* son variables independientes. Dado que podemos completar la relación R, para cada variable independiente, con objetos de una (pero la misma) categoría, resulta de forma natural, que la relación R *sólo* posee dos variables "dependientes". Esto a su vez se corresponde con una función Φ(x y z) de tres variables con valor (*u*, *v*); o con un conjunto bidimensional (las dos variables *dependiente*s de la relación R). Luego, R(u v | x y z) se corresponde con el conjunto {(u v) | Φ(x y z) = (u v)}.

[14] "El principio de iteración debe ser precedido por el de sustitución" (Weyl 1918, p. 26).

variables libres, a su vez, pertenecen a la categoría básica a la que pertenecen x y x′. La función que se origina a partir de R se designa por $\Phi(X)$, cuyo valor es un conjunto de la misma categoría que su argumento. A partir del principio de sustitución podemos formar:

$$R_2(x\ x' |\ X) = R(x\ x' |\ \Phi(X))$$

La función que obtenemos de R_2 es la función iterada $\Phi(\Phi(X))$. Si denominamos R como R_1, entonces, a partir de R_2 obtenemos

$$R_3(x\ x' |\ X) = R_2(x\ x' |\ \Phi(X)).$$

De modo que para cualquier natural *n* tenemos

$$R_{n+1}(x\ x' |\ X) = R_n(x\ x' |\ \Phi(X)).$$

Luego la sucesión $R_1, R_2, \ldots, R_n$ de relaciones la podemos hacer derivar de la relación $R(n;\ x\ x' |\ X)$ con *n* perteneciente a la categoría de "número natural", y por tanto, puede ser sustituida por 1, 2, 3. . .

Weyl, sin embargo, afirma que su principio debe hacerse más general, de la siguiente forma:

1) Supone dos relaciones $R(x\ x' |\ X\ Y)$ y $S(y\ |\ X\ Y)$ de las cuales surgen dos funciones $G(X\ Y)$ y $H(X\ Y)$. La variable libre X se refiere a la misma categoría de conjuntos bidimensionales a la que se refiere el valor de la función G. Y la variable Y a la misma categoría de conjuntos unidimensionales a la que se refiere el valor de H.

2) Luego la sucesión de relaciones toma esta forma:

   $R(1;\ x\ x' |\ X\ Y) = R(x\ x' |\ X\ Y)$; $R(n{+}1;\ x\ x' |\ X\ Y) = R(n;\ x\ x' |\ G(X\ Y)\ H(X\ Y))$

   $S(1;\ y\ |\ X\ Y) = S(y\ |\ X\ Y)$; $S(n{+}1;\ y\ |\ X\ Y) = S(n;\ y\ |\ G(X\ Y)\ H(X\ Y))$

Se introduce, asimismo, un tercer modo de generalizar el principio: haciendo que en el *n*-ésimo paso la función que sustituye dependa asimismo de *n*.

Sea $R(x\ x' |\ X\ n)$, y sea $\Phi(X\ n)$ la función que surge de R. La iteración que formará la relación R^* se describe del siguiente modo:

$$R^*(x\ x' |\ X\ 1) = R(x\ x' | X\ 1)$$

$$R^*(x\ x'|\ X\ n{+}1) = R^*(x\ x'|\ \Phi(X, n{+}1), n)$$

Para Weyl este principio es el más complicado de todos los presentados, y el que es *matemático* en sentido específico. Observemos, además, como Weyl ha definido (fundamentalmente) una recursión primitiva.[15]

2.3. Conjuntos

La definición de conjunto en *Das Kontinuum* es la siguiente:

> *Toda propiedad fundamental o derivada E se corresponde con un conjunto (E). La expresión "un objeto a tiene la propiedad E" (o la correspondiente, "un esquema de juicio E(x) con una posición vacía*[16] *es verdadero para x = a") y "a es un elemento del conjunto E" son equivalentes. Dos propiedades E y E′ se corresponden exclusivamente con el mismo conjunto, cuando cada objeto (de nuestra categoría) que tiene la propiedad E, tiene también la propiedad E′, y a la inversa.* (Las cursivas son del original.)

De lo que se desprende que un conjunto es un objeto ontológicamente *dependiente*, y que pertenece a una categoría distinta de la de sus elementos.

En Weyl 1919 se discute qué es lo que en matemáticas debe tener prioridad ontológica. Weyl afirma que la extensión debe primar sobre el sentido (o contenido).[17] El sentido de un concepto, si es claro, puede determinar la esfera de existencia de objetos cuya esencia expresa el concepto. Pero no implica que el concepto sea extensionalmente definido, es decir, que existan objetos que son *la* referencia del concepto, y que formen un *agregado* cerrado, que está intrínsecamente determinado. Así, escribe que "es hoy en día común, el juicio erróneo de considerar el sentido de un concepto anterior lógicamente a su extensión" (1919, p. 86).

Por tanto, un conjunto en el sistema de Weyl es la trasformación extensionalmente definida de propiedades intensionales de contenido definido. Esta idea se puede expresar en forma de un esquema de comprensión como el siguiente:

[15] Véase Feferman 1998 (p. 264).

[16] Weyl escribe *Leerstellen* [posiciones vacías], lo que hoy ha de entenderse por "variables libres".

[17] En Weyl 1919, 1921 y 1925 se introducen las definiciones de "concepto de contenido definido" [*inhalts-definit*]: determinado de forma clara y precisa; y "concepto extensionalmente definido" [*umfangs-definit*]: si los objetos que caen bajo la definición del concepto forman una totalidad delimitada y determinada.

$$\exists X\ \forall x\ (x \in X \ \leftrightarrow\ P(x))$$

Donde hay que tener en cuenta las siguientes restricciones:

1) La fórmula P contiene exclusivamente variables ligadas de la categoría fundamental (*v.gr.*, la de los números naturales) aunque pueda contener variables libres de otras categorías, como puedan ser conjuntos.

2) La igualdad (=) no puede aparecer en P ligada a relaciones o conjuntos, sino sólo a objetos de la categoría fundamental.

2.4. Proceso matemático

La idea de "proceso matemático" [*mathematischer Prozess*] aparece por primera vez en referencia a la formación de conjuntos. Weyl escribe:

> Los conjuntos uni- y multidimensionales forman sobre el dominio de objetos dado originalmente un nuevo sistema derivado de objetos ideales; se forman del original [dominio de objetos], [. . .], a través del *proceso matemático*. En efecto, creo que se manifiesta en esta formación de conceptos [*Begriffsbildung*] lo característico de la manera de pensar matemática. Se comprende por sí mismo que, esos nuevos objetos, los conjuntos, son sin excepción distintos de los elementos originales; pertenecen a una esfera de existencia completamente distinta. (1918, p. 15)

El proceso matemático se aplica a un dominio operacional [*Operationsbereich*] que está formado por una o varias categorías de objetos [*Gegenstandskategorie*], y por propiedades o relaciones básicas. Las variables libres de una relación (sea básica o derivada) se sustituyen por objetos de la categoría, sea ésta básica o no. De este modo se forman, como vimos, los conjuntos.

El proceso matemático conduce a la determinación de *niveles de conjuntos*. Los conjuntos de primer nivel [*1. Stufe*] son aquellos que surgen cuando las variables de propiedades (o relaciones) que los definen se sustituyen por elementos de la categoría básica. De este modo, existen conjuntos unidimensionales, bidimensionales, etc., de niveles distintos. La categoría a la que un conjunto pertenece se determina a través del número de variables libres de la relación a partir de la cual el conjunto se origina, y a través de la categoría de los objetos que pueden ocupar las variables libres de la relación. Si se amplía el dominio operacional con conjuntos de primer nivel (además de con los objetos de la categoría básica), surgen —cuando se aplica el proceso matemático—[18] los conjuntos de segundo nivel. Weyl se refiere aquí a un tipo de iteración que no tiene que ver con el principio de iteración visto antes. Iterar el proceso matemático es, en esencia, expandir el dominio operacional añadiendo conjuntos y funciones.

2.5. Procedimiento restringido

El "procedimiento restringido" [*engeres Verfahren*] es la restricción impuesta a la cuantificación, que sólo es válida aplicada a la categoría básica (sea ésta la de los números naturales u otra distinta), además de la aplicación del principio de compleción exclusivamente para objetos de la categoría básica.

Weyl escribe:

> Parece natural limitar este uso del concepto de existencia a los objetos de las categorías fundamentales, y de este modo, en el proceso matemático siempre *utilizar sólo ambos principios de compleción 5 y 6 para posiciones vacías que se correspondan con una categoría fundamental*. Mediante este "procedimiento restringido" está, entonces, claro que los conjuntos y las relaciones funcionales de 1. nivel, aquellos que surgen al considerar objetos de categorías fundamentales, se han agotado [*erschöpft sind*], de modo que no se pueden añadir al 2. nivel y niveles más altos, nuevos conjuntos y relaciones funcionales de esta clase. (1918, p. 21)

Y en una nota:

> El significado principal del procedimiento restringido resulta de modo más claro de la siguiente observación: sólo al seguir este procedimiento restringido permanecen los objetos de las categorías fundamentales de manera inamovible [*unverrückt*] como los objetos verdaderos de nuestra investigación: de otro modo llegarían a ser todas las relaciones y propiedades derivadas objetos de conocimiento, tanto como el dominio de aquellos objetos primeros. Los juicios finitos, i.e., aquellos que se

[18] "De esta forma, surge el dominio operacional ampliado, al que podemos aplicar de nuevo el 'proceso matemático'; llegamos así a *conjuntos de segundo nivel* (uni- y multidimensionales), cuyas posiciones vacías, hablando de forma general, se refieren en parte a las categorías fundamentales, en parte a conjuntos de primer nivel" (Weyl 1918, p. 21).

> forman considerando las limitaciones del procedimiento restringido, suponen para su determinación sólo tener una visión completa de todos estos objetos primeros; "transfinitos", sin embargo, tener una visión completa de todas las propiedades y relaciones derivadas. (1918, p. 21)

Luego, al tenor de estas citas, consideramos que parece claro que Weyl tenía el propósito de desarrollar el análisis siguiendo (exclusivamente) el *procedimiento restringido*.[19]

2.6. Conjuntos de primer nivel y conjuntos aritméticos

Para tratar este punto analizaremos el artículo de Avron (2020), en el cual pretende un nuevo análisis de *Das Kontinuum*, parecido al que hiciera Feferman. Sin embargo, es más extenso, y contiene nuevos e interesantes aspectos, también interpretaciones del autor que son muy perspicaces. Además, quiere dar una formalización del sistema de Weyl que —según el autor— es la primera completamente fiel [*completely faithful*].

Avron afirma que en Feferman 1998 se hace una observación errónea. Escribe: "Sin embargo, Feferman hizo entonces la siguiente observación errónea: Este desarrollo puede considerarse una forma de matemáticas aritméticas, en el momento en el que los conjuntos de nivel 0[20] son justamente aquellos que son aritméticamente definibles" (2020, p. 53).

Y más adelante:

> De esta observación errónea, Feferman deriva la siguiente conclusión errónea concerniente a las formas originales del principio de iteración de Weyl:
>
> > [A]un aceptando el primero (también el más simple) de estos principios entra en conflicto con la decisión de Weyl de reducirse a los conjuntos de nivel más bajo en la jerarquía ramificada.
>
> Esto se hizo en [17][21] construyendo "una relación definible mediante el principio de iteración (8) que no es aritmética, luego no definible a nivel 0". Entonces Feferman concluye que

[19] En Avron 2020 (p. 61) se afirma que el procedimiento restringido es el hecho de añadir a la categoría $S(S(N^n))$ ["S" significa SET; luego: conjuntos de conjuntos de N^n] un nuevo término cuyo significado es la colección de todos los conjuntos que inducen los términos de tipo $S(N^n)$. Creemos que: 1) se pierde con esta afirmación la idea de cuantificación exclusivamente sobre objetos de la categoría básica; 2) en principio, la categoría que Avron exhibe puede ampliarse.

[20] Son los conjuntos de 1. nivel de Weyl.

[21] Se refiere a Feferman 1998 (pp. 249–283).

> Esto muestra que el principio (8) de Weyl entra en conflicto con su plan de trabajo sólo con conjuntos definibles en el nivel más bajo. Claramente, Weyl no era consciente de este problema con sus principios. (2020, p. 53)

Después, se afirma que Feferman identifica los conjuntos de primer nivel de naturales con lo que hoy se conocen como *conjuntos aritméticos*, es decir, aquellos que se definen con una fórmula de primer orden de la aritmética de Peano, y que no contienen variables de conjuntos ligadas, aunque las pueda contener libres. Avron afirma que esa identificación es "en el mejor de los casos un anacronismo" (2020, p. 53), pues la moderna noción técnica de aquellos conjuntos no era conocida en 1918 y, por tanto, Weyl no pudo haber decidido considerarlos.

Esto, sin embargo, no nos parece muy convincente, pues se trata de ver *si* los conjuntos aritméticos se pueden *entender* como los de primer nivel de Weyl. Es una constante en ciencia que los conceptos se desarrollen y especifiquen; que se hagan más precisos (perdiendo su posible inexactitud primera) y, a la vez, "técnicos", con el tiempo. Lo que no significa que la idea que pretenden captar, y dado el caso, refinar, no sea esencialmente la misma. Piénsese en los irracionales desde los griegos hasta nuestros días.

Creemos que Feferman identifica estos conjuntos correctamente. Si observamos cómo se define el proceso matemático y el procedimiento restringido aplicado a los naturales como categoría básica, la afirmación de Feferman, aunque quizá no sea del todo precisa, se acerca, sin duda, a la idea de Weyl. Es cierto que, siguiendo el procedimiento restringido, se pueden considerar conjuntos de niveles superiores, pero, los cuantificadores *no deben* aparecer en su definición. Esto es lo fundamental.

Avron escribe en su artículo que, incluso si Weyl fuera conocedor de la noción de conjunto aritmético, no identificaría estos conjuntos con los de primer nivel. Las razones aducidas para ello no son, a nuestro juicio, concluyentes. Avron afirma que para Weyl el principio de iteración es tan fundamental que no hay manera de que lo pudiera debilitar para considerar sólo los conjuntos aritméticos (2020, p. 53).

Además —escribe—, como para Weyl sólo es primitiva la relación de *sucesor*, necesita del principio de iteración para definir operaciones como la multiplicación o la suma; operaciones que en ACA_0 sí son primitivas (2020, p. 53). Y más adelante escribe algo que a nuestro juicio es trivial: "Entonces *para Weyl* los conjuntos de primer nivel incluyen definitivamente cada conjunto de números naturales que es definible en su sistema" (2020, p. 53; las cursivas son del original). Trivial, pues lo fundamental sería saber *cómo* se ejemplifica esto a partir del sistema expuesto en *Das Kontinuum*. Pero, además, esto no contradice la identificación de conjuntos aritméticos con los de primer nivel.

Avron sigue y afirma que Weyl, "explícitamente dijo" que el principio de iteración destruye de forma efectiva la distinción entre "definibilidad adecuada" [*sensible definability*] en general y definibilidad de primer nivel (2020, p. 53).

El original alemán (extendido) dice:

> Vemos ahora, después de que se hayan añadido los principios de sustitución e iteración, que no se puede seguir con la idea de una generación de relaciones y sus correspondientes conjuntos en niveles individuales (donde aparecen todos los conjuntos de primer nivel, cuyos elementos pertenecen a las categorías fundamentales, en el segundo nivel, todos aquellos conjuntos, cuyas variables libres se corresponden, en parte a categorías fundamentales, en parte a categorías de conjuntos de primer nivel, etc.). (Weyl 1918, p. 29)[22]

No obstante, no creemos que el principio de iteración *destruya* nada. Weyl simplemente hace notar lo que ya dijo respecto al procedimiento restringido, el cual sigue —tiene que seguir— siendo válido cuando se añaden los principios de sustitución e iteración. Lo más importante para Weyl es que no se caiga en el círculo vicioso que critica, si se consideran los dos nuevos (y fundamentales) principios introducidos. Así, escribe:

> Mediante el principio de sustitución pueden tener lugar, en particular, ostensibles "retrocesos" a niveles anteriores. Sin embargo, aquí estamos seguros contra definiciones que se vuelven sinsentidos debido a la aparición de círculos (viciosos), pues el uso del principio existencial 6. se limita a las categorías fundamentales. (1918, p. 29)

Esta importancia se expresa en Weyl 1918 (p. 21), como ya vimos.

Avron continúa su artículo afirmando —apoyándose en otra cita de 1946 donde se describe el sistema de *Das Kontinuum*— que Weyl da

[22] La cita proporcionada de la traducción inglesa de *Das Kontinuum* es: "We see now, given that the principles of substitution and iteration are to be added, that we can no longer adhere to the notion of a production of relations and corresponding sets in separate levels."

un sentido "amplio" a la noción de definibilidad de los conjuntos de primer nivel: "Hay que resistir la tentación de ir más allá del primer nivel de construcción; mejor aún, se tiene que intentar hacer que el rango de relaciones construibles sea lo más amplio posible, agrandando el conjunto de operaciones básicas" (1946, p. 8). En la cita sólo se dice que se debe resistir la tentación de pasar del primer nivel, lo cual se lograría ampliando el conjunto de operaciones básicas, pues a partir de ellas se pueden definir más relaciones construibles; esto es, no considerando exclusivamente como básica la relación *sucesor*.

No entendemos bien qué tiene que ver esto con la identificación que hizo Feferman. Además, Avron habla de "reducirse a esos conjuntos" [*stick to those sets*] (i.e., los conjuntos aritméticos), y posteriormente escribe que

> [e]sta cita[23] también muestra que *Weyl ha buscado hacer que la colección de los conjuntos de primer nivel sea lo más amplia posible, más que restringirla*. Este hecho contrasta fuertemente con la creencia de que habría decidido restringir sus conjuntos de primer nivel a los aritméticos, si hubiera tenido conocimiento de ellos. (2020, p. 54)

Creemos, no obstante, que a tenor de esta cita no se puede inferir que la identificación no sea correcta. Restringir más o menos los conjuntos de primer nivel no es lo mismo que *negar* la identificación que Feferman propone. Más aún, si seguimos a Avron en esto, parece que Weyl se apartaría de lo escrito en *Das Kontinuum* al intentar ampliar el rango de las operaciones básicas; algo que Avron mismo le ha "criticado" a Feferman. Es más, la cita de Weyl se puede interpretar como que precisamente la relación *sucesor* es demasiado débil para seguir consistentemente con la construcción del análisis propuesta.

Casi al final de la sección que tratamos, Avron escribe que más adelante mostrará que "Weyl no sólo no decidió reducirse a los conjuntos aritméticos [*to stick to the arithmetical sets*], —sino que explícitamente rehusó reducirse a *cualquier* colección definida de conjuntos de números naturales" (2020, p. 54; las cursivas son del original). Lo que consiguientemente se muestra en Avron 2020 (p. 59) es una interpretación de citas de *Das Kontinuum* que llevan al autor a concluir que éstas

[23] Véase la cita de Weyl al comienzo de esta página.

> refutan de nuevo, de una manera decisiva, dos demandas de Feferman que se han mencionado anteriormente. Primero, que no sólo Weyl nunca dijo que pretendía reducirse a los conjuntos aritméticos —aquí habla explícitamente sobre el derecho de extender sus actuales métodos de definición, y sobre las implicaciones de este derecho—. Segundo, que en contraste con lo que Feferman escribió en [17], dejan muy claro la posición que toma Weyl sobre la cuantificación de relaciones y funciones como parte del lenguaje. Sin embargo, lo que es realmente importante sobre el contenido de estas citas tan importantes (que Feferman parece ignorar por completo) es la luz que arrojan sobre tres importantes asuntos concernientes al sistema de Weyl y su aproximación en [43].[24,25]

Bien, creemos que de las citas aportadas no se desprende tal conclusión. Las citas son:

1. Podemos ver que ser continua en "*a*" *no* es una propiedad delimitada [*delimited*] de una función (y, por tanto, es dependiente de una delimitación precisa del alcance del concepto "número real"). En la siguiente sección, pretendemos dar cuenta del gran significado de este hecho para el análisis, puro y aplicado. (Las cursivas son del original.)

2. Si consideramos los principios de definición como un sistema abierto, es decir, si nos reservamos el derecho a extenderlos cuando sea necesario haciendo adiciones, entonces, en general, la pregunta de si una función es continua debe asimismo quedar abierta (aunque podríamos intentar resolver cualquier pregunta delimitada [*delimited*]). Pues una función que, en nuestro sistema actual, es continua puede perder esta propiedad si nuestros principios de definición son extendidos y, por consiguiente, a los números reales "actualmente" disponibles se les añaden otros.[26]

3. Por supuesto: para todas las funciones que uno se encuentra en el análisis, esta pregunta *no* queda abierta, pues para ellas,

[24] Se refiere a *Das Kontinuum*.

[25] Avron utiliza en esta frase tres veces el adjetivo *important*. En nuestra traducción no buscamos belleza estilística, más bien pretendemos ser fieles a pesar de parecer repetitivos.

[26] La frase de Avron: "[T]hough we may attempt to resolve any delimited question", debe traducirse como: "Contrariamente a la decisión en todas las preguntas *finitas*" ["[I]m Gegensatz zu der Entscheidung in allen *finiten* Fragen" (las cursivas son del original)]. Aunque la idea subyacente está más o menos bien comunicada.

> el juicio existencial negativo que afirma su continuidad es una consecuencia lógica de los "axiomas", en los cuales se transforman los principios de definición cuando se formulan como juicios existenciales positivos sobre conjuntos.[27]

Lo más importante de la primera es que para Weyl la continuidad (en un real) no es una propiedad "delimitada", sino transfinita (Weyl escribe *transfinite*[28] (1918, p. 65) que, como vimos, su significado es el de abarcar de forma completa las propiedades y relaciones derivadas). Esto es así, pues como indica la definición de función continua en un real, se cuantifica sobre *todos* los reales del dominio de la función.

La segunda afirma que, *si* nos reservamos la posibilidad de ampliar los principios de definición, entonces, en general, la pregunta sobre si una función es continua queda abierta, pues una función que —según ha explicado Weyl— es continua puede "perder" esta propiedad si se amplían los principios de definición. Y si a los reales que hasta ahora habían sido definidos, se añaden otros, para cuya definición se han usado los *nuevos* principios.

Pero esto no implica que Weyl esté afirmando nada de lo que dice Avron, a saber, que de forma *explícita* rehúsa ceñirse a cualquier colección definida de conjuntos de naturales. Ni se afirma ni se niega nada en este sentido. El hecho de que la pregunta quede abierta es realmente resultado no sólo de lo dicho sobre la posibilidad de añadir otros principios, sino también de algo que Weyl escribe justo antes (y que Avron no cita): que para decidir sobre si una función es continua o no, *no sólo* necesitamos tener una visión completa [*volle Überblickung*] de los naturales, sino de los conjuntos cuatridimensionales de naturales (i.e., de los reales) (1918, pp. 65–66). Es decir, que quede abierta la pregunta es consecuencia de considerar (potencialmente) abierto el conjunto de principios de definición *y* de la decisión

[27] Esto último es una nota en *Das Kontinuum*. Véase Weyl 1918 (p. 65). Avron traduce "Freilich: bei allen stetigen [. . .]" por "Of course, in the case of every function [. . .]". Nosotros nos decantamos por "Sin embargo: para todas las funciones continuas" dado el contexto anterior al párrafo de Weyl. Además, somos conscientes de la diferencia expuesta en nuestro texto entre las traducciones en inglés y en alemán, que no son exactamente iguales. Hemos querido, sin embargo, mantenernos lo más literal posible, además de añadir el adjetivo "continuas", que falta en la traducción inglesa y es esencial.

[28] Los traductores ingleses han decidido traducir "transfinit" por "non-delimited", aunque Weyl le da un sentido preciso en su texto. Véanse las notas 24 y 37 en Weyl 1985 (pp. 120–121).

de seguir el procedimiento restringido. Pues son independientes; de lo primero no se infiere necesariamente lo segundo.

La tercera y última cita, una nota respecto de la segunda, no se ha escrito completa en Avron 2020, y, además, los traductores ingleses de Weyl la han traducido incorrectamente. Tal y como está en la traducción no tiene sentido. La cita correcta es:

> Sin embargo: para todas las funciones *continuas*[29] que se conocen del análisis, esta pregunta *no*[30] queda abierta, porque para ellas, el juicio existencial negativo que afirma su continuidad, es una consecuencia lógica de los "axiomas",[31] en los cuales se transforman los principios de definición, cuando se formulan como juicios existenciales positivos sobre conjuntos. Pero esto es solamente una particularidad especial de estas funciones "incondicionalmente"[32] [*unbedingt*] continuas. (1918, p. 66, nota.)

Sin embargo, obsérvese que en esta cita Weyl afirma que *no* queda abierta la pregunta.

¿Estamos ante una contradicción del propio Weyl, o ante dos posibles interpretaciones?

Weyl afirma que el conjunto de *todos* los reales existe [*Menge aller reellen Zahlen*] en su dominio operacional (1918, p. 51). Y en Weyl 1921 se puede leer:

> Hemos logrado aquí crear un sistema de números extensionalmente definido, dentro del cual no sólo las construcciones de la geometría euclídea, sino que las construcciones más generales del análisis, son realizables sin cortapisas. En particular, es válido el principio de convergencia de Cauchy en el "sistema de números weyliano" [*Weylschen Zahlsystem(s)*] y también el teorema que [afirma que] una función continua toma todos los valores intermedios; naturalmente para las funciones y sucesiones que son ellas mismas construibles [. . .] Nunca fui de la opinión de que el continuo dado en la intuición fuera un sistema weyliano, más bien que el análisis sólo necesita un tal sistema y que no tiene que preocuparse por el continuo vertido[33] entre medias [*das dazwischen ergossene "Kontinuum"*] [. . .] *¿Qué sucede con la numerabilidad del continuo*? La antinomia de Richard tiene razón en

[29] Estas cursivas son mías.

[30] Estas cursivas son del original.

[31] Estas comillas son del original.

[32] Estas comillas son del original.

[33] El sistema weyliano de reales es, a diferencia del clásico, numerable. Luego, entre dos reales weylianos existen infinitos reales clásicos.

> el siguiente sentido: se puede regular el uso de los principios lógicos de construcción, tal que en un proceso ordenado de generación [*in einem geordneten Entstehungsprozeß*] surjan las propiedades y relaciones de manera precisa en una sucesión, donde se tiene la seguridad de que cada relación de este tipo será generada en una precisa etapa del proceso. Por tanto, también está, en particular, el sistema de los "números reales" (en nuestro sentido) ordenado en una sucesión. (pp. 47–48; las cursivas son del original.)

Luego, después de haber leído esto, nos sobrevienen dos interesantes preguntas:

1. ¿Son los reales un conjunto *determinado*, como los naturales?
2. ¿O indefinidamente extensible [*open-ended*] como se afirma en Avron 2020 (p. 30)?

Teniendo en cuenta la cita de Weyl (1921), que acabamos de ver, creemos que estaríamos ante una contradicción si, considerando las siguientes afirmaciones de Weyl: a) que en cada categoría de conjuntos el conjunto universal existe (1918, p. 28), y b) que existe el objeto "conjunto de todos los reales" de la categoría "número real", se interpretara que la cuantificación sobre reales *no* está permitida al definir nuevos conjuntos.

No es una contradicción si se atiende a la cita antes mencionada donde se dice que "*no* queda abierta la pregunta". En cuyo caso, Avron yerra al afirmar que los reales son un conjunto indefinidamente extensible,[34] aunque la propiedad "ser-un-real" sea definida. En Avron 2020 (p. 30) se mezcla lo que Weyl afirma en 1919 (p. 86), refiriéndose a la definición de *real de Dedekind*, a saber, que el *concepto* de número real no es extensionalmente definido; y que el *conjunto* de los reales sea un objeto existente y determinado en su sistema. Es cierto que no podemos afirmar que Feferman conociera tales citas, sin embargo, no creemos que sean relevantes en ningún sentido que pueda contradecir de forma esencial lo escrito en 1998 (pp. 249–283).

Para terminar, creemos que Avron es un poco estricto al juzgar a Feferman cuando analiza su propuesta de formalización del sistema

[34] Esto nos parece bastante sorprendente, pues en Avron 2021 (pp. 35–36) se define la *cardinalidad* cuantificando sobre conjuntos de naturales. Pero, Weyl define un real como un conjunto cuatridimensional especial de naturales (1918, p. 51), luego perteneciente a P(N). ¿Cómo es posible que la cuantificación sobre reales no esté permitida, por ser el conjunto de reales indefinidamente extensible, pero sí se permita en la definición de "cardinal de un conjunto de naturales"?

de *Das Kontinuum*. En Feferman 1998 (p. 272) se dice refiriéndose a ACA_0: "[F]ormaliza la parte del sistema de Weyl que tiene como objetivo una mera interpretación aritmética."[35] Y continúa Feferman (algo que no cita Avron): "[A]unque el sistema como un todo [...] es más fuerte que $Res - (\prod_{\infty}^{0} - CA)$."[36] Y luego:

> Además, el desarrollo del análisis de Weyl en el capítulo II parece requerir medios que vayan más allá de $K^{(\alpha)}$ o $Res - (\prod_{\infty}^{0} - CA)$, pues no tenemos funciones sobre conjuntos como objetos del discurso. Sin embargo, la misma parte del análisis como es tratada por Weyl *puede* desarrollarse en este sistema restringido haciendo algunas sencillas modificaciones. (Las cursivas son del original.)

Lo cual supone que estaba al tanto de ello. Con su artículo, Feferman pretende definir un sistema en el cual la predicatividad de Weyl se pudiera desarrollar, y no afirmar que el sistema en cuestión es el *más* adecuado para recoger la ideas de Weyl.

3. *Formulación final de los principios y dominio operacional ampliado*

En este último punto queremos analizar la sección de *Das Kontinuum* dedicada a la formulación final de los principios de definición. Esta sección es interesante porque parece "contradecir" lo escrito anteriormente.

Al haberse introducido los principios de sustitución y de iteración no tiene ya sentido afirmar que las relaciones (y sus correspondientes conjuntos) se generan de forma sucesiva por niveles. Y aunque el principio de sustitución puede hacer que se caiga en definiciones donde aparezca el círculo vicioso que se pretendía resolver, dado que el cuantificador existencial sólo puede (siguiendo el procedimiento restringido) recorrer la categoría fundamental, Weyl escribe que se está a salvo de sufrir algún "retroceso" en niveles anteriores.

Si pensamos que las relaciones (y los conjuntos) se "generan" de forma genética, algo que puede ser conveniente en aras de la claridad, entonces, "esta generación no ocurre en niveles, mediante la iteración del proceso matemático descrito en § 4; sino, por así decirlo, en forma de actos únicos paralelos [*in lauter parallelen Einzelakten*]". Se trata de la generación de todas las relaciones básicas que se pueden

[35] El propio Avron escribe esta cita, pero la refiere al sistema $K^{(\alpha)}$, y no a ACA_0. Lo cual no es exacto.

[36] Es otra forma de referirse a ACA_0. Véase Feferman 1998 (p. 271).

derivar de los principios de definición aplicados a categorías fundamentales, considerando además la relación de pertenencia.

¿Cómo se ha de entender la expresión de Weyl: "*en forma de puros actos únicos paralelos*"? Es, sin duda, algo oscura. Nosotros interpretamos la expresión como que el procedimiento restringido, además de los principios de sustitución e iteración, permiten la formación de conjuntos —como hemos visto— de forma que cada nivel se corresponde con su categoría, y que éstos, en cada nivel, se agotan; es decir, ya no pueden generarse más.[37] Luego, la generación no es dependiente del nivel anterior (genética, la llama Weyl), sino que sucede de una vez, de forma "paralela", para cada nivel.

No es necesario diferenciar entre dos relaciones (o sus correspondientes conjuntos) que tengan un mismo sentido [*sinnesgleich*]. Sin embargo, a dos relaciones que tengan distinto sentido [*sinnesverschiedene*] no es posible, en principio, asociarles el mismo conjunto. Entonces no es correcto, cuando se pretende definir una relación, usar la relación de igualdad entre *conjuntos*. Y, por tanto, si se define una relación R cuyas variables libres se refieran a una categoría fundamental, la afirmación de que algunos elementos de esa categoría satisfacen R, tiene sentido, y puede ser, por tanto, verdadera o falsa. También es verdadero o falso que, si *todos* los elementos que satisfacen R satisfacen otra relación del mismo tipo, por ejemplo, R' (y a la inversa), podemos asegurar la igualdad de los correspondientes conjuntos M y M'. Después de que se haga la identificación de los conjuntos de primer nivel, se puede pasar a relaciones cuyas variables libres son, además de elementos de la categoría fundamental, conjuntos de primer nivel. De este modo, se pueden *identificar* los conjuntos de segundo nivel, etc. Lo importante —recalca Weyl— es que en la definición de las relaciones *no* se utilice ni el concepto de *igualdad* entre conjuntos ni el de *existencia* de conjuntos. Sólo así estamos a salvo de caer en un círculo vicioso. Esto es evidentemente una restricción impuesta, que tiene consecuencias importantes.

En la sección sobre la conformación *final* de los principios de formación de juicios se empieza aclarando lo que debe ser el *punto de partida*: una (o varias) categorías de objetos —las categorías fundamentales—, así como las propiedades y relaciones *directamente* asociadas a estas categorías. Cada variable libre de una relación (o de su esquema de juicio) está asociada a una categoría de objetos específica, por tanto, el esquema de juicio se convierte en un juicio *con sentido*, si cada variable libre se sustituye por un elemento de

[37] Véase la sección 2.5 de este artículo.

la mencionada categoría. A las relaciones primitivas se les añade la identidad: $I(x\ y)$, cuyas variables libres se asocian a la misma categoría fundamental. Weyl remarca que la restricción impuesta a las categorías fundamentales es esencial (1918, p. 31).

I. A cada relación (con una o más variables libres) corresponde un conjunto. Por ejemplo, a la relación $R(a\ b\ c)$ le corresponde un *sistema de elementos* [*Elementensystem*] a, b y c del correspondiente conjunto P. La categoría a la que pertenece el conjunto está determinada por la categoría a la que pertenecen los elementos a, b y c. Además, se añade la relación (fundamental) de pertenencia $\in$, que se da entre los elementos y el conjunto P (cuando aquéllos forman un sistema de elementos de dicho conjunto).

II. Weyl denomina *principios generales* [*die allgemeinen Prinzipien*] a los principios del 1–4.[38] Hace la precisión de que, es evidente [*selbstverständlich*] en estos principios, las variables libres que se quieren sustituir por objetos han de referirse a la *misma* categoría de objetos.

III. Los principios de compleción [*Prinzipe der Ausfüllung*] son los principios 5 y 6. Para ellos rige la restricción [*Einschränkung*] de que las variables libres que puedan ser sustituidas por objetos o por el cuantificador existencial "*existe*" deben referirse a la categoría fundamental.

IV. Los principios de sustitución e iteración son los ya vistos previamente. Para el principio de iteración, si se considera —como Weyl pretende— el *dominio operacional absoluto* (i.e., los números naturales y la función sucesor) se ha de tener en cuenta su forma más general.

V. A partir de los principios anteriores Weyl analiza los conceptos de identificación, conjunto y función. Las relaciones que provienen de los principios mencionados las define como "finitas". Para ellas se tiene que, si para dos relaciones se da que las variables se refieren (en idéntico orden) a una misma categoría de elementos, entonces, cada sistema de elementos que satisface una, satisface la otra y a la inversa. De modo que, los conjuntos "finitos" que se corresponden con aquellas relaciones, son idénticos.

[38] Véase la sección 2.2 de este artículo.

Cada relación finita, cuyas variables se clasifiquen en dependientes e independientes, se corresponde con una función. Si se sustituyen las variables independientes con objetos de su categoría, entonces, el conjunto que "surge" de la relación, es el *valor* de la función para el sistema de argumentos [*Argumentsystem*] dado. Dos funciones son idénticas si y sólo si sus valores son idénticos para cualquier sistema de argumentos.

Con esto, Weyl ha fijado su sistema operacional matemático ampliado,[39] al cual, además de objetos de categorías fundamentales se le añaden las funciones y conjuntos como objetos de una categoría *ideal*. Este sistema operacional es cerrado en el sentido de que forma un sistema de "objetos existentes en sí" [*an sich existierender Gegenstände*], cuya aparición en juicios *relevantes* [*einschlägiger Urteil*] hacen a éstos susceptibles de verdad o falsedad. Juicios relevantes son aquellos en los que *no* aparecen variables, y que surgen de la aplicación sin restricciones de los principios 1–6 a partir de las relaciones elementales del sistema operacional ampliado (a las cuales hay que añadir la relación de identidad, y cuyas variables deben pertenecer a la misma (y arbitraria) categoría de objetos del sistema referido).

Weyl recalca que con respecto al principio 5 (principio de compleción) hay que tener en cuenta que está en la naturaleza de los conceptos de conjunto y función la manera en que pueden ser "dados directamente"; a saber, a través de las relaciones que surgen siguiendo I–IV. Luego, preguntas que se pueden plantear dentro del sistema operacional definido son, por ejemplo: si dados dos conjuntos, uno es un subconjunto del otro; o, dada una función de variable real, si es continua en un punto o no. Sin embargo, *no existe* "el conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado",[40] o, "el conjunto de todas las funciones continuas de variable real". Éstos son objetos *transfinitos* (en el sentido de no delimitados, o derivables a partir de sus principios), y no *finitos*.

Para Weyl, el dominio de los juicios que surgen de la aplicación sin restricción [*uneingeschränkte Anwendung*] de los principios mencionados anteriormente, que pueden ser *transfinitos*, sobrepasa el carácter de aquellos juicios que, bajo V, i.e., la igualdad de funciones y conjuntos definidos,[41] pueden tratarse razonablemente.

[39] Este sistema se distingue del absoluto. Véase Weyl 1918 (p. 19).

[40] Weyl aclara en una nota: si este último no contiene elementos de la categoría fundamental. Véase 1918 (p. 33, nota).

[41] Weyl escribe: "Según el criterio formulado en V para la igualdad de dos conjuntos o funciones definidos distintos" (1918, p. 33).

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2024.1508

Luego, observamos que la idea de Weyl sigue en pie en este repaso y formulación final de sus principios, a saber, tratar sólo con conjuntos aritméticos.[42] Weyl ha aceptado como nuevos objetos *legítimos* a los conjuntos y funciones que surgen de la aplicación *restrictiva* de los principios vistos, aunque no permite cuantificar sobre ellos.

4. *Conclusiones*

En este artículo hemos hecho un exhaustivo análisis de conceptos fundamentales, a menudo deficientemente comprendidos, en *Das Kontinuum*. Esto nos ha servido para estudiar algunas de las propuestas más recientes sobre el "sentido" del sistema que Weyl propuso.

Hemos llegado a la conclusión de que 1) Weyl no pretendía que su sistema fuese (o tratase) más que con objetos de *una* categoría fundamental, que, para el desarrollo consistente del análisis, se concreta en la de los números naturales; 2) que la cuantificación se debe restringir a esta categoría —lo que Weyl llama seguir el *procedimiento restringido*—, y 3) que, aunque el sistema de Weyl permite tratar con categorías *ideales*: la de conjunto y función, los conjuntos aceptados como *definibles* de modo correcto son aquellos que se pueden identificar con los aritméticos, frente a la interpretación de Avron. A esta conclusión hemos llegado analizando pasajes originales de textos fundamentales de Weyl, donde expone sus ideas sobre el desarrollo predicativista del análisis, así como de Feferman (1998). Hemos contrapuesto esto a lo escrito en Avron 2020, sobre todo en relación con el problema de la identificación de conjuntos aritméticos con conjuntos de primer nivel, y a la idea de Feferman sobre el alcance del sistema weyliano.

En este sentido, somos de la opinión de que la exégesis que Feferman propone es la que más se ajusta al pensamiento original de Weyl, aunque adolezca de algunas imprecisiones menores.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, Robin, y Zhaohui Luo, 2010, "Weyl's Predicative Classical Mathematics as a Logic-Enriched Type Theory", *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 11, no. 2, pp. 1–29.

Avron, Arnon, 2020, "Weyl Reexamined: 'Das Kontinuum' 100 Years Later", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 26, no. 1, pp. 26–79.

[42] Aunque Weyl formula de forma general, en su "construcción" del análisis la categoría básica es la de los números naturales. Véase, además, Weyl 1918 (p. 36).

Crosilla, Laura, 2017, "Predicativity and Feferman", en Gerhard Jäger y Wilfried Sieg (eds.), *Feferman on Foundations: Logic, Mathematics, Philosophy*, Springer International Publishing, Cham, pp. 423–448.

Feferman, Solomon, 1998, "Weyl Vindicated: Das Kontinuum Seventy Years Later", en *In the Light of Logic*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 249–283.

Weyl, Hermann, 1987, *The Continuum. A Critical Examination of the Foundation of Analysis*, trans. Stephen Pollard y Thomas Bole, Dover Publications, Inc., Nueva York.

Weyl, Hermann, 1968, *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols., K.C. Chandrasekharan (ed.), Springer, Berlín.

Weyl, Hermann, 1946, "Mathematics and Logic. A Brief Survey Serving as Preface to a Review of *The Philosophy of Bertrand Russell*", *American Mathematical Monthly*, vol. 53, no. 1, pp. 2–13.

Weyl, Hermann, 1925, "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik", *Symposion*, vol. 1, pp. 1–32.

Weyl, Hermann, 1921, "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, no. 73.

Weyl, Hermann, 1919, "Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung/ Zeitschriftenband*, pp. 85–92.

Weyl, Hermann, 1918, *Das Kontinuum*, Veit and Comp., Leipzig.

Recibido el 17 de mayo de 2023; aceptado el 14 de septiembre de 2023.