CRÍTICA. Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 57, No. 169 (abril 2025): 217–222

DOI: 10.22201/iifs.18704905e.2025.1647

Eugenia Cheng, *The Joy of Abstraction. An Exploration of Math, Category Theory, and Life*, Cambridge University Press, UK, 2023, 424pp., ISBN 978–1–108–47722–2424

Dividido en 3 partes, 24 apartados y 4 apéndices, *The Joy of Abstraction. An Exploration of Math, Category Theory, and Life*, de Eugenia Cheng, puede catalogarse como una de las introducciones más claras y comprensibles de la teoría de categorías. A lo largo del texto, Cheng sumerge al lector en las profundidades de dicha teoría con teoremas, demostraciones, ejercicios, pero sobre todo con ejemplos de la vida cotidiana —explicitados con una escritura amena y, al mismo tiempo, rigurosa— como la justicia social, el COVID–19, las rutas de conducción, LEGOS, etc., con los cuáles se hace patente la simplicidad fundamental de esta teoría hasta su más amplia aplicación analítica y técnica. Al respecto, debo decir que *The Joy of Abstraction* difiere de cualquier otro texto introductorio por la manera tan simplificada de entender las matemáticas abstractas.

La tesis de la que parte Cheng resulta interesante: pensar la teoría de categorías como la matemática de las matemáticas (p. 13). El primer tercio del libro aborda este tema, que constituye en realidad una discusión filosófico-matemática sobre conceptos como la igualdad, la relación, la abstracción y la formalización matemática. Cabe la pregunta, ¿por qué se dice que la teoría de categorías es una teoría dentro de las matemáticas, pero ella es, al mismo tiempo, un *modo* de pensar las matemáticas? Sigamos la ruta que nos plantea Cheng para sostener la tesis anterior.

Cheng infiere que, en sentido estricto, las matemáticas dependen de un proceso de abstracción para avanzar. De hecho, la argumentación en matemática está basada en una suerte de lógica rigurosa (cuya base para funcionar correctamente es también un asunto abstracto). La abstracción, tal como se entiende de forma general, es el proceso por el que se aíslan, ignoran o dejan de lado algunos detalles para asegurarnos de que nuestra lógica funcione perfectamente. El resultado, según Cheng, es que "detrás" de estos procesos estaría la teoría de categorías brindando un marco (*framework*) seguro para realizar tales abstracciones. La teoría de categorías sería, así, "una teoría unificadora que puede abarcar simultáneamente una amplia gama de temas y también una amplia gama de escalas al acercarse y alejarse" (*range of scales by zooming in and out*), lo que le permite "ver", de manera similar, estructuras matemáticas grandes y pequeñas. En cierto sentido, la abstracción es, además de mirar profundamente una situación, un paso atrás desde el que se capta un panorama general que evite perderse en los detalles, pero que considere dicha situación como un objeto propio que puede ser estudiado. Por ejemplo: dos manzanas y dos fresas son similares, análogas en sentido estricto, porque son *dos frutas*, pero si vamos un nivel más arriba, al nivel de ser meramente *dos objetos*, también podríamos hacerlas análogas a *dos sillas* o a un *par de cosas*. Si asumimos estos ejemplos, las preguntas saltan a la vista: ¿cómo y cuándo decimos que dos o más cosas son iguales? ¿Es posible describir las maneras en que son iguales? ¿Se pueden describir las interacciones entre dos o más cosas? Para Cheng, así es como ingresamos a mundos abstractos y es en esos mundos abstractos donde hacemos matemáticas.

Ahora bien, ¿existe una especie de progresión en la que se avanza a través de niveles de abstracción? La respuesta es sí. En un sentido esquemático tendríamos los siguientes "pasos":

1. Ver una analogía entre cosas diferentes.
2. Especificar lo que consideramos como causante de la analogía.
3. Considerar esa cosa como un nuevo concepto, más abstracto, por derecho propio.
4. Familiarizarnos con esos nuevos conceptos abstractos y no pensar realmente en ellos como tan abstractos.
5. Ver una analogía entre algunos de esos nuevos conceptos.
6. Iterar. . . (p. 31).

Las analogías anteriormente mencionadas son, de hecho, patrones entre diferentes situaciones y/o contextos, que es de lo que también trata la teoría de categorías. Así, si "la teoría de categorías es las matemáticas de las matemáticas, entonces la estructura categorista[1]

[1] En esta expresión me baso en la traducción de Estrada González y Pallares Vega (2011) quienes señalan que "en inglés es muy común encontrar la expresión '*categorical*' para referirse a algo relativo a la teoría de categorías, con la excepción de Goldblatt y algunos pocos seguidores quienes usan '*categorial*'. En español se ha utilizado también 'categórico' como traducción de '*categorical*'. Utilizaremos el término 'categorista' y sus derivados porque 'categórico' ya tiene usos muy arraigados en lógica, matemática y filosofía (como en los trabajos de Aristóteles y en la investigación de la axiomática) y porque 'categorial' y sus derivados, sugeridos

(*categorical structure*) trata sobre patrones *en* patrones que utilizan un lenguaje formal, esto es, una notación o lenguaje específico orientado a expresar las tareas que estamos intentando hacer a través de conceptos abstractos. Pero ¿cómo se relacionan abstracción y formalismo en la teoría de categorías? Según Cheng:

1. Usando la idea de relaciones abstractas, y
2. Usando diagramas/flechas para las presentaciones formales de esa abstracción. (p. 81)

Si combinamos los dos puntos anteriores llegamos a una definición más completa: "la teoría de categorías se basa en la idea de relaciones" (p. 82), relaciones *a partir* de objetos y relaciones *entre* objetos. Según Cheng, "nuestros datos básicos en una categoría son *objetos* y *relaciones*" (p. 95). Para ser más precisos, ella divide esta definición en tres partes:

1. Datos: bloques de construcción básicos.
2. Estructura: cosas que podemos hacer con esos bloques de construcción.
3. Propiedades: reglas sobre cómo deben encajar esas cosas.

Las relaciones podrían ser cosas como "menor que" o "es la madre de", pero también podríamos relacionar cosas que no se parecen en nada; dentro de la teoría de categorías se usan *flechas* o *morfismos* para designar estas relaciones y se representan así: a $\to$ b; cada flecha en una categoría parte de un objeto y termina en un objeto. El objeto de inicio se llama *origen* (dominio) y el objeto final se llama *objetivo* (en la expresión de Cheng; codominio, en una expresión más general) (pp. 95–96). Lo interesante es que en la teoría de categorías no se está simplemente preguntando si dos objetos están o no relacionados, la pregunta es ¿de *qué manera* están relacionados esos objetos? La respuesta es: de ninguna o de infinitas maneras.

Si hacemos un breve resumen de lo dicho hasta aquí, podríamos decir que, en su núcleo, la teoría de categorías es la matemática de las estructuras y de las relaciones entre esas estructuras; que la totalidad de las estructuras matemáticas de un tipo dado puede considerarse

por Goldblatt (1984), aunque menos susceptibles de confusión que 'categórico' y sus derivados, también tienen un uso filosófico (en la fenomenología husserliana). Además, 'categorista' semeja a 'conjuntista'" (p. 133).

y estudiarse ya sea como una estructura matemática en sí misma o como relacionada con otras. La segunda mitad se adentra dentro de las matemáticas teóricas y de cómo son algunas partes de las matemáticas modernas. Vayamos a esa parte.

Hay tantas categorías como temas en particular: números y su relación entre ellos; animales y las interacciones entre ellos; síntomas y sus interacciones entre ellos, etc. Pero también hay diversas formas de pasar de una categoría a otra preservando su estructura. En la teoría de categorías, los objetos van a objetos, los morfismos a morfismos, pero lo que preserva la estructura de una categoría en otra categoría se llama funtor. De esto y más trata la tercera parte del libro de Cheng. La idea básica es que los funtores son mapas, una función sobre datos subyacentes que preservan la estructura o, mejor dicho, funciones que actúan sobre conjuntos de objetos y sobre cada conjunto de morfismos. Ahora bien, a medida que se entra dentro de la teoría de categorías, uno se percata de que el punto del marco de categorías es estudiar objetos en una categoría a través de sus relaciones con otros objetos, no a través de sus características intrínsecas. Así, la forma en que una categoría arbitraria se expresa parte de definiciones que se refieren a elementos de conjuntos, después se expresan usando sólo morfismos en una categoría, y luego se aplican inmediatamente en cualquier categoría que se desee.

Para Cheng, las categorías no ven por casualidad los objetos isomorfos como *iguales*, sino más bien que, orgánicamente, se parte desde raíces sólidas hasta principios matemáticos abstractos. En otras palabras, no se trata de realizar una prueba o demostración en el sentido clásico, es decir, avanzar progresivamente hasta llegar a una conclusión mediante la conexión de todos esos pasos. Una prueba verdaderamente categorista hace más que eso, ella descubre (de manera estructural) algún aspecto profundo de por qué algo está sucediendo. Lo que hace la teoría de categorías es forjar una habilidad, un tipo de "conciencia estructural".

Según Cheng, es por aquella razón que existe una dualidad en la teoría de categorías, pues trata, por un lado, de cambiar todas las "flechas" y, por otro lado, de hacerlo sin cambiar (realmente) la estructura de tal situación. Otro de los principios de la teoría de categorías es que, si algo es interesante, podemos pensar en otros de sus ejemplos, en los morfismos entre ellos, y reunir todo eso en una categoría. El resultado es que se han ensamblado categorías en una categoría utilizando funtores (como los morfismos), pero ahora podemos ensamblar los propios funtores en una categoría utilizando transformaciones naturales como los morfismos entre funtores.

Así, la idea general es que las categorías son equivalentes si son iguales, en un sentido apropiado. Las categorías son isomorfas si tienen exactamente la misma estructura de objeto y flecha, por lo que la única diferencia es que todo estaría renombrado. Considero que lo que Cheng quiere transmitirnos es que la teoría de categorías trata de entender las razones estructurales detrás de las cosas, no sólo construir justificaciones formales. Trabajar con la teoría de categorías generalmente implica categorías con tipos específicos de estructuras en ellas, como productos y coproductos, límites y colímites, dominios y codominios, y así sucesivamente.

Antes de terminar esta breve reseña, podríamos simplemente resumir esta introducción a la teoría de categorías viéndola como un proceso típico.

1. Vemos una estructura interesante en algún lugar.

2. Lo expresamos de manera categorista, es decir, utilizando sólo objetos y morfismos en alguna categoría relevante.

3. Buscamos esa estructura en otras categorías.

4. Lo usamos para demostrar cosas que serán inmediatamente ciertas en muchas categorías diferentes.

5. Investigamos cómo se transporta entre categorías a través de funtores.

6. Exploramos cómo generalizarlo.

7. Investigamos qué propiedades universales tiene.

8. Preguntamos si tiene generalizaciones a dimensiones superiores a través de categorificación.

El fundamento primordial de la teoría de categorías radica en la existencia de morfismos entre objetos, sin limitarse únicamente a los objetos en sí mismos. Esta noción permea toda la estructura de la teoría de categorías al siempre enfocarse en las relaciones entre estructuras en lugar de hacerlo en las estructuras individuales. De esta manera, podemos contemplar totalidades de un tipo específico de estructura y no simplemente un ejemplo aislado de la misma. En resumen, el libro de Cheng se asemeja a un viaje ascendente partiendo desde los conceptos más básicos de las matemáticas abstractas hasta alcanzar las cimas más técnicas.[2]

BIBLIOGRAFÍA

Estrada González, Luis, e Ivonne Victoria Pallares Vega, 2011, "La diferencia entre lógicas y el cambio de significado de las conectivas: Un enfoque categorista", *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science*, vol. 26, no. 2, pp. 133–154.

LUIS A. CANELA MORALES
CIIHu-UAEM
México
lcanelamorales@gmail.com
https://orcid.org/0000000237405234

[2] Este trabajo ha sido posible gracias al estipendio del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT), en el marco del programa de Estancias Posdoctorales por México (2023–1), llevado a cabo en el Centro Interdisciplinario de Investigación en Humanidades (CIIHu)-UAEM. Forma parte del proyecto de investigación titulado "Aportaciones y aspectos vinculantes entre la Teoría de Categorías y la Fenomenología husserliana", dirigido por la Dra. Ivonne Victoria Pallares Vega.