CRÍTICA. Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 57, No. 169 (abril 2025): 165–193

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1651

FORMAS, FIGURAS Y ESPACIOS: LOS FUNDAMENTOS DE LA(S) GEOMETRÍA(S)

José Ferreirós, y María de Paz (comps.), *La génesis de la geometría*, Plaza y Valdés Editores, Madrid, 2023, 362pp., ISBN 978–84–17121–70–9

Melisa Vivanco
University of Texas-Rio Grande Valley
USA
melisa.vivanco@utrgv.edu
https://orcid.org/0000-0001-9923-7208

1. *Sobre la compilación*

Las discusiones sobre los fundamentos de las matemáticas han encontrado en diferentes puntos de la historia de la filosofía una bifurcación en la que se encuentran, por un lado, la aritmética[1] y, por el otro, la geometría. Esta separación no es meramente arbitraria y así lo han demostrado los resultados filosóficos y matemáticos —por ejemplo, desde la teoría de modelos—. Entre las diversas razones por las que se considera que hay algo en esencia diferente entre la naturaleza de la aritmética y la de la geometría está la forma en la que el conocimiento de esta última parece estar enraizado en una idea de espacio. Esta idea de espacio a su vez parece ser totalmente desprendible del espacio físico —o de lo que intuimos que es el espacio físico—. En este contexto, el libro *La génesis de la geometría* recopila una serie de artículos que desde diversos ángulos analizan fenómenos en

[1] Un panorama sobre los fundamentos cognitivos, históricos y filosóficos de la aritmética se puede encontrar en el libro *El árbol de los números* (Ferreirós Domínguez y Lassalle Casanave 2016). Dicha obra contiene aproximaciones en el campo de la aritmética que se corresponden con cuestiones aquí presentadas en el dominio de la geometría. La lectura de ambos libros permite realizar un análisis comparativo que fomenta una comprensión más amplia de los aspectos filosóficos e históricos de los fundamentos (orígenes) del conocimiento matemático. Véase Vivanco 2019 para el estudio crítico correspondiente.

el campo de la geometría, así como nuestras actitudes epistémicas concernientes a los contenidos de la(s) geometría(s) y su relación con lo que sería el espacio (o los espacios).

Se puede hablar de la génesis de la geometría —considerando su relación con el espacio— desde diferentes ángulos. Por ejemplo, desde las ciencias cognitivas, rastreando los orígenes de lo que identificamos como cognición geométrica, la cual se puede abordar desde el desarrollo de una persona o desde los procesos evolutivos de la raza humana. En las partes primera y segunda de *La génesis de la geometría* se desarrollan diversas aproximaciones en este sentido. Otra forma de estudiar la génesis de la geometría es hacer un análisis filosófico en donde se cuestiona a la geometría en tanto que objeto de estudio y la forma en la que nos aproximamos a él no solo a través de la mera cognición, sino de las complejas prácticas científicas y matemáticas a lo largo de la historia. Desde este enfoque se retan preconcepciones que a menudo pasan desapercibidas en la práctica científica y matemática. Así, cabe preguntarnos cuáles son las bases y las consecuencias de la adopción de ciertos compromisos ontológicos y principios epistémicos. Podemos cuestionar, por ejemplo, la creencia de que la geometría hiperbólica es más correcta o fundamental que la geometría euclidiana. Esta creencia suele fundarse en el hecho de que la primera se corresponde con teorías físicas que actualmente gozan de mayor aceptación que aquéllas cuyas descripciones se construyen con geometría euclidiana. Lo cierto es que esta inferencia recae en una serie de suposiciones con respecto a la realidad y a lo que entendemos por verdad científica que darían para una cantidad interminable de debates. Las verdades geométricas están irremediablemente ligadas a las prácticas, y como se muestra en las dos primeras partes del libro, abundan los ejemplos de que, desde sus propias perspectivas culturales y metodológicas, diferentes grupos sociales han visto en el mismo objeto o en las mismas representaciones lo que desde nuestra perspectiva catalogaríamos como una mera forma, en oposición a lo que sería una figura. La geometría no escapa a las revoluciones científicas (Kuhn 1962) ni directa, ni indirectamente. Es decir, como efecto secundario del impacto de estas revoluciones en la ciencia empírica.

Vale la pena concluir diciendo que si bien es ampliamente compartida la idea de que el surgimiento de teorías consistentes donde no se satisface el quinto postulado de Euclides desempeña un papel determinante en la llamada crisis de los fundamentos de las matemáticas —y en las mencionadas revoluciones científicas—, el conocimiento

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1651

de *cómo* fue ese papel no es tan amplio. En este sentido, *La génesis de la geometría* pone al descubierto los componentes históricos, filosóficos, científicos y matemáticos que vinculan los *Elementos* con el surgimiento de nuevas metodologías —paradigmáticamente representadas en el trabajo de Hilbert— y de nuevas geometrías; así como de ideas revolucionarias sobre la verdad y el conocimiento científico y matemático.

En este estudio crítico reseñaré y comentaré cada uno de los artículos compilados en el libro. En algunos casos le dedicaré más espacio a resumir lo que interpreto que quiere decir la autora o el autor y en otros desarrollaré mayormente mis propias perspectivas, ya sea para reforzar la tesis central del trabajo o para señalar cuestiones con las que puedo no estar parcial o totalmente de acuerdo.

2. *Parte I. De la cognición básica a la protogeometría*

La primera parte del libro está enfocada en los fundamentos cognitivos de la geometría. Una cuestión interesante que se va revelando a lo largo de esta sección es la de los sentidos en los que podemos hablar de fundamentos en cuanto a la cognición de aquellos contenidos que comúnmente identificamos como geométricos. De esta manera surgen las aproximaciones que identifican a los fundamentos con los orígenes (la génesis) de la cognición geométrica. Dentro de este marco caben al menos dos direcciones de análisis: una de ellas conduciría la cuestión hacia el ser humano como especie. Es decir, hacia la pregunta del origen y evolución de las capacidades cognitivas humanas relacionadas con la geometría, por ejemplo, aquéllas que posibilitan interacciones cada vez más complejas y refinadas con el espacio físico. La segunda dirección conduciría a analizar estos orígenes en el proceso del desarrollo cognitivo de cada individuo. Así, se plantean cuestiones interesantes como el surgimiento de las primeras nociones geométricas en la infancia temprana o el desarrollo de capacidades mentales como la abstracción y generalización, necesarias para la adquisición de conceptos geométricos más complejos. En esta línea, los trabajos comentados a continuación muestran distintos elementos que se integran entre sí, como las intuiciones espaciales y la habilidad de utilizar representaciones como figuras y diagramas.

2.1. Fuentes cognitivas del conocimiento geométrico [José Ferreirós]

Con el fin de defender una categorización del conocimiento geométrico en los tres niveles que serán propuestos en este artículo, José

Ferreirós presenta una aproximación histórica que relaciona elementos cognitivos, filosóficos y sociales relacionados con la adquisición, asimilación y desarrollo de lo que hoy consideramos conocimiento geométrico. Un aspecto (con el que concuerdo ampliamente) señalado como clave de nuestras relaciones epistémicas con la geometría es nuestra concepción del espacio. Esta concepción, en contraste con la aritmética o el álgebra, determina las actitudes epistémicas que mostramos hacia los enunciados de la geometría.

La importancia de la concepción del espacio es relevante para diferenciar el tema en cuestión (*subject matter*) de la geometría, y en esta medida, para realizar las consideraciones epistemológicas pertinentes. El espacio, a pesar de ser un concepto abstracto, es un concepto extramatemático, que parece gozar de cierta fundamentalidad e inseparabilidad tanto en contextos matemáticos cuanto en contextos no matemáticos. Esta inseparabilidad entre un concepto extramatemático (y extralógico) y la geometría, así como nuestro entendimiento de ella, da lugar al análisis de los procesos cognitivos e histórico-matemáticos que sustentan la evolución del conocimiento geométrico.

El punto de partida es el rechazo de la idea de que el conocimiento geométrico está basado en ideas innatas y universales. Como ya lo mencioné el espacio es una noción muy amplia que intuitivamente es inseparable de la geometría, y en esta medida, la concepción del espacio es inseparable del conocimiento geométrico. Aun si lo único que requiere la geometría es la existencia de un espacio abstracto, lo cierto es que una vez que un ser humano ha nacido (y quizá desde antes), su concepción del espacio queda determinada por sus relaciones con un espacio particular: el espacio físico. De ahí que las actitudes epistémicas hacia las oraciones de geometría terminen conectadas de algún modo con espacio físico, que determina nuestra intuición espacial. En este sentido, José Ferreirós hace importantes esfuerzos por destacar la importancia de entender al espacio concebido como el resultado de las interacciones entre los agentes cognitivos y su entorno, más que como algo estático y bien delimitado.

A lo largo de la exposición, Ferreirós presenta ejemplos históricos que ilustran la evolución de las concepciones geométricas y los recursos para representarlas. Estos ejemplos son acompañados por datos extraídos de diversos estudios neurocientíficos que revelan aspectos de los distintos niveles de cognición geométrica. A partir de estos datos, el autor concluye que la elaboración cognitiva de la geometría se divide en tres niveles (p. 36):

1. La cognición básica visuoespacial: caracterizada por las experiencias físicas y prácticas de los sujetos.
2. La protogeometría: un estado en el que se emplean representaciones externas y se acuñan categorías que especifican formas.
3. Conocimiento geométrico: el estudio preciso de las propiedades de las formas especificadas en el nivel anterior.

Para concluir, Ferreirós *mapea* los elementos que ha considerado desde la cognición y la historia, añade elementos nuevos, y muestra cómo éstos sustentan la clasificación propuesta. El panorama proporcionado es ampliamente ilustrativo en tanto que disecciona elementos que claramente desempeñan un papel relevante en el desarrollo y asimilación del conocimiento geométrico. Desde una perspectiva más filosófica, como suele ocurrir en trabajos con estas metodologías, es difícil no percibir un elemento de arbitrariedad respecto a la selección y uso de datos empíricos y, por lo tanto, a las licencias interpretativas inherentes. La combinación de los datos históricos, las reflexiones filosóficas y los resultados científicos genera un auténtico interés interdisciplinar, que de manera inevitable tiene un costo reflejado en el reto de articular una variedad de elementos, cuyas conexiones no parecen inmediatas. Por ejemplo, la lectora puede preguntarse cuál es el proceso de desarrollo del conocimiento geométrico del que se está hablando. ¿Es un proceso a nivel civilización? ¿Es un proceso a nivel individuo? Se entiende que ambos procesos forman parte de un mismo fenómeno epistémico. Sin embargo, la complejidad de las cuestiones y la abundancia de datos dejan una brecha explicativa entre los procesos de desarrollo a nivel individual, a nivel colectivo y a nivel especie.

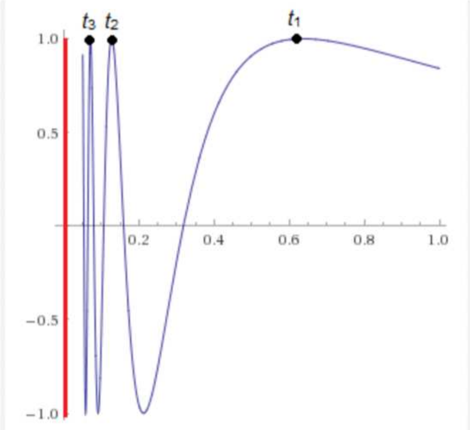
2.2. Somos “seres espaciales”? Razonamiento y espacialidad [Valeria Giardino]

Siguiendo la línea del trabajo anterior, Valeria Giardino propone una clasificación no jerárquica (en contraste con la propuesta de Ferreirós) de diversos elementos que constituirían parte del fenómeno de cognición de la geometría. En este caso el enfoque está más concentrado en la cuestión del espacio, explorando cómo las experiencias relacionadas con éste y los recursos de representación involucrados dan lugar al razonamiento geométrico y, a su vez, a la cognición de los fenómenos propios de la geometría. En palabras de la autora, el objetivo del trabajo es brindar elementos que aporten luz a la cuestión de *en qué* *medida los seres humanos somos seres espaciales desde un punto de vista cognitivo.*

Para lograr tal propósito, Giardino tiene que establecer un marco teórico a partir del cual desarrollar sus hipótesis relativas a la cognición. Si bien esta parte no es constitutiva de la teoría cognitiva propuesta, creo que vale la pena detenerse a discutir un par de presuposiciones, que serán cuanto menos controversiales, y que sientan las bases filosóficas y matemáticas sobre las cuales se construye la teoría en cuestión. En primer lugar, la autora describe a las matemáticas como "una actividad cognitiva de forma paradigmática, porque plantean investigaciones más generales sobre la capacidad humana de representar" (p. 51). Desafortunadamente no se nos explica qué es lo que se representa mediante esta "actividad cognitiva", ni cómo se representa. Lo más cercano a esta segunda cuestión es que "Esta capacidad va evidentemente más allá y es quizá más básica que el poder que atribuimos al lenguaje". La clarificación de estas cuestiones sería de gran ayuda para comprender, dentro del análisis de la cognición de este *ser espacial*, qué aspectos corresponden al campo de la matemática y, en concreto, al de la geometría.

Mi segunda y más contundente preocupación tiene que ver con la interpretación realizada por la autora de la topología como un caso de estudio en el que la concepción espacial sería revelada por las relaciones entre la disciplina formal y ciertas intuiciones que involucran el espacio (pegar, ver, aparecer, construir, etc.). El problema es que esta concepción—que pretende ilustrar la base de la teoría en juego—ha sido permeada por importantes imprecisiones. Para comenzar, Giardiano presenta la topología de la siguiente manera: "Evidentemente, la topología es una rama particular de la geometría, que se interesa por las propiedades del espacio que permanecen inalterables cuando se aplican deformaciones continuas en las que no se realizan cortes ni rasgaduras" (p. 53). Esta definición es inadecuada por distintas razones. En primer lugar, la topología no es una rama de la geometría. Si se quiere encontrar una relación entre estas dos, es más adecuado decir que la topología es una generalización de la geometría o, de manera más apropiada, que la topología generaliza la noción de espacio geométrico, así como las nociones relacionadas, por ejemplo, la misma noción de continuidad, que si bien suele describirse para un público general en los términos usados por Giardino, tiene una definición conjuntista, que escapa a limitaciones geométricas como la métrica y la continuidad espacial citadas por la autora. Por ejemplo, si consideramos la región del plano determinada por las coordenadas $\left(x, sen\frac{1}{x}\right)$ con $x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right]$ y las coordenadas (x, y) con $x = 0$ y

$y \in [-1, 1]$, obtenemos un espacio que es conexo, pero que intuitivamente parece *roto* o separado (pues la gráfica de $sen\frac{1}{x}$ se aproxima asintóticamente, pero nunca *toca* al eje x, que también forma parte de este espacio en su intervalo $[-1, 1]$).



Cerradura topológica de la gráfica de la función $sen\frac{1}{x}$. Este espacio es conexo, pero no conexo por trayectorias.

Si bien podrían proporcionarse más ejemplos de espacios topológicos que desafían el punto de partida —el cono sobre el conjunto de Cantor es otro de ellos— de esta teoría, en cuanto a la articulación que ofrece entre la concepción espacial, las intuiciones geométricas y los conceptos matemáticos formales, creo que es más ilustrativo citar la clásica obra de Lakatos (1976), *Proofs and Refutations*. En este libro, Lakatos muestra a la topología como una evolución y generalización de la geometría clásica. Según Lakatos, esta transición refleja un cambio de centrarse en estructuras y figuras rígidas, típicas de la geometría euclidiana, hacia el estudio de propiedades y relaciones más abstractas y flexibles, que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas (en un sentido de continuidad cada vez más abstracto, a raíz de ejemplos como los antes mencionados). Las nociones cada vez más abstractas de conceptos como *continuidad* y *conexión* se convierte en una herramienta poderosa que expande y enriquece nuestra comprensión de lo que constituye la *forma*, al margen de las restricciones geométricas específicas y las dependencias del contexto clásico de la geometría.

En conclusión, si bien podemos estar de acuerdo con la tesis más general, de que la espacialidad es importante para nuestra manera de representar, de razonar y de estructurar nuestros pensamientos, habría que precisar sobre la naturaleza de estas relaciones. Parece bastante intuitivo que nuestras nociones espaciales gocen de prioridad temporal en nuestra cognición —ya sea a nivel evolución o a nivel desarrollo de una persona—. Incluso se podría defender que algunas de estas capacidades son condición de posibilidad para los procesos más sofisticados del razonamiento matemático o geométrico. Sin embargo, parece más difícil aceptar que las intuiciones espaciales tienen un papel fundamental, en el sentido más fuerte que parece querer defender la autora. Las matemáticas formales, incluida la geometría y la topología, históricamente han conducido al abandono de nuestras intuiciones espaciales más inmediatas justamente para liberarnos de las limitaciones que sistemas como la percepción imponen a nuestro acceso a la compleja realidad.

2.3. Los orígenes prehistóricos del conocimiento geométrico [Manuel J. García-Pérez]

En este tercer artículo dedicado a los fundamentos cognitivos de la geometría, Manuel J. García-Pérez desarrolla un análisis, en el marco temporal de la prehistoria, para determinar los comportamientos y habilidades cognitivas asociados a lo que hoy entendemos como geometría. La idea es encontrar elementos de naturaleza geométrica que desempeñen un papel similar al de recursos lingüísticos como la escritura en la transición del ser humano como sujeto epistémico desde la prehistoria hacia la historia. En palabras del autor, la cuestión es dilucidar el momento de la historia en el que podemos encontrar registros que evidencien la existencia de *conocimiento matemático* anterior al que encontramos codificado en los tratados matemáticos más antiguos que conocemos (p. 69).

Desde la perspectiva filosófica una dificultad para el autor a lo largo del texto es que no hay suficiente claridad respecto al contenido de conceptos clave como *conocimiento matemático*, *geometría* o *protogeometría*. Por un lado, parece que el sentido de estos conceptos desempeña un papel importante en determinar la diferencia entre historia y prehistoria. Este papel sería similar al que desempeña la escritura en dicha distinción. Si ésta es la dirección pretendida por el autor, es importante considerar una potencial consecuencia que podría tener implicaciones de contenido y metodológicas para otras disciplinas. A saber, que la división entre prehistoria e historia sería relativa a campos de conocimiento particulares. Tendríamos entonces una prehistoria matemática y *otra prehistoria* etiquetada como lingüística, antropológica, o con referencia a alguna otra disciplina. De hecho, una vez abierta esta posibilidad, podríamos llegar a la conclusión de que hay una prehistoria geométrica, otra prehistoria aritmética, otra prehistoria lógica, etcétera. La pregunta natural es cuál es la regla general para distinguir en cada disciplina entre sus prehistorias y sus historias.

La segunda opción, que parece más probable pero no menos problemática desde la perspectiva del análisis conceptual, es la de utilizar categorizaciones antropológicas, que se tendrían que dar por sentadas, para delimitar el significado de "geometría". En este sentido, valdría la pena recordar las razones por las que los intentos de establecer criterios de demarcación para las prácticas científicas han fracasado sistemáticamente. Para enfocarnos en el caso que nos ocupa aquí, consideremos los distintos recursos a los que se apela con la aparente finalidad de caracterizar la geometría en términos de la distinción entre historia y prehistoria. En la primera etapa del trabajo, García-Pérez sienta el marco de discusión introduciendo elementos como la cultura material-visual de las sociedades prehistóricas, ilustrada por herramientas líticas, útiles y prácticas, rituales, etc. (p. 70). El autor nos advierte que el fenómeno en cuestión requiere de una aproximación compleja compuesta por herramientas teóricas de disciplinas diversas —algunas de ellas, muy recientes— como la arqueología cognitiva, la paleoneurobiología, etnografía, antropología, filosofía, etc. Una vez asentado este panorama, el autor va eligiendo una serie de elementos que irían definiendo la demarcación que mencioné anteriormente. Por ejemplo, al citar a Struik (1987), García-Pérez apela a la distinción entre *formas* o *relaciones espaciales* y *figuras, elementos* o *relaciones geométricas* (p. 71) como una diferencia reveladora de estas etapas que el autor busca clasificar. La cuestión es que no se ofrece ningún argumento que sustente que esos primeros conceptos son más primitivos que los segundos, y dar por hecho que hay una prioridad lógica o epistémica entre formas y figuras, por ejemplo, es suponer lo que se quiere probar. Si bien es cierto que todas las figuras tienen forma, y no viceversa, la noción de forma es muy general, ¿en qué momento una forma pasa a ser una figura? ¿Cuáles son los elementos que determinan que unas formas sean figuras y otras no? Las respuestas a estas preguntas proporcionarían los elementos de caracterización que demarcarían lo que es geometría, discriminando cosas como la mencionada protogeometría o los orígenes —no geométricos— de la geometría. Sin embargo, es altamente probable que surgieran contraejemplos refutando la demarcación resultante.

Una última preocupación filosófica que quiero comentar es el uso que se hace de los términos “geometría” y “protogeometría”, tanto en las partes en las que se les usa como dispositivos para evaluar un proceso antropológico cognitivo, como en las partes en las que el contenido de dichos términos es el objeto mismo de la evaluación (determinando hasta qué punto es geometría o protogeometría aquello que está siendo conocido). Por un lado, el autor utiliza una variedad de interesantes ejemplos para mostrar que hay un error categorial en la pregunta misma de si algo cuenta como geometría. García-Pérez nos señala que nuestro uso de “geometría” está fuertemente constreñido por nuestras culturas y prácticas, por lo que las preguntas sobre la geometría de tiempos muy remotos o culturas muy lejanas están sesgadas y resultan inadecuadas —debido a la carga teórica de la observación (Hanson 1958), entre otras cosas—. Sin embargo, ya hacia el final del artículo el autor señala: “argumentamos que no existió en la prehistoria ningún tipo de actividad o herramienta que evidencie la posesión de conocimiento protogeométrico ni geométrico” (p. 88). Vale la pena señalar la diferencia en compromisos ontológicos y principios epistémicos entre el hecho de que la pregunta de *si había conocimiento geométrico en la prehistoria* tenga una respuesta negativa y el hecho de que sea inadecuada en virtud de los sesgos inminentes.

Una explicación respecto a las preocupaciones filosóficas que he comentado es que, probablemente, García-Pérez utiliza el término “geometría” algunas veces para referirse a la práctica, y otras veces para referirse al objeto de estudio. De ser así, la precisión de cuándo se está haciendo cada uno de estos usos sería esclarecedora.

Punto y aparte de las consideraciones metodológicas y otras cuestiones propias de la ontología y epistemología de las matemáticas, esta investigación sobre los orígenes prehistóricos del conocimiento geométrico es por demás interesante e ilustrativa de un proceso antropológico que, si bien puede generar ciertas resistencias dentro del aparato teórico del análisis conceptual propio de la filosofía analítica tradicional, nos abre una ventana a procesos milenarios del desarrollo humano que han devenido en lo que hoy consideramos un nicho de éxito del conocimiento humano: la práctica matemática, incluida la geometría.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1651

3. *Parte II. Escenas del desarrollo de la geometría*

Esta sección se sigue de manera muy natural de la primera parte del libro, en particular, si nos enfocamos en una idea que fue recurrente. A saber, que la geometría tiene una naturaleza dinámica que está determinada, o al menos representada, por nuestras interacciones empíricas e intelectuales. Es decir, que en el corazón de la geometría habitarían múltiples relaciones espaciales (en un sentido muy general de *espacio*) y conceptuales. De haber este dinamismo profundamente arraigado a la geometría, es de esperar que sea revelado (o incluso, constituido) por las prácticas características de la ciencia y la matemática. De este modo, los trabajos presentados en esta sección ponen de manifiesto consideraciones hechas previamente respecto a la geometría a través de la práctica en las ciencias empíricas y en la matemática misma. Así, analizando las prácticas, desde aquellas científicas como la astronomía y la mecánica, hasta las más abstractas como la producción de diagramas y la demostración de teoremas, junto con la construcción de sistemas en los que éstos se enuncian y demuestran, los ejemplos desarrollados en esta sección conducen a cuestiones interesantes sobre el origen y la verdad de los enunciados de la geometría.

3.1. Geometría y astronomía en el mundo griego: una alianza incompleta [Javier Ordoñez y Ana Rioja]

Este artículo presenta un análisis que recorre en paralelo algunos puntos clave en la historia de la geometría y la astronomía. Ordoñez y Rioja conjuntan estos puntos, articulando un sólido y, a mi parecer, convincente argumento de que no sólo la geometría desempeñó un papel central en el desarrollo de la astronomía, sino que la geometría a su vez proliferó en gran medida gracias a la astronomía. Este señalamiento es de gran relevancia no sólo en lo que respecta a la geometría, sino también a la matemática misma, pues como se señala en el texto, muchas personas consideramos a la geometría como la primera disciplina matemática de la naturaleza.

Los ejemplos presentados a lo largo del artículo ilustran magníficamente la forma en la que las curiosidades astronómicas y los enigmas que se iban presentando producto de las observaciones daban paso a ideas geométricas cada vez más complejas y sofisticadas. Como punto de partida, podemos considerar la tradición griega de representar dichas observaciones mediante el círculo y la esfera, considerando solo movimientos uniformes. Con una variedad de ejemplos pertinentes, Ordoñez y Rioja muestran cómo el razonamiento geométrico se iba refinando ante retos astronómicos como capturar, por un lado, el tipo de movimiento observado en la Luna y el Sol, por otro, el tipo de movimiento observado en las estrellas, y, por último, el tipo de movimiento observado en los planetas; cada uno de éstos caracterizados por distintas velocidades y periodicidades. Como un elemento adicional, el artículo muestra cómo se van integrando también elementos de otras culturas y otras disciplinas: "Así, Hiparco importó por primera vez métodos usados por los babilonios, que eran cercanos a los trigonométricos, los cuales eran fundamentales para fijar con precisión la posición, tanto de las estrellas fijas como de los planetas, Sol y Luna" (p. 116).

Para concluir, quisiera señalar que la idea de que la física y la matemática influyen entre sí, siendo esta interacción un propulsor del desarrollo de estas disciplinas, encuentra respaldo en otras tesis de gran relevancia en filosofía de la ciencia. Por ejemplo, la tesis del holismo de Quine (1951) sostiene que las proposiciones empíricas y matemáticas no se pueden verificar de manera aislada, sino que deben considerarse dentro del marco de una teoría completa. Desde esta perspectiva, la confirmación o refutación de una proposición implica el conjunto entero del sistema de nuestras creencias y teorías, y no simplemente una proposición o un grupo de proposiciones en particular. El artículo aquí discutido provee elementos históricos y empíricos que respaldan esta famosa tesis en lo que respecta a la astronomía y a la geometría.

3.2. Releyendo a Euclides: un papel para las Nociones Comunes 4 y 5 [Abel Lassalle Casanave y José Seoane]

Muchas personas coincidiremos en que el estudio profundo de la práctica matemática, especialmente de la relativa a la geometría, pasa por ubicar partes de sus orígenes en el legado teórico y metodológico de Euclides. En este sentido, Abel Lassalle y José Seoane analizan el papel de los diagramas en las soluciones de problemas y demostraciones de teoremas en los primeros cuatro libros de los *Elementos*. La tesis central defendida por los autores es que en la *producción* del diagrama hay elementos fundamentales de la demostración del teorema o de la solución del problema en cuestión. Cabe resaltar que dicho proceso está especialmente vinculado con los tres primeros postulados, referidos como *de construcción* (p. 132). A lo largo del trabajo, los autores argumentan y explican, mediante el uso de ejemplos clásicos, cómo las Nociones Comunes 4 y 5 (NC4 y NC5):

4 "Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí."

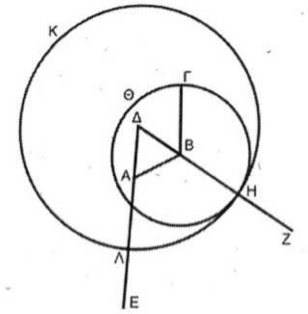
5 "Y el todo es mayor que la parte."

posibilitan el papel esencial de la producción de diagramas en la corrección de la solución de un problema y/o en la verdad de un teorema. Esto es en parte revelado por el vocabulario diagramático presente en estas nociones. A saber, "coinciden", "parte" y "todo", que se distinguen del vocabulario teórico como "iguales" o "mayor". De esta manera, Lassalle y Seoane hacen un análisis de las soluciones y demostraciones de Euclides, partiendo de una disección en tres etapas: la exhibición o exposición (entrada diagramática inicial); la construcción, que consiste en las entradas diagramáticas subsecuentes, si las hubiera; y el argumento que es dado en favor de que la resolución de un problema es correcta o que el teorema es verdadero (p. 133).

La contribución de este trabajo coincide con la idea que presenta José Ferreirós en la primera parte del libro (compartida por muchas otras personas) de que en las entrañas de la geometría hay algo dinámico no sólo en un sentido relativo a nuestra aproximación a ella. Así, la función de la producción de diagramas no es meramente psicotécnica, las interacciones y el *movimiento* que implican están en el núcleo de la verdad misma de la proposición. Como consecuencia, el uso de los diagramas resultantes no debe ser interpretado como un defecto en las demostraciones de Euclides. Asimismo, los diagramas no deben de ser interpretados como compañeros superfluos o indeseables de las proposiciones de los *Elementos*.

Debo aclarar que Lassalle y Seoane argumentan de manera muy rigurosa en favor de la importancia de la producción de diagramas para la demostración de teoremas y la solución de problemas. La tesis más fuerte, que sostiene que la producción de diagramas es parte del contenido de la proposición, requiere de presuposiciones metafísicas mayores con respecto a la demostración/solución de un teorema/problema. De hecho, los autores tienen muy presente el problema crucial de determinar un criterio para saber cuándo podemos usar o no el diagrama (p. 136). Los autores tampoco hacen alusión alguna al movimiento. Aunque sí tratan la producción de diagramas como un proceso, y como tal, éste implica un cambio. Desde mi perspectiva, pienso que incluso se podría ir un poco más lejos, asociando un elemento temporal —o al menos secuencial— a la producción de diagramas como parte crucial de las demostraciones/soluciones. Considere el siguiente ejemplo ofrecido por los autores al presentar un problema y su solución: "poner en un punto dado (como extremo) un segmento igual a un segmento dado (Figura 2)".

Términos como “inicial” o “dado” invocan un sentido secuencial que, si bien no queda respaldado por las Nociones Comunes, tampoco parece en principio fácilmente eliminable. Veamos el diagrama ofrecido por los autores:



Como podemos observar, debido a que el enunciado del problema no contiene los símbolos para referir a cada parte del diagrama, hemos perdido el proceso de producción, y con esto, su contribución a la solución. Bajo la lupa del presente análisis, la vinculación entre la proposición y el diagrama que da lugar a la solución es a través del proceso de producción, capturado mediante el uso de etiquetas para describir la secuencia en la que se debe producir el diagrama. Esto muestra que, efectivamente, hay un elemento secuencial en juego.

En conclusión, este trabajo contribuye al carácter del libro desde el que se motiva la idea de que los espacios particulares —en este caso, el euclidiano— y las formas en las que son ocupados —en este caso, en parte mediante la producción de diagramas— son lo que le da sentido a *la geometría*, resistiendo a la aspiración hilbertiana, tan popular hace algunas décadas, de una matemática depurada de entes sospechosos de no alcanzar los más altos estándares de abstracción.

3.3. Demostraciones euclidianas con diagramas: sus bases cognitivas [Tamires Dal Magro y Manuel J. García-Pérez]

Continuando con la tarea de defender las pruebas desarrolladas en los *Elementos* ante las acusaciones de no rigurosidad, y en particular, el uso de diagramas ante la queja de falta de genuina justificación matemática, Tamires Dal Magro y Manuel J. García-Pérez presentan un artículo que integra elementos desde diferentes disciplinas, reivindicando el uso de diagramas, haciendo énfasis en la aproximación desde las ciencias cognitivas. Así, el presente trabajo formaría parte del estudio de los fundamentos cognitivos de la geometría euclidiana.

La propuesta parte de la distinción atribuida a Kenneth Manders entre *aspectos exactos* (cuantitativos: precisos, métricos, etcétera.) y *aspectos coexactos* (no cuantitativos: relaciones de parte y todo, intersecciones, relaciones de interioridad y exterioridad, etcétera.) en la información diagramática. El/la lector/a recordará que en la sección anterior se señaló la importancia de la cuestión de determinar cuándo se puede usar o no un diagrama. Este paso es ineludible para mostrarle a un/a abstraccionista radical que el reconocimiento de los diagramas como parte legítima de las demostraciones en los *Elementos* no conduce necesariamente a un barranco de subjetividad de la práctica matemática en cuestión.

La estrategia de Dal Magro y García-Pérez consiste en mostrar que ciertos resultados relevantes en ciencias cognitivas respaldan la tesis de Manders, que establece que *los diagramas son fiables en relación con los aspectos coexactos, ya que respecto a éstos es posible que haya estabilidad en nuestros juicios diagramáticos*, determinando así ciertas condiciones para la aceptabilidad de elementos diagramáticos. De este modo, algunas observaciones como la capacidad de reconocer aspectos diagramáticos coexactos mediante la cognición visuoespacial aportarían indicios empíricos para fundamentar cognitivamente la tesis de Manders.

Entre otras cosas, el artículo aporta al proyecto general del libro un buen panorama del área de la cognición geométrica, donde se estudia y analiza nuestra percepción, codificación y razonamiento de fenómenos espaciales, mostrando cómo estos aspectos se relacionan con el desarrollo de objetos o conceptos geométricos. Desde este marco los autores dan un amplio sentido a la pregunta de cuáles son las posibles bases cognitivas del conocimiento geométrico euclidiano y su contribución a la ya mencionada tesis de Manders.

3.4. Geometría del movimiento: de la Grecia antigua a Newton [Mario Bacelar Valente]

En esta extraordinaria narración que va de los *Elementos* de Euclides a los *Principia* de Newton (pasando por los *Fenómenos*, *Sobre la esfera en movimiento*, *Sobre las espirales*, *Discorsi e dimostrazioni matematichi intorno à due nuove scienze*, *De motu locali*, además de otros trabajos previos de Newton), Mario Bacelar Valente describe el cálculo como el resultado del desarrollo histórico de la geometría del movimiento. La idea es que conforme la física y la matemática se iban desarrollando, más dinámica resultaba la geometría; por ejemplo, a partir de la incorporación de magnitudes como el tiempo y la distancia en las teorías de Galileo. Los razonamientos surgidos de relaciones matemáticas entre magnitudes (o sus representaciones) dieron lugar a una teoría geométrica del movimiento.

Vale la pena señalar que la explicación de Bacelar Valente no se reduce a que el cálculo —o la(s) geometría(s) del movimiento— es una herramienta matemática cuya aportación es introducir recursos para representar el movimiento físico. Haciendo el contraste con usos heurísticos del movimiento, por ejemplo, en el trabajo de Galileo, el autor muestra que el movimiento es algo más que un aspecto representado o abstraído dentro de las teorías. El movimiento es parte de las entrañas de la matemática del mismo modo que lo es la geometría. El mejor ejemplo de esto es el concepto de límite, introducido por Newton en términos de magnitudes (cantidades) variables. Cualquier persona que haya desarrollado cierta familiaridad con este concepto lo asociará con nociones de movimiento (o al menos de cambio) como *aproximación* o *continuidad*: si la aceleración de un objeto en movimiento puede ser capturada por la derivada de una curva es porque el movimiento mismo está en la naturaleza de la derivada, de la curva y del contexto en el que éstas existen.

Una objeción menor a este trabajo es que el autor presenta la geometría de Newton como la culminación del desarrollo de una geometría *distinta a la geometría* "*estática*" de los *Elementos*. En este sentido, siguiendo las ideas presentadas en las secciones 2.1 y 3.2 en las que Ferreirós por un lado, y Lassalle Casanave y Seoane por otro, argumentan en favor de una naturaleza dinámica de la geometría —en particular, de la geometría euclidiana de los *Elementos*—, me parece pertinente decir que la geometría del movimiento de Newton va más allá no por ser distinta en esencia con respecto al movimiento, sino por evolucionar el movimiento que ya estaba presente en los *Elementos*. Dicho movimiento puede verse, por ejemplo, en la contribución fundamental de la producción del diagrama en los *Elementos* (Lassalle Casanave y Seoane, p. 135).

La geometría del movimiento de Newton descrita por el autor puede sintetizarse de manera muy general en dos puntos (p. 200): 1. La continuidad y 2. Las relaciones entre cantidades que "entran" y "salen" (nacientes y evanescentes). Siguiendo este razonamiento, yo añadiría que la geometría de los *Elementos* puede verse no como una geometría estática, sino como una geometría temprana del movimiento en la que 1. El movimiento no es continuo sino discreto (por "pasos" en la producción del diagrama) y 2. Sólo hay magnitudes nacientes —interpretando de manera muy general "magnitudes" como los segmentos de recta, y circunferencias—, que aparecen conforme se produce el diagrama, pero no hay magnitudes evanescentes.

Para concluir, quisiera agregar que la geometría del movimiento no termina en Newton. Al igual que en sus instancias físicas, el movimiento matemático se presenta en modos muy diversos. Un siguiente paso natural podría ser el análisis del contexto vectorial que si bien, a primera vista, parece incrementar el grado de abstracción de los conceptos físicos, también incorpora una geometría del movimiento. Considere, por ejemplo, la multiplicación de números complejos en su forma polar. En la aproximación vectorial esta operación se da en términos de movimientos circulares en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. De hecho, no es difícil ver que las nociones de *magnitud* y *sentido*, fundamentales en el álgebra vectorial, dan paso a nuevas dimensiones de la geometría del movimiento que hoy podemos ver, por ejemplo, cuando estudiamos los números complejos.

3.5. La nueva geometría axiomática: Hilbert [Eduardo N. Giovannini]

Nadie con seriedad negaría que la contribución de Hilbert a la matemática, así como a su filosofía y a su lógica, es altamente sustantiva, siendo ésta el punto de partida de uno de los cambios de paradigma más revolucionarios en la práctica matemática de nuestros tiempos. Esta cuestión tiene varios puntos clave en el libro de Hilbert de 1899, *Fundamentos de la geometría,* trabajo en el que se enfoca Eduardo N. Giovannini con el objetivo de revisar el contenido matemático original desde una perspectiva accesible para un público no especializado. En este sentido, cabe señalar que Giovannini hace una excelente labor explicando detalladamente los elementos más relevantes del trabajo en cuestión. Así, nociones complejas como *lenguaje formal* o *traducción sintáctica* son esclarecidas de tal manera que el/la lector/a puede darse una idea bien formada sobre las profundas cuestiones filosóficas que están en juego.

Como ya dije, la idea de que *Fundamentos de la geometría* representa una importante contribución académica e intelectual no es controvertida. Lo que sí ha conducido a mayores discusiones entre matemáticos, pero sobre todo entre filósofos, es la cuestión de la naturaleza de dicha contribución. Haciendo una sobresimplificación en pro del argumento, podemos dividir el debate en dos posturas. Por un lado están quienes defenderían que la contribución de este trabajo es meramente, o al menos primordialmente, metodológica. Esto sería, por ejemplo, en contraste con otros trabajos de Hilbert cuyos contenidos —claramente matemáticos— eran desconocidos hasta entonces: resultados dentro de la teoría de invariantes, la teoría de números, el análisis, las ecuaciones diferenciales, etcétera. Por el otro lado, estaría la posición en la que aparentemente encajaría mejor el presente ensayo, que le atribuiría a *Fundamentos* una contribución genuinamente matemática, enfatizando que ésta no sólo concierne a las formas sino a los contenidos. Respecto a esto, también parece haber consenso en cuanto a que la metamatemática constituye una nueva disciplina, que además de su originalidad, es caracterizada por diversos valores epistémicos como la generalidad y el aporte de certeza, entre otros. Sin embargo, la bifurcación filosófica surge ante la disyuntiva de considerar o no a la metamatemática parte de los asuntos (*subject matter*) de la matemática. Aunque sobre esta cuestión el autor no se pronuncia explícitamente en términos generales, sí es, cuanto menos, una sugerencia que podemos extraer de su tesis de que *Fundamentos* constituye una aportación sustantiva a la geometría. Tesis que se puede seguir del título mismo del ensayo en el que utiliza la expresión "la nueva geometría". Dado que el debate general es muy amplio y complejo, me limitaré a ilustrar brevemente el encaje de este trabajo en él y daré la razón principal por las que creo que el debate es irresoluble.

Para bosquejar la posición contraria, el autor incluye una cita muy pertinente de Felix Klein: "La formulación [axiomática] abstracta es absolutamente apropiada para la elaboración de las demostraciones, pero claramente no es apropiada para el descubrimiento de nuevas ideas y métodos, más bien constituye la culminación de un desarrollo previo" (2006, p. 434).

A lo que Giovannini responde, primero, presentando la perspectiva de Hilbert y, posteriormente, respaldándola con ejemplos de lo que él llama la fecundidad *matemática* de *Fundamentos*.

> [. . .] Hilbert rechazó de plano la idea de que el método axiomático formal era solo una herramienta muy eficaz para alcanzar un grado de mayor abstracción, rigor y sistematización en la presentación de teorías matemáticas preexistentes [. . .] su nuevo método axiomático no solo permitía plantear preguntas originales, cuya formulación era imposible desde otra perspectiva, sino que además las respuestas a estas preguntas a menudo conducían a resultados novedosos y originales. (p. 231)

A mi parecer, este argumento por sí mismo no favorece la posición del/a formalista. Por el contrario, el/la oponente podría apuntar a que si las preguntas formuladas desde el método axiomático no pueden plantearse desde otras perspectivas es porque no son preguntas genuinamente matemáticas sino relativas a dicho método, lo cual quedaría reforzado por el hecho de que las respuestas también están restringidas al método, condicionando así la naturaleza de los resultados posteriores, cuya novedad y originalidad se debería a que el contexto completo está generando una "realidad" que existe de manera independiente de la realidad matemática.

Finalmente, Giovannini describe los ejemplos que respaldarían la posición formalista. El asunto es que estos ejemplos están enfocados a cuestiones como la forma mayor o menormente general de las formulaciones, la introducción o eliminación de tales o cuales principios, que tendrían o no ciertas propiedades, etcétera. Es decir, que no es difícil ver estos resultados, incluido el máximo de hallar un modelo analítico, como aportaciones en el campo de la teoría de la demostración, mas que en el de la geometría. Desde luego que en el fondo está la cuestión mucho más profunda de cuál es la relación entre la demostración (o demostraciones) de un teorema y el contenido del enunciado que lo expresa. Pero como este punto es largo y delicado, sólo señalaré la razón por la que creo que el debate es irresoluble.

En contraste con las discusiones mantenidas con las otras escuelas de los fundamentos, el debate con el/la formalista compromete drásticamente la distinción entre la matemática como un fenómeno de la realidad y la matemática como una práctica humana que, en principio, aspiraría a lograr las mejores descripciones de la primera. Esta distinción es importante incluso si no estamos dispuestos/as a adquirir mayores compromisos ontológicos. Antes de Euclides había una práctica matemática distinta a la práctica predominante a partir del siglo XIX. Por muy mínimo que sea aquello que es común a estas dos prácticas, es suficiente para darle sentido a la cuestión. Del mismo modo que en las ciencias empíricas el funcionamiento del método no parece completamente independiente de la naturaleza del fenómeno estudiado, esperaríamos que el éxito del formalismo en la práctica matemática no fuera accidental. Sin embargo, al igual que en las ciencias empíricas, el problema es que la única forma de aproximarnos al fenómeno es mediante nuestras teorías, lo que inevitablemente conllevará sesgos y algunos actos de fe.

En este punto de la historia no parece posible desprender el alma formalista de lo que intuimos como *la matemática*. Los resultados de Gödel no destruyeron el programa de Hilbert, como lo dramatizan muchas personas. Cualquiera que haya estudiado los teoremas de Gödel sabe que su aspecto matemático encaja perfectamente en el método axiomático característico del trabajo de Hilbert, aunque sus motivaciones e interpretaciones filosóficas entraran directamente en conflicto. Como bien lo resalta Giovannini, el trabajo de Hilbert produce aportaciones incuestionables. Ahora, determinar si dichas aportaciones corresponden al campo de la matemática —geometría, en este contexto— o al de la lógica y/o la filosofía pasa por la posibilidad de desprender la práctica de la matemática de su objeto de estudio y, a su vez, a la matemática de la filosofía. Al igual que en otros casos en la historia del conocimiento, establecer los correspondientes criterios de demarcación parece una empresa destinada al fracaso.

4. *Parte III. Reflexiones filosóficas*

Aunque en esta última parte del libro surgen nuevamente cuestiones históricas y teóricas —tanto de física como de matemáticas— relevantes en el desarrollo de la geometría, hay un énfasis bastante contundente sobre los aspectos filosóficos. En los trabajos aquí presentados se exhiben con mucha claridad la metafísica, la epistemología y la semántica de la geometría y de la física del espacio, de tal manera que se puede apreciar la evolución filosófica que acompaña y a su vez potencia el avance de las teorías y las metodologías científicas y matemáticas. Esta parte hace prominente una distinción crítica que a menudo pasa desapercibida. A saber, la diferencia entre la(s) geometría(s) como prácticas o sistemas y la geometría como un fenómeno de la realidad.

4.1. Espacio, intuición y geometría euclidiana en Kant [Abel Lassalle Casanave]

Mediante una gran variedad de consideraciones teóricas e históricas y ejemplos pertinentes, Abel Lassalle Casanave elabora una interpretación de la filosofía de la geometría de Kant que resulta tanto esclarecedora cuanto persuasiva. De esta manera, Lassalle Casanave desmenuza las aportaciones de Kant sobre la naturaleza de los conceptos (contrastando los matemáticos, los empíricos y los filosóficos), así como de las facultades del entendimiento y la sensibilidad dentro de su epistemología. En este marco el autor logra encajar a la intuición, no como un elemento misterioso que demanda un acto de fe, sino como una pieza fundamental para articular las ideas de Kant en torno a las verdades de la geometría. Entre otras cosas porque esta intuición posibilita la representación del espacio que resulta fundamental para

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1651

poder pensar en los objetos y en las relaciones entre ellos. Siendo esto crucial para el conocimiento geométrico.

Este ensayo encaja perfectamente con el espíritu de una buena parte de los trabajos desarrollados en las secciones anteriores. Yo no diría que dicho espíritu es en contra del formalismo. Más bien, es un espíritu defensivo que insta a resistirse al sacrificio de contenidos sustantivos para la geometría —y a veces también para la filosofía— por cuestiones metodológicas que atienden a prejuicios teóricos. En este sentido, Lassalle Casanave hace justicia a la filosofía kantiana que, tras la evidencia mostrada por el autor, pareciera haber sido desestimada en nombre de una suerte de falta de claridad, precisión o rigor.

La ontología de Kant en relación con la geometría sostiene que los conceptos geométricos no se derivan de la experiencia, sino de la forma en que nuestra mente estructura el mundo. Para Kant, el espacio es una intuición innata que permite la percepción de propiedades geométricas, haciendo que las verdades geométricas sean necesarias y universales, no simples observaciones empíricas del mundo físico. En este sentido, recurrentemente se ha criticado el papel fundamental de la intuición en la filosofía kantiana y, en particular, la afirmación de que los juicios de la geometría son sintéticos *a priori* —si esto es así, habría que explicar *qué* es lo que se está sintetizando y *cómo* se está sintetizando—. Pero como ya dije antes, el autor desarrolla argumentos contundentes para justificar el papel de la intuición en el aparato kantiano (al menos en lo que respecta a la geometría). Lo que nos lleva a cuestionar la idea, ampliamente difundida, de que la intuición es un parche teórico al que recurre Kant frente a la carencia de un aparato lógico/axiomático suficientemente desarrollado (cualquier cosa que ello signifique en cada discurso crítico). Para concluir diré que este artículo será muy apreciado por el/la lector/a interesado/a en el estado del arte de la geometría en la época de Kant y en cómo éste da sentido a su filosofía.

4.2. Un punto de inflexión: la teoría de las paralelas de Lambert [Eduardo Dorrego López]; Teoría de las paralelas [Johann Heinrich Lambert]; Epílogo al texto de Lambert [José Ferreirós]

En este artículo se analiza el trabajo del matemático suizo Johann Heinrich Lambert (1728–1777) relativo al quinto postulado de los *Elementos*. Siguiendo con lo que, en términos generales, ha sido el *animus* de los capítulos anteriores, Eduardo Dorrego López y José Ferreirós toman la teoría de las paralelas de Lambert como un estudio de caso, mostrando cómo la historia tiene un papel determinante en la práctica matemática, y ésta a su vez refleja significativamente la naturaleza de lo que serían sus contenidos. Contenidos que vale la pena mirar cuidadosamente con el lente de la filosofía.

Una primera aportación es la presentación de la teoría de las paralelas de Lambert en la que Dorrego López deja ver de forma muy clara las razones por las que este trabajo es un importante precursor del descubrimiento y las primeras formalizaciones de las geometrías no euclidianas (en particular de las geometrías elíptica e hiperbólica). Asimismo, aunado al trabajo de Ferreirós en su Epílogo, el trabajo nos muestra que *La teoría de las paralelas* también contribuye con los antecedentes apropiados para la consolidación de otras áreas matemáticas como el análisis real y complejo; así como de la metamatemática en lo que respecta a la teoría de la demostración, siendo fundamental en la investigación de Lambert el cuestionamiento del papel de los axiomas, postulados, y definiciones en la teoría geométrica sobre la que se está trabajando. Como el/la lector/a podrá imaginar, toda esta dinámica entre objetos matemáticos, principios y metodologías conduce a consideraciones filosóficas invaluables que, desde mi punto de vista, suelen ser ignoradas —a veces de manera consciente— por una parte de los/as matemáticos/as. En este sentido aparece de manera recurrente la idea de Lambert de determinar el verdadero *statum quaestionis* (el estado de la cuestión o el tema del que se trata), el cual debe diferenciarse de la cuestión de la verdad, así como de la posibilidad de pensar el axioma euclidiano. Ésta, creo, es la clave del trabajo de Lambert —que Dorrego López y Ferreirós logran transmitirnos de manera exitosa—. El compromiso ontológico que asume Lambert es fuerte. Tal fuerza es la que conduce su trabajo y, en última instancia, establece lo que estamos resaltando como precedentes significativos de la geometría no euclidiana. Para Lambert el *statum quaestionis* y la "cosa", que serían las verdades de la geometría, según Dorrego López, existen de manera independiente a la(s) teoría(s) que las describen —y a la metodología mediante la que se desarrollaron dichas teorías—. De esta manera, Lambert puede imaginar nuevas posibilidades metodológicas, que incluyen caminos a las geometrías no euclidianas, o a una geometría abstracta "sin representarse la cosa". Así, la teoría de las paralelas de Lambert es una manifestación de integridad intelectual que tiene por principio descubrir aquello que está ahí, resistiéndose a los potenciales atajos de corte formalista; resistiendo la tentación de buscar certeza, que, en nombre de mayor generalidad y precisión, a menudo conduce al sacrificio de valiosos contenidos.

Para concluir quiero mencionar una idea de José Ferreirós con la que coincido plenamente (al grado de que pensé en la misma referencia al trabajo de Abel Lassalle Casanave en el capítulo 9, antes de leer el Epílogo). Una vez que ha quedado claro el compromiso metafísico de Lambert sobre que hay algo que es *el* tema de la geometría —que va más allá de la geometría euclidiana—, cada elemento de la teoría tiene su papel con respecto a ese algo. Por ejemplo, los diagramas ofrecerían una *representación visual* de las relaciones geométricas, algo que se podría visualizar para saber (en algún sentido) de la "cosa". El contenido de la teoría queda recogido por los axiomas, los cuales preceden a las definiciones, pues éstas sólo son legítimas en tanto que se ha probado que los objetos definidos existen (que son parte de la "cosa"). De aquí que Ferreirós señale que Lambert apunta en la misma dirección que la idea kantiana sobre la *intuitividad* de la geometría. La exigencia de construir en la intuición pura del espacio los conceptos geométricos. No es que la realidad geométrica esté sujeta a lo que percibimos como espacio físico, o a la descripción euclidiana. Es que en el *statum quaestionis* está la "cosa" y la descripción euclidiana es sólo un ejemplo de la indispensabilidad de la intuición para acceder al espacio abstracto en donde se pueden construir los conceptos geométricos (ya sean euclidianos o no).

4.3. La reforma de la geometría propuesta por Bolzano en 1804 [Elías Fuentes Guillén y Davide Crippa]

Si bien a lo largo del libro hemos apreciado diferentes aproximaciones que reivindican la idea de un tema sustantivo concerniente a la geometría (*subject matter*), que incluiría alguna noción de espacio, objetos geométricos e incluso procesos y movimiento, una consideración amplia y profunda requiere tener en cuenta también las posiciones contrastantes. Es decir, las aproximaciones de corte más formalista. Siguiendo esta línea, Elías Fuentes Guillén y Davide Crippa exponen una parte relevante del trabajo de Bolzano dirigido a una crítica matemática-filosófica y metodológica de los *Elementos*. En particular, los autores articulan las ideas centrales del primer libro escrito por Bolzano, *Consideraciones sobre algunos objetos de geometría elemental*. Este análisis se hace dentro del contexto histórico y matemático del trabajo en cuestión, lo que permite a los autores retratar de manera muy clara el espíritu de la obra.

Aunque el uso del adjetivo *formalista* para describir a Bolzano puede parecer un abuso de lenguaje, las referencias que encontramos en el texto respaldan la idea de un espíritu que se movía en esa línea de pensamiento. Así, Bolzano —en nombre de un mencionado requisito estatal— enfatiza la necesidad de un modo de pensar riguroso, en virtud del cual introduce reglas para organizar el conocimiento científico en "el orden más perfecto" (pp. 306–307). Y es esta idea de orden la que da pie a la crítica de Bolzano a Euclides en cuanto a la organización de las nociones geométricas, matemáticas y lógicas de los *Elementos*. El orden en el sistema que asume Bolzano coloca su teoría de la línea recta en primer lugar y sobre ella, su teoría sobre triángulos y paralelas, relegando a un mínimo lugar las consideraciones sobre el plano. Pero las críticas no se limitan al desorden de los teoremas en los *Elementos*, sino que se extienden a que, según él, dicha estructura entraña consideraciones inapropiadas (p. 313). Entre estas críticas podemos apreciar que el orden aludido por Bolzano impone una jerarquía de prioridades lógicas y metafísicas, que deberán acompañarse con la correspondiente metodología. Junto con otros ejemplos discutidos a lo largo de *La génesis de la geometría,* la cadena de razonamientos sobre el trabajo de Bolzano muestra el ir y venir, por un lado, de consideraciones filosóficas y matemáticas, y por el otro, de los principios metodológicos surgidos desde la práctica. Recordemos, por ejemplo, el desacuerdo presentado en el capítulo 10 entre Lambert y Wolff relativo al orden entre las definiciones y los axiomas (con respecto al que, por cierto, el presente trabajo coloca a Bolzano del lado de Wolff), que también se vería reflejado en sus compromisos metafísicos hacia lo que sería la "cosa" de la que trata la geometría. Todas estas consideraciones en conjunción permiten ver en Bolzano claros indicios de lo que más adelante serían las escuelas de los fundamentos en matemáticas.

Como dije anteriormente, puede ser que atribuir a Bolzano el calificativo de formalista sea algo desproporcionado. Lo que sí creo que podemos afirmar con mayor confianza es que el trabajo de este capítulo revela aspectos que fácilmente identificamos con las tradiciones filosofico-matemáticas que se trazaron como objetivo la búsqueda de los fundamentos de las matemáticas. En primer lugar, podemos señalar notas de predicativismo. Aunque no se menciona que Bolzano comparta exactamente la misma idea de Wolff con respecto a la prioridad de las definiciones, sí parece que se toma en cuenta una correcta predicación en su introducción, evitando así definiciones y construcciones impredicativas. Por ejemplo, la idea de definir un ángulo como una cualidad (un predicado) de dos líneas rectas con ciertas características —con el costo de que el ángulo deja de ser una noción cuantitativa— tiene que ver probablemente con una preocupación respecto a *cómo* se deben introducir los términos. Insisto en que estas atribuciones pueden sonar exageradas, pero mi propósito aquí es resaltar la conexión con las escuelas de los fundamentos. Finalmente, cabe señalar una especie de *constructivismo* que descansa en la idea de que los objetos geométricos están determinados por partes determinantes. La idea de esta determinación de objetos contrasta directamente con las construcciones de los *Elementos*, las cuales serían incorrectas —sospecha que se deriva de su falta de generalidad—. Esto se sigue del comentario explícito en el que Bolzano explica que él no muestra cómo construir empíricamente los objetos espaciales debido a que ello atañe a la geometría práctica y *no a la teórica,* enfocada en mostrar la posibilidad de dichos objetos. Esto es sin lugar a duda una invitación a evaluar lo que sería el *statum quaestionis* en el marco de Bolzano. Y quizá —asumiendo el salto especulativo—, a concluir que las preocupaciones fundacionalistas de Bolzano lo llevaron a considerar el contenido de la geometría, la "cosa", como algo meramente modal.

4.4. Filosofía, geometría y experiencia: Riemann, Poincaré, Einstein [María de Paz]

Para este último artículo me concentraré en la magnífica articulación de ideas que hace María de Paz con la finalidad de exponer las posiciones filosóficas de Riemann, Poincaré y Einstein, mostrando el papel relevante de dichas posiciones en lo que constituyó la revolución —o revoluciones, dependiendo de cómo se identifiquen los hechos en cuestión— de pensamiento de los siglos XIX y XX, la cual inevitablemente acarreó una revolución epistemológica y una disrupción respecto a los paradigmas ontológicos asentados durante siglos (también cabe decir que esta revolución filosófica, aunque en menor medida, acarreó a su vez cambios en la ciencia y la matemática).[2] Para sintetizar la idea —sin dejar de remarcar que es un artículo que

[2] Muchas historiadoras y filósofas de la ciencia pueden aportar evidencia que justifique esta afirmación. Y, de hecho, a lo largo del libro podemos encontrar ejemplos de que la relación de determinación entre filosofía y ciencia también se da en esta dirección. De manera muy general podemos señalar que el trabajo en filosofía de la ciencia —por ejemplo, en lo que respecta a las virtudes epistémicas de las teorías— influye en la evolución de la metodología. O, por considerar un caso concreto, pensemos en el trabajo filosófico de Frege que con sus formalizaciones (las exitosas y las *fallidas*) dio pie a toda una revolución en la práctica matemática y puso los cimientos de lo que posteriormente sería la metamatemática, con la subsecuente

debe leerse completo y con cuidado porque no tiene desperdicio—, María de Paz conjunta las posiciones filosóficas de los tres pensadores mencionados en el título bajo la categoría de "sofisticadas más allá de la simple oposición entre apriorismo y empirismo" (p. 349). Esto será revelado —dejando además de manera clara la importancia del entramado sustantivo entre matemática, física y filosofía— por el análisis de las ideas de cada uno de los autores alrededor del problema del espacio. A saber, el problema de determinar la relación entre la geometría y el espacio físico.

Ya en capítulos anteriores (por ejemplo, en los capítulos 1, 7, 9 y 10) se habían mencionado las ideas de Newton, Leibniz, Kant y Gauss en relación con la geometría y el espacio. En este trabajo María de Paz organiza una parte relevante de dichas ideas de tal manera que podemos formarnos un esquema claro de las posiciones ontológicas y sus correspondientes costos epistemológicos (o viceversa) en cada uno de estos autores. Esto servirá para enmarcar y darle sentido a las contribuciones de Riemann, Poincaré y Einstein.

Simplificando mucho la cuestión quedémonos con que, exceptuando a Kant, los autores coinciden en que el espacio se conoce *a posteriori*. Esto invita a asumir una cierta realidad objetiva que, en principio, sería alcanzable por la experiencia. Una vez estando más o menos de acuerdo sobre esta cuestión quedaría por determinar el estatus y/o la función de la geometría en relación con dicho espacio. Aquí es donde se verán las variaciones entre las diferentes posiciones metafísicas, semánticas y epistémicas, que en cada caso estarán determinadas —al igual que lo será para Riemann, Poincaré y Einstein— por sus investigaciones en física y matemáticas. Es importante señalar que la posición de Kant no deja de ser un punto de referencia por el hecho de tener un fundamento prominentemente filosófico. Todo lo contrario, Kant es *el* punto de referencia que, en contraste con Newton, Leibniz y Gauss, nos permitirá ilustrar la contribución de Riemann, Poincaré y Einstein a la revolución de las nociones de verdad y justificación para el conocimiento científico.

Como mencioné en el primer párrafo, de Paz utiliza la dicotomía apriorismo/empirismo para ilustrar la disrupción en la que incurren las ideas filosóficas de Riemann, Poincaré y Einstein. Asimismo, en éste y otros trabajos se han ilustrado ideas utilizando las contrapartes de esta distinción (es decir, racionalismo y conocimiento *a posteriori*). Con la finalidad de aportar algo al trabajo de organización e ilustra-

cascada de resultados que pueden rastrearse, por ejemplo, a través la teoría de la computación, a los ámbitos más tangibles del conocimiento humano.

ción de las ideas en cuestión, yo apelaré a sistemas de inferencias. Por un lado, la justificación del conocimiento *a priori* —y el núcleo del racionalismo— puede identificarse con procesos de inferencia que son deductivos. Esto no quiere decir que todo el conocimiento *a priori* sea generado deductivamente —por ejemplo, el conocimiento innato podría no ser producto de estos procesos—. Tampoco estoy pensando en una noción muy robusta o delimitada de justificación epistémica. Por ejemplo, si bien Leibniz es un racionalista, ha quedado establecido que en su concepción el espacio es objetivo e independiente de la mente humana (p. 328). Aquí lo que nos ocupa es mediante qué tipo de procesos inferenciales justificaríamos las creencias acerca del espacio, de la geometría, y de su relación. En este aspecto sólo en el sistema de Kant dichas creencias admitirían una justificación derivada de un razonamiento deductivo. Por su parte, Newton, Leibniz y Gauss incorporan de diferentes maneras elementos empíricos en lo que determinaría la relación entre espacio y geometría. En estos casos la justificación atendería a patrones de razonamiento inductivos y la diferencia entre sus concepciones filosóficas se proyectaría en las formas de incorporar las observaciones, de tal modo que los procesos inductivos sean confiables (esta propuesta cobra mucho sentido al leer la interpretación de María de Paz sobre las ideas de Gauss, pp. 326–329). Una vez esbozado este marco, la contribución de Riemann, Poincaré y Einstein puede ilustrarse con la adopción de sistemas de derivación abductivos —sistemas de inferencia a la mejor explicación disponible— para la formación y justificación de las creencias sobre el espacio, sobre la geometría y, en consecuencia, sobre la relación entre éstos. Desde esta perspectiva la diferencia entre filosofías puede verse en términos de las características que harían a una teoría —física, geométrica o filosófica— la mejor explicación disponible.

Para Riemann tendríamos que la mejor explicación está dada mediante la introducción de hipótesis restringidas por las observaciones. Es decir, que las creencias justificadas serían aquellas concernientes a la pareja formada por una geometría —de entre muchas disponibles— y una concepción del espacio sobre la que podamos formular las hipótesis apropiadas. A pesar de que estas hipótesis tienen estándares teóricos muy altos en el sistema de Riemann, se debe reconocer que la certeza empírica es solo hipotética y no puede ser fuente de ninguna verdad absoluta. Por su parte, en el marco de Poincaré lo que determina qué teoría proporciona la mejor explicación es la convención. Es importante recalcar que ésta es una convención *científica*, por lo que las consideraciones no son arbitrarias, sino primordialmente empíricas, aunque también prácticas (metodológicas). La historia de la ciencia le ha dado la razón a Poincaré en este sentido. Por ejemplo, actualmente se sigue utilizando la mecánica newtoniana en virtud de que ésta permite una buena aproximación a los fenómenos mesoscópicos. Sin embargo, procesos más complejos han generado la necesidad de otros marcos conceptuales. A su vez, estos marcos han inducido nuevas convenciones. Por un lado, en lo microscópico predomina la mecánica cuántica, cuya interpretación matemática es extremadamente precisa —aunque su metafísica no sea la más intuitiva—. Por otro lado, en lo macroscópico se impone la relatividad general. Desde luego se podría pensar que cada una de estas teorías es *verdadera* en un dominio específico. Pero esta respuesta es insatisfactoria no sólo por el costo en cuanto a generalidad, sino también porque ciertos procesos característicos de fenómenos macroscópicos, localizados en espacios microscópicos, han llevado a resultados de la mecánica cuántica que son incompatibles —en el marco teórico actual— con resultados de la relatividad general. En definitiva, son las consideraciones que los/as científicos/as convengan como relevantes lo que discriminará entre distintas teorías. Esto muestra que la filosofía de Poincaré es bastante acorde con la práctica científica actual, lo que aporta plausibilidad a su respuesta al problema del espacio. Para concluir, en el caso de Einstein podríamos decir que la mejor explicación de la relación entre espacio y geometría está dada por una cierta coordinación entre los objetos de la experiencia y los esquemas conceptuales de la geometría axiomática. Esto se puede matizar bastante bien con la lectura del artículo. En general, la relación entre estas posturas y los tipos de razonamiento que justificarían nuestras creencias sobre el problema del espacio se podría desarrollar mucho más, pero no es necesario porque el análisis ofrecido por María de Paz posibilita un claro y profundo entendimiento del tema en cuestión.

BIBLIOGRAFÍA

Corfield, David, 2017, "Reviving the Philosophy of Geometry", en Elaine Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher*, Oxford University Press, Oxford, pp. 18–35.

Ferreirós Domínguez, José, y Abel Lassalle Casanave (eds.), 2016, *El árbol de los números: Cognición, lógica y práctica matemática*, Editorial Universidad de Sevilla.

Hanson, Norwood Russell, 1958, *Patterns of Discovery: An Inquiry into the Conceptual Foundations of Science*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kant, Immanuel, 1984, *Crítica de la razón pura*, Taurus, Madrid.

Klein, Felix, 2006, *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*, trad. José Manuel Sánchez Ron, Crítica, Madrid, España.

Kuhn, Thomas S., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press.

Lakatos, Imre, 1976, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press.

Quine, Willard Van Orman, 1951, "Two Dogmas of Empiricism", *The Philosophical Review*, vol. 60, pp. 20–43.

Sánchez Ron, José Manuel, 2004, "Einstein, la relatividad y las matemáticas", *La Gaceta de la RSME*, vol. 7.1, pp. 153–184.

Struik, Dirk Jan, 1987, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications.

Vivanco, Melisa, 2019, "Números naturales: distintas metodologías que convergen en el análisis de su naturaleza y de cómo los entendemos", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. 51, no. 153, pp. 59–81.

Recibido el 20 de junio de 2024; aceptado el 12 de agosto de 2024.