*CRÍTICA. Revista Hispanoamericana de Filosofía.* Vol. 57, No. 169 (abril 2025): 87–117

DOI: https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

# PLAUSIBILIDAD Y DEMOSTRACIÓN EN EL TEOREMA DE RECURRENCIA DE POINCARÉ

ROLANDO ALVARADO-FLORES
Centro de Estudios Multidisciplinarios "Ma. Rosa Flores", A.C.
Zacatecas, México
rolandosmx2@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-8763-0253

RESUMEN: El objetivo del presente artículo es mostrar que los ejemplos que se introducen para dar plausibilidad a un teorema no se ven afectados por el cambio histórico que acontece en los marcos conceptuales y los estilos de práctica de las matemáticas. Para ilustrar este punto, utilizo el teorema de recurrencia de Poincaré y su corolario, que en conjunto desafían y superan el "razonamiento genérico" que dominó la producción de teoremas durante el siglo XIX.

PALABRAS CLAVE: generalidad matemática, demostración matemática, historia de las matemáticas, Imre Lakatos, razonamiento genérico

SUMMARY: The aim of this paper is to show that the examples introduced to give a theorem plausibility are not affected by the historical change in conceptual frameworks and styles of mathematical practice. To illustrate this point, I use Poincaré's recurrence theorem and its corollary, which taken together challenge and surpass the "generic reasoning" that dominated the production of theorems during the XIX century.

KEYWORDS: mathematical generality, mathematical demonstration, history of mathematics, Imre Lakatos, generic reasoning

## 1. *Introducción*

1.1 A fines del siglo XIX ocurrió una mutación en el pensamiento matemático. Un siglo antes, alrededor de 1798, todavía en Condillac (1822) se afirmó que: "el álgebra es un lenguaje bien hecho, y es el único" (p. 5).[1] Junto a la generalidad del álgebra, Condillac aparejó la analogía como método de invención. Esta concepción duró hasta bien entrado el siglo XIX como ideología y metodología para construir teoremas. Para caracterizar esta situación, Hawkins (2005) introduce el concepto de "razonamiento genérico" (RG), que describe una tendencia en la formulación de resultados matemáticos durante el siglo XIX. Pero tenía limitaciones:

[1] La traducción de todas las citas es del autor.

> El gran poder del método de análisis era que involucraba razonar con símbolos abstractos en lugar de con números o líneas geométricas específicas. Su potencia residía en su generalidad, esto indujo una tendencia a considerar que los símbolos introducidos poseían "valores generales", lo que distraía la atención de las potenciales dificultades que surgían para valores particulares de esos símbolos. (*Cfr.* Hawkins 2005, p. 383)

Para ciertos casos, denominados "singulares", lo que afirma el teorema no es válido. El ejemplo que aparece en Hawkins (2005) es un teorema de Jacobi relativo a la diagonalización simultánea de formas cuadráticas. Quedaba claro que sin una reforma al modo de producción de resultados matemáticos se podrían generar contraejemplos para teoremas "demostrados". Se necesitaba más "rigor", y esto, a fines del siglo XIX, significó hacer explícitos todos los supuestos, o al menos todos los posibles.[2] Con esta exigencia se trataba de conseguir una "generalidad" diferente, no engañosa como la provista por el álgebra. De esta manera, es aplicable el más simple de los tratamientos: la inclusión de la excepción en el enunciado del teorema. No debe llevar a confusión la simplicidad de la propuesta de solución, pues formalizarla no resultó fácil. Esto es el tema de Robadey (2016), quien aborda el caso del teorema de recurrencia de Poincaré, pues enumerar los casos singulares, las curvas no cuasiperiódicas, requirió la introducción del concepto de probabilidad en la dinámica. Así, Poincaré constituye una idea de medición de la abundancia de casos excepcionales que más tarde será reconstruida con la ayuda de los espacios de funciones medibles. ¿Escapó con ello a los contraejemplos? ¿Su teorema de recurrencia logra la "generalidad" adecuada? ¿Qué se debe entender por generalidad? Estas preguntas son el tema del presente artículo. Para decirlo con mayor claridad, se pretende introducir el tema de la plausibilidad de los teoremas contra la demostrabilidad de los mismos. De esta última propiedad se exige rigurosidad y generalidad, de la primera no, pues se reduce a introducir ejemplos que ofrecen verosimilitud a un enunciado mediante situaciones singulares. Y construir un discurso convincente no equivale a introducir nuevas formas de generalidad, al contrario, se

[2] Los matemáticos de la época no ignoraban esta tendencia. Maxime Bôcher (1900) escribió, en la introducción: "La materia objeto de las siguientes páginas [ . . . ] ilustra muy bien una de las más sorprendentes tendencias del álgebra y el trabajo analítico. La exigencia de no saciarse con resultados ciertos 'en general', *i.e.*, con más o menos numerosas excepciones, sino esforzarse por construir teoremas que sean *siempre* verdad." En esta referencia se tematiza el problema de la generalidad en los mismos términos que usa L. Kronecker en la cita que aparece en Hawkins 2005 (p. 384).

mantiene la eminencia de los casos particulares como "impulsores" de la búsqueda de la demostrabilidad general, aunque esta sea, quizá, un "ideal regulativo" y nada más.

1.2 Hay otro tema aledaño al de la plausibilidad, el cual consiste en que Poincaré prioriza la introducción del concepto de "caos". Al respecto, Letellier (2021) afirma que el "caos" aparece, en efecto, en la década de 1970 en la obra de Ruelle y Takens (1971), mientras que Aubin y Dahan (2002), en consonancia con varios puntos de vista historiográficos, adjudican a Poincaré el título de fundador de la teoría de los sistemas dinámicos y el caos. Sin embargo, como argumenta Letellier (2021), el concepto de caos aparecido en la década de 1970 no se relaciona con las ideas de Poincaré. Es decir, la turbulencia, que es el tema de la obra de Ruelle y Takens,[3] no se explica con la ayuda de las bifurcaciones de Hopf y las órbitas cuasiperiódicas, aunque Landau (1971) así lo supuso según la línea de los conceptos que Poincaré introdujo, sino mediante "atractores extraños". Resultan "extraños" porque no son ni un movimiento periódico limítrofe ni órbitas cuasiperiódicas. La teoría de bifurcaciones, entendida como la consideración de la variación de las soluciones de una ecuación diferencial cuando varían los parámetros que la describen, fue desarrollada por Poincaré para el problema de la figura de las estrellas. Y este es el modelo de razonamiento que utilizan Landau y Lifchitz, pues la turbulencia aparecerá como sucesión de bifurcaciones de Hopf. Por su parte, Roque (2011) recuerda que el nombre de "sistemas dinámicos" aparece por primera vez en francés en Birkhoff 1912, y posteriormente en Birkhoff 1927a. Roque argumenta que para establecer al creador de una teoría es necesario identificar aquello que la distingue, y esto aconteció con la teoría de los sistemas dinámicos hasta que se generó la diferencia entre una aproximación cualitativa de una cuantitativa en la obra de Birkhoff. Esta conceptualización desafía la postura de Aubin y Dahan.[4] Sin embargo, parece correcto asumir, junto con los autores mencionados, que la obra de Poincaré no se asimiló de inmediato, pues sus resultados se utilizaron de manera fragmentada a lo largo de varios dominios de las ciencias durante un periodo de varias décadas, que estos autores conciben como *longue durée*. Debido a un proceso de

[3] Ruelle lo explica de manera popular en el capítulo 11 de su 1991. En el artículo que Ruelle escribió junto a Takens (1971), es en donde se desvía del modelo de la turbulencia que aparece en Landau 1971.

[4] Aunque la distinción es muy clara, Poincaré (1882) establece que el estudio cualitativo considera las propiedades geométricas de las trayectorias.

"convergencia", los diferentes resultados se unieron en una nueva síntesis durante la década de 1970 para producir la "teoría del caos". En otras palabras, los métodos y conceptos de Poincaré se tomaron de modo aleatorio a lo largo del tiempo y se reintegraron, en un nuevo nivel de abstracción, hacia la década de 1970. ¿Por qué un nuevo nivel de abstracción? Durante esa *longue durée,* la matemática cambió, se adoptó la teoría de conjuntos y se introdujo otro concepto de rigor. Debido a esto, los teoremas del pasado cambiaron de estatus, pues, en retrospectiva, las omisiones e hipótesis ocultas son tantas que invalidan la demostración. Pero quedan como afirmaciones motivadas y sugerentes. Este es, de nuevo, el tema del presente artículo. Se discute el teorema de recurrencia de Poincaré y su demostración como fórmula para ilustrar cómo las motivaciones "coloridas" permanecen, aunque las enunciaciones rigurosas de un teorema cambien.

## 2. *La plausibilidad del teorema de recurrencia*

2.1 En este apartado se expone la idea de punto recurrente de Poincaré junto a otras, más recientes, que aparecen en la literatura. Asimismo, se enuncia el teorema de la recurrencia en Poincaré (1890). Este es un artículo muy largo, el cual apareció en la revista *Acta Mathematica* (1890, pp. 5–270), dividido en partes. El teorema y la demostración se formulan en el capítulo II, el cual trata de los invariantes integrales (pp. 69–70, del apartado 8). Unos parágrafos antes, en el artículo citado, previo al establecimiento del teorema de recurrencia, Poincaré discute el concepto de estabilidad de Poisson y se pregunta si acaso todas las trayectorias pueden poseer esa propiedad. Responde que Poisson mismo creía que no. Sin embargo, en Poincaré 1885 está contenida (capítulo X) la noción de lo que después, en Poincaré 1890 y de modo definitivo en Poincaré 1899, nombraría "estabilidad en el sentido de Poisson". La explicación que Poincaré (1885) ofrece,[5] tras aducir un ejemplo elemental, es:

> Sea M un punto de la trayectoria en el tiempo t. Se describe ahora un círculo de radio r, tan pequeño como se quiera, alrededor de M.

[5] En el artículo del *Journal* la página es la 169, mientras que en las *Oeuvres*, tomo 1 es la 92. El ejemplo elemental es lo que hoy se conoce como "figura de Lissajous", que para ciertos valores es cerrada y acotada y para otros es abierta y llena el espacio. De manera cáustica, Poincaré añade el comentario: "los alemanes dirían que la *Punktmenge*, formada por las diferentes partes de la corona, es *Überalldicht*". Pese a Poincaré, la terminología de los alemanes perduró, pues es moneda corriente decir que un conjunto de puntos (*Punktmenge*) es denso (*Überalldicht*).

> El punto móvil que parte de M saldrá, evidentemente, del círculo, pero nuevamente volverá a atravesarlo un *número infinito* de veces por pequeño que se escoja r.

En contraste, en Poincaré 1899 (p. 141) la definición es sucinta: "El sistema regresa un número infinito de veces, tan cerca como se quiera, de su situación inicial." Se pueden encontrar otras, más formalizadas, en literatura posterior, lo que demuestra que la apreciación de Robadey (2016) de considerar la estabilidad de Poisson un "concepto fósil" no está justificada. Así, en Bahtia y Szegö se tiene: "Un punto $x \in X$ se dice *positivamente estable en el sentido de Poisson* si cada vecindad de $x$ es recursiva positiva para $\{x\}$" (1970, capítulo III). En la idea de conjuntos recursivos Bathia y Szegö codifican la idea del mapeo uniparametrizado típico de la teoría de sistemas dinámicos.

Por su parte, en Nemytskii 1989 se define la estabilidad de Poisson como: "Un punto $p$ se denomina 'positivamente estable en el sentido de Poisson' (se abrevia (estable '$P^+$') si, para cualquier vecindad $U$ de $p$ y para cualquiera $T > 0$, se puede encontrar un valor $t \geq T$ tal que $f(p,t) \in U$".

La definición para estabilidad $P^-$ es similar. Así que un sistema es estable $P$ si, y solo si, es estable $P^+$ y estable $P^-$ a la vez. En esta definición la función $f$ es el mapa que se obtiene de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales, integrales, en diferencias, funcionales o de cualquier origen. Poincaré, por supuesto, ignoró esa generalidad y estudió sistemas de ecuaciones diferenciales en Poincaré 1885. La idea de recurrencia es clara. Un punto móvil recurre cuando, tras atravesar una porción del espacio accesible al mismo retorna a una vecindad del punto donde comenzó el movimiento. La misma imaginería de un punto móvil se debe a Poincaré, y es parte integrante de su concepción de "teoría cualitativa" de las ecuaciones diferenciales, pues proporciona una imagen accesible a la representación mental.

Como aplicación de la teoría de los invariantes integrales, desarrollada en Poincaré 1890 y después en Poincaré 1899, enuncia el teorema de la recurrencia en los siguientes términos:

TR "Supongamos que el punto $P$ se mantiene a una distancia finita de un centro, y que el volumen $\int dx_1 dx_2 dx_3$ es un invariante integral. Entonces, si se considera una región $r$, tan pequeña como se quiera, habrá trayectorias que la atraviesen una infinidad de veces."

Este enunciado está en Poincaré 1890 (p. 69), y a continuación se ofrece la demostración sin ningún tipo de argumento de plausibilidad. Tras demostrar el teorema de recurrencia se propone demostrar la afirmación de Poisson respecto al número de excepciones a través de un argumento probabilístico. Después, mediante la técnica del último multiplicador generaliza los supuestos del teorema de recurrencia. En particular, pasa de la versión hamiltoniana canónica, la que posee el último multiplicador unitario, a una hamiltoniana no canónica con multiplicador no unitario. Mientras que en Poincaré 1899 la demostración se hace dentro del contexto de una situación singular: el caso de un fluido incompresible acotado en el espacio. Cabe notar que el enunciado del teorema TR que se ofrece en Poincaré 1890 y 1899 es una versión hamiltoniana no canónica. Otra manera de enunciar el TR, con ayuda de los conceptos que Poincaré introduce, es la siguiente:

TR* "Sea la trayectoria de un punto $P$ definida en un espacio acotado. Si en este espacio el volumen del mismo, $V$, es un invariante integral del movimiento, entonces la trayectoria es estable en el sentido de Poisson."

2.2 La finalidad de este apartado es establecer la diferencia entre una argumentación formalizada de una que depende del contexto. Mientras que la primera es abstracta y general, la segunda es singular. Poincaré (1899, capítulo XXVI, tomo 3) distingue, después de discutir un ejemplo tomado de la mecánica celeste, tres sentidos del término "estabilidad" en el problema de los tres cuerpos:

*1. Ninguno de los tres cuerpos se puede separar una distancia indefinida.*

*2. Ningún par de cuerpos puede chocar, y la distancia que los separa no puede descender de un cierto límite.*

*3. El sistema pasa de nuevo, una infinidad de veces y muy cerca, de su posición inicial.*

La tercera condición ya se discutió en el apartado 2.1. La segunda es similar a la estabilidad que se ha venido a denominar "estabilidad de Lyapunov",[6] sin embargo, de acuerdo con Poincaré, la introdujo Lagrange. Cuando un sistema satisface las tres condiciones se denomina "completamente estable". No se indagará la relevancia de estas nociones para la mecánica celeste, se discuten, por otro lado, los teoremas de recurrencia, los argumentos que los vuelven plausibles y las demostraciones de los mismos. Para un estudio de la estabilidad

[6] Véase Liapounoff 1907.

véase Roque 2011. De acuerdo con el contexto de Poincaré (1899), la siguiente argumentación es inmediata:

A Los cuerpos gravitantes forman un sistema conservativo, por lo que la energía, y por ende el movimiento, se mantienen por largos periodos de tiempo. Así que resulta natural que, si los objetos se mueven en un espacio acotado, tarde o temprano han de volver sobre las posiciones que tuvieron en algún momento previo.

Entonces un resultado sobre recurrencia es muy plausible, y de hecho aparenta ser trivial. Poincaré (1899, apartado 291, p. 147) explicará el sentido de la estabilidad de Poisson con el uso del ejemplo del movimiento incompresible de un fluido en un vaso de volumen finito $V$. Ahí aparenta ser obvio que las partículas del fluido, que ocupaban un volumen finito $A$ dentro del envase en el tiempo $t$, volverán un número indefinido de veces sobre ese volumen $A$ en tiempos posteriores $t' > t$. El ejemplo del fluido incompresible desempeña un papel crucial en el teorema de recurrencia en un doble aspecto. Por un lado, es la ilustración más clara de lo que es un invariante integral, y a la vez es la representación misma del argumento de recurrencia.[7] Para cuando se explica la misma teoría en Poincaré 1899 la posición del ejemplo cambia. No viene después de la definición sino antes, como elemento que ilustra y motiva la introducción del concepto. Sin embargo, en Poincaré 1890, en el apartado (8), una vez definida la estabilidad de Poisson se enuncia el teorema de la recurrencia sin recurso al ejemplo del fluido incompresible. Poincaré debe haber reflexionado acerca del asunto y decidió hacer un cambio fundamental. Si se lee de cerca el capítulo 26 de Poincaré 1899, el enunciado del teorema de la recurrencia viene después de la explicación de la estabilidad de Poisson, en el artículo 291 cuyo título es “Movimiento de un líquido”. Por tanto, el teorema se enuncia *dentro del contexto* del ejemplo del fluido, y dice lo siguiente:

TRC “Sea $U$ un volumen cualquiera interior al vaso y tan pequeño como se quiera, yo digo que habrá moléculas que atraviesen un número infinito de veces ese volumen.”[8]

TR o TR* no son iguales a TRC porque uno se enuncia de manera abstracta y general, mientras que el otro asume la forma de un ejemplo físico particular, e incluso incluye al autor (“je dis”). Poincaré

[7] Véase Poincaré 1890, parágrafo (6) acerca de la definición del concepto de invariante integral.

[8] El texto de Poincaré 1957 (p. 142) dice: “je dis qu’il y aura des molecules qui traverseront une infinité de fois ce volume”. La traducción que se ofrece es literal.

no sólo busca generalidad sino, también, plausibilidad, la cual considera que se obtiene con la inserción de ejemplos particulares. Estos son capaces de proyectar el teorema en contextos más "coloridos" y "didácticos", pues permiten una comprensión clara de la materia expuesta.

Con el ejemplo del fluido incompresible, Poincaré expone el argumento fundamental de los teoremas de recurrencia:

B Si las partículas ocupan el volumen $A_0 \subset V$ en el tiempo $n = 0$, entonces, debido al "flujo" $g$ se formará una secuencia infinita $A_0, \ldots, A_n$, donde $g^n A_0 = A_n$, de volúmenes interiores al envase de volumen finito cuya suma no será nunca infinita porque el volumen del envase no lo es. Luego, esos volúmenes interiores se intersectan unos con otros.

Como se ve, la intersección de volúmenes es plausible en el contexto del ejemplo del fluido. La suposición de preservación del volumen aparece durante todo el argumento de Poincaré, por lo que parece ser necesaria (y no lo es, como se explica más adelante en la sección 4.1). Una vez demostrado que los volúmenes interiores de la secuencia tienen partes comunes, Poincaré argumenta que se pueden elegir los índices que los ordenan en el tiempo de modo que sean el índice 0 y un índice adecuadamente escogido $l$ los que indiquen las intersecciones entre ellos. Para ello introduce un argumento de "inversión temporal", lo que supone que las ecuaciones del movimiento son invariantes ante esta operación de simetría. Poincaré enfatiza la conclusión en su texto de 1899 (p. 143):

*Uno puede escoger el número $l$ de modo tal que $A_0$ y $A_l$ tengan una parte común.* (1)

Es decir, si la parte común de los conjuntos $A_k, A_l$ es $A_k \cap A_l,\ k > l$ se invierte el sentido del tiempo $k - l$ veces para llegar a $A_{k-l} \cap A_0$. Una vez hecho esto, la recurrencia sobre el volumen inicial está "demostrada". Sin embargo, no está demostrada, como es natural, porque de acuerdo con los criterios modernos muchos de los conceptos necesarios para alcanzar el "rigor absoluto" no estaban disponibles. La palabra "rigor", en el marco del pensamiento de Poincaré, remite a la enumeración de los supuestos subyacentes. Kurth (1960, p. vii) prefiere denominar "compleción" a lo que se indica con la palabra "rigor", pero en lo que sigue la utilizaremos en el sentido que se explicó, por lo que el teorema de recurrencia de Poincaré no era, en retrospectiva, riguroso debido a que los procesos de integración involucrados, los supuestos topológicos y la naturaleza global de los campos vectoriales que generan los flujos, no están clarificados. Así, la simple enumeración, por muy sofisticada que fuese, no podía incluir los desarrollos posteriores del "rigor". Se enuncian dos de ellos que son evidentes:

a. Es parte fundamental del argumento que si $A$ es un conjunto interior al volumen se tendrá que su imagen por el flujo es también integrable. Esta condición no se cumple para los conjuntos integrables en el sentido de Riemann. Es decir, el paso de la integral:

$$\int dxdydz$$

Sobre el volumen $A$ a la misma integral sobre el volumen $A_n$ no es inmediato, pues se deben mantener las condiciones que permiten la integrabilidad. En particular, una función integrable de Riemann debe ser acotada o, lo que es igual, mantener la diferencia de las sumas superior e inferior de Darboux menores a un número arbitrariamente pequeño.[9]

b. Poincaré establece que el movimiento es acotado, y eso puede parecer suficiente, pero no está garantizado por ningún tipo de condiciones que definan clases de campos vectoriales que generen soluciones simultáneamente completas y acotadas. Es decir, Poincaré discute problemas globales del análisis cuando la distinción global/local no existía, aún.

Se tienen, entonces, dos retos para conseguir el "rigor absoluto":

1a. Definir un concepto de integración que satisfaga la condición (a), lo que lleva a definir, como elementos ancilares al concepto de integración, familias de conjuntos con características particulares. Es decir, no cualquier conjunto de funciones, definidas sobre cualquier

[9] La historia, cuya culminación es la integral de Lebesgue, la relata Hawkins (1970). Para comprender la naturaleza de los posibles contraejemplos se debe recordar que la región sufre deformaciones pese a preservar el volumen. Y estas pueden ser lo suficientemente "extrañas" como para desbordar las condiciones de integrabilidad de Riemann. Resulta curioso que Dini haya conjeturado la falla en las condiciones de integración sin ofrecer un solo contraejemplo. Correspondió a Volterra mostrar el contraejemplo, y entre estos mostró una función acotada de derivada acotada que no resultaba integrable. Es decir, la condición de acotamiento, que aparece aquí y allá en el teorema de la recurrencia, no es suficiente para garantizar la integrabilidad de los volúmenes bajo la deformación producida por el flujo.

familia de conjuntos, resultan ser “modelos” de las condiciones enunciadas.

1b. Se deben imponer condiciones sobre los componentes de los campos vectoriales tales que garanticen que las trayectorias que definen sí recorren el espacio que les es accesible. Es decir, se debe caracterizar una clase de campos vectoriales. Aledaño a esto aparecen condiciones sobre la conectividad del espacio en el que tiene lugar el movimiento. Y este tipo de cuestiones son ya globales, ajenas por completo al estilo del RG.

Por lo tanto, más que atender el “rigor”, notaremos, como se ha hecho, la “plausibilidad” del teorema. A continuación explicaremos ahora el sentido preciso en el que entenderemos esta “plausibilidad”.

2.3 A continuación, se ofrece un análisis del conocimiento matemático presentado en tres etapas que, aunque modelado sobre la concepción platónica del conocimiento empírico, es muy diferente. La plausibilidad de una proposición no implica una relación tan fuerte del sujeto con esta como la del conocimiento. Para que este tenga lugar se deben explicitar condiciones que impidan que la creencia devenga “revelación”, “tenacidad”, “necedad” o cualquier otro epíteto que indique ausencia de crítica. Ofrecer buenas razones para creer en algo es resultado de la conciencia crítica. Es bien sabido que para sostener que “el sujeto S conoce la proposición P” tres condiciones son necesarias (los contraejemplos de Gettier muestran que no son suficientes):

1. El sujeto S cree que P.

2. El sujeto S tiene buenas razones para creer que P.

3. P es verdad.

En este análisis, la proposición P remite a una eventualidad en el mundo, por ende, se sujeta a condiciones de verdad, pero en las matemáticas la situación es diferente, pues estas no refieren a hechos en el mundo, más bien a relaciones entre conceptos. Se propone el siguiente análisis del conocimiento matemático. Sea E una proposición matemática y $S_1, \ldots, S_n$ $n$ situaciones empíricas, *e.g.*, un fluido contenido en un envase o una serie de figuras geométricas de madera o unos globos.

*Def1*: se dice que el sujeto $S$ conoce la proposición matemática $E$ si, y solo si:

1. $S$ cree que $E$.

2. Dadas las situaciones empíricas $S_1, \ldots, S_n$ el sujeto $S$ considera plausible $E$.

3. Existen una serie de premisas $C_1, \ldots, C_m$ a partir de las cuales es posible deducir la proposición $E^*$.

Dadas estas condiciones se puede decir que $E^*$ es un teorema y que $S$ lo conoce.

Esta definición surge del análisis del proceso de demostración del teorema de recurrencia y se propone como caracterización del conocimiento matemático en general. Consta de dos partes muy claras que tienen papeles históricos distintos. Por un lado, están los argumentos de plausibilidad, que mantienen su atractivo a lo largo del tiempo, por el otro, se encuentran los procedimientos de demostración del teorema que cambian porque se exige que sean rigurosos, y esto es relativo a una época histórica. Por tanto, la demostrabilidad se deberá considerar en un sentido informal inicial que paulatinamente se formaliza por la aplicación de cierta concepción del rigor que surge de la disponibilidad de contraejemplos y "paradojas". A fines del siglo XIX acontece, entonces, una curiosa bifurcación en la historia de las matemáticas: las condiciones de plausibilidad pierden su importancia porque se concibe que la intuición de las situaciones empíricas $S_1, \ldots, S_n$ no es relevante para la demostración del teorema, más bien, es ocasión de extravío. Un buen ejemplo de esto es el teorema de Banach-Tarski-Hausdorff,[10] que muestra cómo una prueba formal se puede utilizar para indicar que las situaciones empíricas no son una buena guía en la construcción de teoremas. Es decir, durante el siglo XIX se creyó que una situación empírica podía volver plausible un teorema e incluso fundarlo. Posteriormente se pudo utilizar la demostración formal como impugnación de la intuición.[11] Este camino conduce a la identificación de la matemática con su reconstrucción lógica y a la creencia en su independencia de la intuición. Sin embargo, el conocimiento matemático no se construye en el vacío. Los teoremas más abstractos poseen elementos de plausibilidad que no son, ni pueden ser, "rigurosos". Para describir las fases involucradas en (2) y (3) de la definición 1 se introducen las siguientes definiciones.

[10] Véase Wagon 1987. La lectura aceptada del teorema es que demuestra cómo se puede descomponer un conjunto de modo tal que se puede duplicar cuando se recompone. Sin embargo, esto no es ocasión de escándalo porque lo que exige es una nueva concepción de la medida de los conjuntos.

[11] Poincaré mismo creía en la "intuición del número" como complemento a las intuiciones de los sentidos y la inducción. Véase Poincaré 1905/2001, p. 214/p. 203.

*Def2*: A un conjunto de situaciones empíricas que tornan plausible una proposición matemática se le denomina "contexto de plausibilidad". (CP).

*Def3*: Dada una proposición matemática $E$ se dirá que es una conjetura si existe para esta un CP.

Abatir el pensamiento genérico pareció cuestión de saber enumerar las excepciones a un teorema para restringir su dominio de validez a una región segura. Sin embargo, como se observa en el caso del teorema de recurrencia, la enumeración nunca fue sencilla, y requirió la introducción de conceptos nuevos, como el de medida de un conjunto.

*Def4*: Los conceptos introducidos para enunciar y volver rigurosos los teoremas $E^*$ se denominan "conceptos generados por la demostración". (CGD).

Los CGD permiten alentar la esperanza de abolir los CP, destruir la ambigüedad y derrotar al escepticismo, pues con aquellos se podrá dar el paso deductivo de las premisas hacia la conjetura, razón por la cual se volverá un auténtico teorema.

Entonces, la etapa informal del conocimiento matemático consiste de una conjetura $E$, mientras que la formal de un teorema $E^*$. Ambas etapas son productivas, pues en la primera se construyen ejemplos, ilustraciones, situaciones didácticas, etcétera. Mientras que en la segunda se introducen conceptos que se utilizan para generar definiciones y construir demostraciones.[12] Existe, pues, un *telos* filosófico en el que se pretende pasar del amor al saber (la etapa informal) al pleno conocimiento (la etapa formal).

2.4 Se vuelve al argumento de Poincaré. Una vez demostrada la recurrencia, se prueba que no acontece una sola vez, sino infinitas veces. El CP de la conjetura, en Poincaré 1899, es el ejemplo del fluido incompresible. Su argumento es el siguiente (parágrafo 291): Consideremos la secuencia infinita numerable: $A_0, \ldots, A_n$ a la que aplicaremos la proposición (1), por lo que formamos: $A_0^0 = A_0 \cap A_{l_0}$ y a partir de aquí la secuencia, también infinita: $A_0^0, \ldots, A_n^0$ que resulta de aplicar el flujo del campo vectorial que genera la dinámica a $A_0^0$. Es decir, si $g_t$ es el flujo que resulta de integrar

[12] En Jaffe y Quinn 1993 se utiliza el término "matemáticas teóricas" para encuadrar algo análogo a la etapa preformal. Sin embargo, no se intenta comparar las concepciones de la referencia citada con las introducidas en el apartado 2.3.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

las ecuaciones diferenciales del movimiento, entonces $A_n^0 = g_n A_0^0$. Se aplica de nuevo el resultado (1) a esta secuencia para obtener: $A_0^1 = A_0^0 \cap A_{l_1}^0$, y de nuevo formamos la secuencia: $A_0^1, \ldots, A_n^1$. Se aprecia ya el proceso de formación que introduce Poincaré. De esta manera obtiene la secuencia de conjuntos: $A_0, A_0^0, \ldots, A_0^n$, entre los que existe la relación: $A_0^M = A_0^{M-1} \cap A_{l_M}^{M-1}$ que redunda en:

$$A_0^M = A_0 \cap A_{l_0} \cap A_{l_1}^0 \cap A_{l_2}^1 \cap \ldots \cap A_{l_M}^{M-1} \tag{2}$$

De donde es claro que conforme $M$ crece se reduce el volumen del conjunto $A_0^M$ aunque cada conjunto es parte del previo. Aquí Poincaré aplica lo que se conoce hoy día como "teorema de Bolzano-Weierstrass": toda secuencia infinita acotada tiene un punto de acumulación. Por su construcción, el conjunto $A_0^M$ está acotado, y conforme crece $M$ así permanece, por lo tanto, existirá un conjunto límite $\Gamma$. Puede ser un punto o un continuo de volumen finito, nos dice Poincaré. Es importante interpretar el sentido de la afirmación (2). En esta se dice que es el conjunto de todas las partículas que, por estar inicialmente en $A_0$ en el tiempo 0, estarán en $A_{l_0}$ en el tiempo $l_0\tau$, en $A_{l_1}^0$ en el tiempo $(l_0+l_1)\tau$ y así sucesivamente. Para decirlo de otra manera, es el conjunto de todos los puntos que recurren un número $M + 3$ de veces en el volumen (2). El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que el conjunto límite, es decir, el de los puntos que recurren infinitas veces, no es vacío. Y, por lo tanto, sin importar qué tan pequeño sea el volumen, las partículas recurren un número indefinido de veces. Aquí hemos simplificado porque Poincaré utiliza, de nuevo, la invariancia ante la inversión temporal de las ecuaciones del movimiento. El resultado neto es, sin embargo, el mismo. Dentro de los conceptos matemáticos modernos lo que se trataría de demostrar es que la medida de (2) no es nula. Por lo tanto, el teorema de recurrencia de Poincaré consta de dos partes: la primera es la construcción de un CP de la conjetura; la segunda es el proceso mismo de la demostración, que señala la demostrabilidad del teorema. Lo que sigue a continuación, en Poincaré 1899 (apartados 296–297), es la introducción de las probabilidades y su generalización mediante la técnica del último multiplicador. Poincaré (1899) ofrece, entonces, una interpretación probabilística del teorema de recurrencia. Como ya se mencionó en la introducción, según Robadey (2016), esta fue la innovación que hizo Poincaré con respecto al RG, al lograr medir las excepciones con la probabilización de la dinámica. Con ello, se convierte también en precursor del caos, pero a condición de restringir este concepto a meras bifurcaciones y trayectorias cuasiperiódicas.

2.4.1 Sheynin (1991) enumeró las concepciones de Poincaré relativas al significado del concepto de probabilidad, donde, en al menos un punto, enfatizó su impenetrabilidad.[13] Para comprenderlas mejor se las debe encuadrar en la perspectiva general del convencionalismo, la filosofía desarrollada por Poincaré. Si se conciben de esa manera, entonces una definición de probabilidad no se puede ofrecer de manera satisfactoria para todos los contextos, más bien en cada caso ha de encontrarse la manera de aplicarla, aunque quizá no de desarrollarla conceptualmente. Tanto en Poincaré 1890 como en Poincaré 1899 utilizará una idea, o convención, de probabilidad para mesurar el número de excepciones al teorema de la recurrencia. Robadey (2016) considera que esos argumentos probabilísticos son parte de un lenguaje técnico que Poincaré utiliza de modo uniforme en sus trabajos. El término "trayectoria excepcional" es uno de estos, pues la pretensión es dotarlo de significado mediante la técnica que se introducirá para mesurar las trayectorias inestables de Poisson. Así, el argumento es, de nuevo, muy plausible: una trayectoria inestable de Poisson es excepcional porque tiene una probabilidad de ocurrencia muy baja, como lo explica en Poincaré 1899, La primera aparece en Poincaré 1890 (sección 8):

A Convendremos en decir que la probabilidad de que la posición inicial de un punto móvil $P$ pertenezca a una cierta región $r_0$ guarda respecto a la probabilidad de que esta posición inicial pertenezca a otra región $r_0^1$ la misma razón que el volumen de $r_0$ al volumen de $r_0^1$.

Mientras que en Poincaré 1899 (apartado 296), escribió:

B Sea $\varphi(x, y, z)$ una función cualquiera positiva de las tres coordenadas $x, y, z$. Se convendrá en decir que la probabilidad de que al instante $t = 0$ se encuentre al interior de cierto volumen es proporcional a la integral

$$J = \int \varphi(x, y, z)dxdydz$$

calculada en ese volumen. En consecuencia, esta es igual a la integral $J$ dividida por la misma integral extendida a todo el volumen $V$ del envase.

Téngase en cuenta que la segunda explicación se realiza en el CP del fluido incompresible. La inecuación que permitirá el cálculo de la

[13] Sheynin no logra explicarse la siguiente afirmación de Poincaré: "Todas estas teorías se fundan sobre la ley de los grandes números, y el cálculo de probabilidades las conduce hacia su ruina." Para la cita, véase la nota 11 en Sheynin 1991.

probabilidad de las trayectorias inestables en el sentido de Poisson la introduce Poincaré (apartado 292) y es extraordinariamente plausible. Sea $A_0, \ldots, A_n$ una secuencia de conjuntos interiores al conjunto que contiene la trayectoria, $R$. Dentro del CP, se entiende que $R$ es un envase que contiene un fluido, mientras que la secuencia de conjuntos interiores al envase se forma con aquellos conjuntos que cubren la trayectoria de las moléculas contenidas en $t = 0$ en $A_0 \subset R$. Los volúmenes de estas regiones sean: $Vol(A_n) = v_n$ y del envase $Vol(R) = V$. Entonces, debido a la incompresibilidad la suma de la secuencia de subvolúmenes es $(n+1)v_0$, hasta el tiempo $n$. Si se supone que no existe ninguna intersección hasta ese tiempo, entonces la siguiente inecuación aparenta ser obvia en el CP: $(n+1)v_0 < V$. ¿Por qué? Si en el intervalo entre 0 y $n$ no hay intersecciones, significa que las regiones todavía se pueden acomodar sin llenar por completo el volumen del envase, y por ende su suma será menor a la del mismo. Pero, cuando acontece una intersección entre 0 y $n$, el sentido de la inecuación cambia, pues: $(n+1)v_0 > V$ debido a que, como ya no queda espacio para acomodar las regiones en evolución, estas se traslapan, y se cuenta dos veces el volumen de las partes intersectadas en la suma de la izquierda de la inecuación. Poincaré está interesado en el siguiente resultado, que también aparenta ser sencillo:

$$(n+1)\, v_0 > kV \tag{3}$$

El resultado (3) vale para las trayectorias que, contenidas en $A_0$ en $t = 0$, tienen $k$ intersecciones en el tiempo $n$. Se puede notar que (3) es la generalización para $k$ intersecciones de lo que se argumentó para una. También es muy sencillo el razonamiento para obtenerla y, sobre todo, plausible. Ahora bien, las trayectorias tienen un número de traslapes que se incrementa con el paso del tiempo, y resulta que $k = f(n)$ es monótona creciente. El argumento para desdeñar las trayectorias inestables de Poisson es el siguiente: sea que en el volumen $v_0$ existe un pequeño conjunto $a_0$, de volumen $\sigma_0$ que contiene las condiciones iniciales cuyas trayectorias tienen menos de $k$ intersecciones en el tiempo $n$. Entonces:

$$(n+1)\, \sigma_0 < kV \tag{4}$$

Por tanto, de acuerdo con lo dicho en (A) si se divide por $v_0$ se tiene:

$$p_{NO} < \frac{kV}{(n+1)v_0} \tag{5}$$

Donde $p_{NO} = \frac{\sigma_0}{v_0}$ es la probabilidad de las trayectorias que no logran recurrir, en el tiempo $n$, un número $k$ de veces. Entonces, debido a que $k$ no crece con $n$, o se mantiene finito conforme $n$ avanza, es una función $k = h(n)$ acotada del tiempo. Por tanto, se tiene que la $p_{NO}$ es cada vez más pequeña, por lo que en la *longue durée* será nula. Y se obtiene el corolario al teorema de recurrencia:

Corolario: las trayectorias inestables en el sentido de Poisson tienen probabilidad nula de ocurrencia.

## 3. *La fortuna matemática de los argumentos de recurrencia*

3.1 Las argumentaciones de Poincaré que se comentaron en la sección 2 tuvieron una innegable fortuna. Después de todo, el teorema de recurrencia es atractivo, directo y simple a pesar de no ser, desde el punto de vista presente, riguroso. Y aunque la tentación de creer que en el teorema de recurrencia se encuentran presagiados los conceptos hoy corrientes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (como los que aparecen en el manual de Nemytskii y Stepanov (1989)), los nombres "puntos $\alpha$ y $\omega$", "colectivo minimal", "estabilidades positiva y negativa", no los introdujo Poincaré, sino, en gran medida, lo hicieron Hadamard (1897) y Birkhoff (1912). En este artículo, Birkhoff generaliza y formaliza los conceptos de Poincaré, lo que conllevó la construcción de un tipo nuevo de generalización en matemáticas. Como ya se mencionó, el RG consiste en confiar en la generalidad del álgebra que omite los casos particulares. Birkhoff va a reconstruir los conceptos de Poincaré a través de un contexto problemático que le permitirá dejar atrás el RG. Distingue entre movimientos continuos, dados por funciones continuas y periódicas, y los discontinuos, de cuya definición se encargará el propio Birkhoff mediante una nueva manera de introducir los conceptos utilizados en el teorema de la recurrencia. De hecho, la generalización de Birkhoff es similar, aunque de menor alcance, a la formulación que utiliza Poincaré para despreciar las trayectorias no recurrentes.

3.2 Citando a Hadamard, en Birkhoff 1912 se define la estabilidad de la siguiente manera:

A *Desde el punto de vista adoptado un movimiento estable es uno tal que, a partir de un cierto momento y ulteriormente, no se aproxima jamás, de manera indefinidamente cercana, a los puntos singulares.*

Los puntos singulares son de dos tipos, prosigue Birkhoff, y se pueden agrupar en dos clases. La clase $S$ de todos aquellos puntos donde los coeficientes del campo vectorial dejan de ser analíticos,[14] y la clase $E$, que es la que agrupa los puntos en los que los coeficientes del campo vectorial se vuelven nulos. En cualquier punto fuera de estas dos clases pasa una y solo una curva integral del campo. A todos estos puntos los denomina "regulares". Una secuencia de puntos regulares no tiene punto de acumulación en $E$ en un tiempo finito,[15] mientras que sí puede tenerlo en $S$, pero Birkhoff decide dejar estos límites fuera de consideración. Lo hace así para, desde su punto de vista, poder extender las curvas integrales del campo vectorial a todo el eje real $(-\infty, +\infty)$ de la variable $t$ que parametriza la curva y se conviene en denominar "tiempo". Tras dejar fuera de consideración los puntos referidos, Birkhoff enuncia un teorema de prolongación de las curvas integrales en el que formaliza el concepto de estabilidad, que hoy se conoce como de Lyapunov, del sistema de curvas integrales. Esto garantiza que dos trayectorias cercanas en un intervalo de variación del tiempo permanecen así cuando se prolonga ese intervalo. Lo enuncia en los términos siguientes:

B *Si $P$ no pertenece a $S$ y el movimiento, que en el tiempo $t = t_0$ está representado por $P$, es susceptible de extensión al intervalo $\tau \leq t \leq \sigma$, y además se puede elegir un $\delta$ pequeño y positivo, tal que todo movimiento que en el tiempo $t = t_0$ está representado por $P'$, cuya distancia a $P$ es menor que $\delta$ y que también se extiende a $\tau \leq t \leq \sigma$, entonces en ese intervalo la distancia entre los puntos correspondientes a la curva $P$ y a la curva $P'$ no excede a una cantidad positiva arbitraria $\epsilon$.*

Birkhoff lo presenta como teorema y comenta que es un muy conocido resultado sobre la continuidad de los datos iniciales respecto de la solución. Birkhoff (1912, sección II), citando nuevamente a Hadamard, establece las definiciones de los límites $\alpha$ y $\omega$ del movimiento, que tienen sentido para campos vectoriales completos, es decir, aquellos cuya solución puede extenderse a cualquier valor del parámetro temporal $(-\infty < t < +\infty)$. ¿Por qué es necesario esto?

[14] El adjetivo "analítico" se entiende, en general, como "expandible en series". Si hay "divergencia al infinito" también se dice que la función no es analítica. Es en esta última acepción como Birkhoff lo entiende. Es decir, el conjunto $S$ es el de los puntos $x_0$ tales que existe, al menos, un componente del campo vectorial que diverge al infinito.

[15] Una imagen simple torna plausible el aserto. Los puntos de $E$ son de equilibrio del sistema.

Porque los teoremas de recurrencia son resultados "globales", lo que significa que si se pretende representar una curva mediante un campo vectorial, que es una representación "local", y esa curva cubre todo el intervalo del parámetro temporal, el campo vectorial debe ser "completo", *i.e.*, sus curvas integrales están bien definidas para todo el rango del tiempo. Si no se impone la condición de compleción, la representación será necesariamente local, y los resultados de Poincaré sobre recurrencia quedarían abiertos a contrajemplos. Vemos, entonces, que el resultado no es generalmente válido, sino que está restringido a la clase de los campos vectoriales completos. Birkhoff concibió la estabilidad de manera diferente a Poincaré, ya que dice que un movimiento es *positivamente estable* si, y solo si, las trayectorias del mismo, para todo tiempo $t > t_0$ se mantienen exteriores a cualquier $\epsilon$ vecindad de S. De la misma manera, con los signos cambiados, se define el movimiento negativamente estable. Con esto, el límite $\omega$ del movimiento se introduce de la siguiente manera: se dirá que todos aquellos puntos a los que se aproximen las trayectorias del sistema, sin alcanzarlos, cuando $t \to +\infty$ constituyen el conjunto límite $\omega$, y asimismo se define el límite $\alpha$, solo que con signo cambiado.[16]

El movimiento recurrente lo define Bikhoff, nuevamente bajo la égida de Hadamard, en la sección III en la forma:

C *Todo conjunto acotado $M'$ de movimientos positiva y negativamente estables, tal que todo movimiento de $M'$ admite a $M'$ como su límite $\alpha$ así como su límite $\omega$, será denominado "minimal", y cualquiera de sus miembros "recurrente".*

Un conjunto, $M$, cerrado y acotado (compacto) invariante ante un flujo se denomina "minimal" si carece de subconjuntos compactos invariantes ante ese flujo. Debido a esto los movimientos en $M$ se pueden definir como "recurrentes". Una representación de esta situación es la siguiente: porque $M$ carece de subconjuntos invariantes no habrá puntos que queden atrapados en una región, por lo tanto, deberán recorrer todo $M$. La definición de Birkhoff incluye los límites $\alpha$ y $\omega$ para enfatizar la necesidad de la consideración global. Dos son las innovaciones que se introducen en el artículo de Birkhoff. Primero, la consideración explícita de los puntos singulares y, segundo, la

[16] En una dimensión se puede ilustrar con facilidad la idea subyacente. Sea la trayectoria definida por $e^{-t}$, entonces, el límite $\omega$ consta de un punto, el 0. Se puede ver que carece de límite $\alpha$, pues conforme el tiempo decrece sin límite hacia $-\infty$ la función lo hace de la misma manera.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

cuestión de la compleción del campo vectorial. Con esto ya se rompe el marco del RG y se entra en la red de definiciones sucesivamente más "rigurosas" que cambiarán el sentido del teorema original porque generalizan y tornan más rigurosos los conceptos involucrados. A continuación, Birkhoff establece la definición de estabilidad de Poisson, que es una característica del movimiento recurrente, clasifica los tipos posibles, discurre acerca de los conjuntos perfectos[17] e introduce y ejemplifica un movimiento discontinuo.

3.3 En la obra de Birkhoff, el problema de la estabilidad y su definición no está claro, no obstante, se puede leer Roque 2011 para iniciar la reflexión alrededor de la cuestión. Comienza, como se mostró en la sección 3.2, con el marco teórico preformal de Poincaré y lo formaliza mediante la generalización de los conceptos. Si se recurre a la terminología de Lakatos (1976) se obtiene un problema. De acuerdo con la narrativa de este autor, la "extensión de conceptos" es una técnica escéptica para generar contraejemplos. Birkhoff no alude a ninguno. Toma el marco preformal de Poincaré y de manera directa extiende (generaliza) los conceptos. Por ende, aunque quizá podría haber construido contraejemplos prefiere irse por el lado positivo. En lugar de refutar de manera directa para poder generalizar, introduce un nuevo tipo de movimiento como medio para motivar la introducción de otra concepción de la generalidad. Esta forma de proceder se denominará "refutación indirecta" porque en sí no refuta, más bien ilustra usando algo que no puede conceptualizarse en el marco preformal de los límites del mismo. Lakatos creía que la extensión de conceptos concluía en la pura forma lógica o en la mera irracionalidad. Sin embargo, mediante "refutación indirecta", a los términos se les puede dotar de un nuevo significado sin rebasar la matemática informal y esa forma de proceder continuaría indefinidamente. Así, Birkhoff (1927a y 1927b) no cejó en su producción de concepciones de la estabilidad, ya que generó un programa de investigación cuyo culmen, uno de tantos, fue dar un nuevo significado a las ecuaciones hamiltonianas de la dinámica. De acuerdo con Birkhoff, existe, no sin razones, cierta tendencia a rodear de misterio las ecuaciones de Hamilton debido a su forma. Por ende, para racionalizar esa situación, Birkhoff sostiene que el único significado de esas ecuaciones es que poseen la característica de "estabilidad formal completa", y demuestra que cualquier sistema de ecuaciones con esta propiedad puede transformarse a la forma hamiltoniana. Aquí ya no hay argumentos

[17] Se les denomina así a aquellos que carecen de puntos aislados. Este tipo de puntos no son de acumulación de alguna secuencia.

plausibles, sino definiciones que quieren ser precisas. Se prescinde de imágenes para sustituirlas por postulados convenientes. La construcción del conocimiento matemático se aleja del patrón explicado en 2.3 porque ya no se pedirán, en la constitución del teorema, argumentos de plausibilidad, sino definiciones y dominios de las definiciones. Se quiere pasar de la supuesta conjetura a la demostración del teorema obviando los argumentos coloridos. Y estos son, como se sabe, los motivos para creer en el teorema.

## 4. *Los modelos de las premisas*

4.1 Hemos visto que el teorema de recurrencia, tal cual lo presenta Poincaré, se integra de cuatro pasos interrelacionados:

1. La motivación del teorema, que se compone de los elementos que le garantizan su plausibilidad.

2. La demostración de una recurrencia.

3. La demostración de infinitas recurrencias.

4. La demostración de la probabilidad nula de las trayectorias no recurrentes.

Sin embargo, retomando los puntos (a)–(b) de la sección 2.3 es muy simple imaginar contraejemplos. En este punto se necesita introducir una distinción. Los argumentos verbales presentan condiciones que un "modelo" de las mismas puede satisfacer. Aquí "modelo" tiene el mismo sentido que en geometría: los axiomas de Euclides son condiciones que satisfacen algunos espacios, pero no todos. Luego, las objeciones 2.3 (a) y 2.3 (b) nos indican que no se ha construido un adecuado modelo matemático, es decir, un modelo en la teoría de conjuntos. Por lo tanto, precisar el modelo es precisar los conjuntos que satisfacen esas condiciones. Aquí entran, entonces, las teorías de la integración de Lebesgue, para remontar 2.3 (a), y el concepto de "transitividad métrica" para tratar de remontar 2.3 (b), lo que impone la necesidad de demostrar la compleción de un campo vectorial dado en condiciones cada vez más generales. Lo que es un problema de análisis global. Por ende, la supuesta simplicidad del teorema es un derivado de su CP[18] y se debe concluir que TR no era un "teorema" porque apenas se tienen dos pasos que, aunque fundamentales,

[18] En contraste con lo simple de su estructura, el TR posee cierta complicación histórica, pues se enunció tras descubrirse un error en el teorema principal de estabilidad en la primera versión de Poincaré (1890). Esta ganó un premio que ofreció el rey de Suecia y Noruega, Oscar II, en 1889. Tal es un tema subyacente

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

no garantizan la demostrabilidad del mismo. Se cuenta con una serie de ejemplos que motivan el teorema, y una secuencia de razonamientos llenos de omisiones, que inducen a creer en el enunciado. Pero no hay demostración debido a los vacíos distinguibles en el argumento. Por lo tanto, no se puede asegurar que se conoce el teorema de recurrencia, en el sentido que se explicó en la sección 2.3. En otras palabras: no hay un modelo funcional de las imágenes que nos trasmiten los ejemplos ni de los argumentos verbales que nos llevan a creer en el TR. Por lo tanto, es una “conjetura”. Pero esto es así en retrospectiva, no desde el punto de vista de la época de Poincaré, que sí creía tener un teorema pleno. En los libros de mecánica clásica de nivel intermedio e incluso avanzado no suele enunciarse el teorema de recurrencia, y cuando se hace está incompleto, pues falta el corolario, lo que es incoherente tanto teórica como históricamente. Kurth (1960) no es una excepción, introduce el teorema desde la mecánica estadística, que es el contexto más común para enunciarlo, pues se utilizó contra el teorema de H de Boltzmann. Pero Kurth (1957) sí introduce un tratamiento bastante detallado del teorema con conceptos modernos que explica con detalle, y no olvida el corolario como parte del teorema de la recurrencia. Arnold (1989) sólo discute el teorema de recurrencia sin el corolario, pero su manera de demostrar el teorema es preferible a la de Kurth, pues la notación de este último es plúmbea. En la siguiente sección se explican algunas versiones del teorema de la recurrencia más o menos modernizadas.

4.2 En esta sección se exponen dos versiones de la fase formal del teorema de recurrencia, con el fin de contrastar la pobreza conceptual de la fase preformal con la plétora de definiciones y procedimientos de la fase formal. Pero, al mismo tiempo, resulta claro que en esta última no hay ejemplos “intuitivos” o “experimentos mentales”, en cambio, en la fase preformal abundan.

Así, pues, se requieren ciertas definiciones. Para cubrir los contraejemplos derivados de 2.3 (a) se introduce el concepto de espacio medible, que es el siguiente:

a Robadey 2016, pues muestra que Poincaré enunció el TR, y lo reelaboró con amplitud, una vez que, en su discusión con Phragmén, se convenció de que el teorema principal propuesto en la primera versión de Poincaré (1890) tenía un error. Ese hecho indujo en Poincaré la necesidad de cambiar de posición el TR dentro del marco general de su teoría, pues de resultado ancilar adquirió una eminencia notable junto al concepto de “estabilidad de Poisson”. Sin embargo, esa complejidad de su elaboración no debe ocultar que Poincaré construye un CP sencillo, que por lo regular se perderá en enunciaciones “didácticas” del TR. El error de Poincaré se discute en Bromberg y Pérez-Chavela 2014.

*Def1*. Decimos que $\Omega$ es un "espacio medible" si, y solo si, existen $D$, $\sigma$, $m$ tales que:

A1. $\Omega = \langle D, \sigma, m \rangle$ .

A2. $D$ es una variedad diferenciable.

A3. $\sigma$ es una sigma-álgebra de conjuntos definidos en $D$.

A4. $m$ es una medida definida en $\sigma$, *i.e.*, una función de la forma $m : \sigma \to R$ donde $R$ es el conjunto de los números reales.

Los elementos de la sigma-álgebra son los "conjuntos medibles", en tanto que $m$ es una "medida" que tendrá las propiedades requeridas de aditividad para conjuntos disjuntos y continuidades creciente y decreciente, así como subaditividad para conjuntos no disjuntos.[19] Modelos de estos postulados son los conjuntos de Borel y la integral de Lebesgue en $R^N$, que podemos tener en mente para evitar el vacío de las generalidades. Pero no es necesario: el teorema de recurrencia puede funcionar en la más alta abstracción, si se tienen en cuenta las restricciones matemáticas necesarias.

Volvamos ahora sobre 2.3(B). Si se establece que la recurrencia tendrá lugar en el espacio accesible al flujo, bien puede ser un espacio de un único punto: el de equilibrio. El teorema es trivial. Por el contrario, para hacer la situación lo más general posible: ¿qué condiciones sobre los campos vectoriales y los espacios que recorrerán se deben imponer para que lleguen a todo el espacio disponible? Es decir, en lugar de definir, *a priori*, que el espacio accesible al flujo es aquel "hasta donde llegue", cambiamos la pregunta por una más general: Dado un espacio fijo y arbitrario, $D$, ¿qué condiciones de conectividad permiten que las trayectorias del flujo lo llenen?

*Def2*. Diremos que el conjunto $D$ es "métricamente descomponible" si, dado $D_1$ con $m(D_1) > 0$ e invariante bajo el flujo, existe un conjunto invariante ante el flujo $D_2 \subset D$ de medida positiva y tal que $m(D_1 - D_2) > 0$.

Lo que esta definición indica es que un conjunto $D$ tiene varios subconjuntos invariantes ante el flujo. Y si lo son, cuando una trayectoria entra en alguno queda atrapada. De nuevo es la misma idea que la de conjunto minimal de Birkhoff. Con esto se enuncia el siguiente

[19] Véase Saks 1937.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

*Teorema de recurrencia (Tr).*

Dado el flujo $g : N \times R^N \rightarrow R^N$ biyectivo definido sobre una región $D$ métricamente indescomponible, entonces las condiciones:

i. Volumen finito $m(D) < \infty$.

ii. Preservación de volumen: $m\left(g^n D\right) = m(D)$.

iii. Cobertura de $D$ por los conjuntos: $\varphi_n A = A_n$; *i.e.*, para todo $n$, $A_n \subset D$ y existe un $m$ tal que $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = D$.

son suficientes para que exista recurrencia.

*Demostración:*

Supongamos que los conjuntos $A_n$ son disjuntos, *i.e.*, supongamos que nunca hay recurrencia alrededor de un pequeño entorno del punto en movimiento. Por lo tanto, tendremos, directamente de las propiedades de adición de la función que mide el volumen y de la condición iii:

$$\sum_{i=0}^{\infty} m(A_i) = m(D) < \infty$$

Pero de la preservación del volumen, condición i, tenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} m(A_i) = m\left(A_0\right) \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Cosa que contradice una de las premisas. Ergo, los conjuntos $A_i$ no son disjuntos. *QED*.
Ahora una demostración del corolario:

*Corolario al teorema de recurrencia*: Sea $B$ un subconjunto medible de $R^N$ y sea $G \subset B$ tal que si $x \in G$ entonces existen un número $l$ de tiempos de retorno, $n_1, \ldots, n_l$, con $l \rightarrow +\infty$ tales que, para cualquier $j$, $g^{n_j} x \in B$. Luego $m\ (B/\ G) = 0$.

*Comentario:* Como se puede apreciar, si $G$ es el conjunto de puntos recurrentes de $B$, el conjunto de puntos no recurrentes es $B/G$.

*Dem.* Se define el conjunto de trayectorias:

$$A_N = \bigcup_{n \geq N} g^n B$$

Cada uno de estos conjuntos se diferencia del anterior porque se cambian las condiciones iniciales. $A_0$ es un conjunto de trayectorias que comienzan en $B$ y a partir de ahí se unen los puntos de este conjunto con las subsecuentes imágenes bajo el flujo, lo que permite una representación ingenua de la trayectoria como un conjunto de "líneas de fuerza" o "líneas de flujo". Con $A_1$ la situación es similar, pero las condiciones iniciales se toman de $gB$. Si se toma la intersección de estos conjuntos, desde 0 hasta infinito, nos queda el límite de las trayectorias:

$$S = \bigcap_{N=0}^{+\infty} A_N$$

Es claro que $A_0 \cap A_1$ no tiene puntos en $B$, pues este conjunto está excluido de $A_1$. Y así sucesivamente. En la teoría de la integral se denomina a $S$ el límite superior de la secuencia de conjuntos $g^n B$.[20]

Luego, es inmediato que cualquier punto recurrente tendrá, en el tiempo $t = 0$, una posición en $B$, pero debido a que recurre, tendrá otra posición en $B$ en un tiempo posterior, en el "lejano futuro". Por ende, el conjunto $B$ y el conjunto $S$ tienen puntos comunes. Esto es $G = B \cap S$. Debido a que los conjuntos $A_N$ están anidados, tal que $A_{N+1}$ está contenido en $A_N$, la secuencia se dice "descendente" (Saks 1937, p. 5) lo que la hace convergente. Además, se tiene que:

$$m(A_{N+1}) \leq m(A_N) \leq ,\ldots, \leq m(A_0)$$

Indicativo de que el límite de la secuencia es $m(A_0)$. Si se recuerda que para secuencias monótonas decrecientes $\lim_{N\to+\infty} A_N = S$ (p. 5) obtenemos sin mayor esfuerzo que (p. 8):

$$\lim_{N\to+\infty} m(A_N) = m(\lim_{N\to+\infty} A_N) = m(S)$$

Aquí la integral de Riemann falla, "en general", pues no se pueden intercambiar límites para funciones no acotadas o no diferenciables. Por tanto, si se recuerda que el límite de la secuencia descendente es $m(A_0)$, obtenemos:

$$m(S) = m(A_0)$$

Si esto es así, significa que los conjuntos $S$ y $A_0$ tienen la misma medida. Por ende, también $S \cap B$ y $A_0 \cap B = B$ la tienen. Es decir:

[20] Véase Saks 1937.

 DOI:https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.2025.1666

$m(G) = m(B)$. Así que el conjunto de puntos no recurrentes tiene medida nula. *QED*.

Arnold (1989) demuestra el teorema de la recurrencia de manera tan simple que vale la pena recordarlo. Lo enuncia de la siguiente manera:

(AR) *Sea $g$ un mapeo uno a uno, continuo y preservador del volumen, que transforma una región acotada $D$ del espacio euclideano en sí misma: $gD = D$. Entonces en cualquier entorno $U$ de un punto cualquiera de $D$ hay un punto $x \in U$ que recurre sobre $U$,* i.e., *$g^n x \in U$ para algún $n > 0$.*

Y lo demuestra como sigue:

(DAR) Consideremos las imágenes de un entorno $U$:

$$U,\ gU,\ g^2U, \ldots, g^nU$$

Todas tienen el mismo volumen. Si nunca se intersectan $D$ tendría volumen infinito. Por lo tanto, existen $k \geq 0$ *y* $l \geq 0$ *con* $k > l$ tal que:

$$g^kU \cap g^lU \neq \emptyset$$

A partir de este punto la aplicación de la inversión temporal es la parte final de la demostración. Se puede notar la enorme distancia entre Tr y AR con el TR de la sección 2.1. Para Poincaré, y con él todo el siglo XIX, el RG operaba a nivel inconsciente, era un "hábito" en el sentido de Peirce. Por esto, no se insertaban condiciones relativas a la manera en la que el mapeo correlacionaba los puntos de un conjunto al otro, y esta era la problemática subyacente a la generalización del proceso de integración[21] que es donde surgieron las funciones "patológicas" que llevaron a nuevos modos de concebir las funciones y los mapeos.

Se mencionó que las condiciones son suficientes, aunque no necesarias. Esto significa que, si bien dadas las condiciones se siguen la recurrencia y el corolario, no es claro si un sistema que recurre satisface todas esas condiciones. Pero, dado que las premisas son muy claras, se pueden cuestionar una a una. ¿Se puede quitar la condición de preservación del volumen? Si el volumen no se preserva quedan dos posibilidades: o se expande o se contrae.

La cuestión es: si el mapeo no preserva el volumen, ¿ello implica que no hay recurrencia? Es decir, ¿es la preservación del volumen una

[21] Véase Hawkins 1970.

condición necesaria de la recurrencia? Se demostrará a continuación que la condición no es, en general, necesaria.

Para lograr ese resultado se introduce el caso "algebraico", que supondremos definido por una ecuación en diferencias dada por:

$$m(g^n U) = \sum_{l=1}^{n} a_l m(g^{n-l} U) \tag{6}$$

En general, si los coeficientes son constantes, la solución de la ecuación en diferencias se puede obtener muy fácilmente si colocamos:

$$m(g^n U) = b^n m(U) \tag{7}$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación algebraica para $b$.

$$b^n = a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \ldots + a_0$$

Que tiene $n$ soluciones para $b$. Se denomina "caso algebraico" porque las soluciones son números algebraicos. El caso particular que nos permite mayor control sobre los valores que puede tomar $b$ es cuando todos los coeficientes son 0, excepto $a_1 = 1$. En esa situación los valores de $b$ quedan casi arbitrarios.

Entonces se tiene el siguiente resultado.

*Teorema disipativo de recurrencia (TDR)*

Sea $g$ un flujo uniparamétrico biyectivo definido en la región $D$. Las siguientes condiciones:

1. $D$ tiene volumen finito.

2. $g$ es tal que $m(g^n U) = b^n m(U)$.

3. Se satisface la condición: $m(U) > (1 - b)m(D)$.

4. El flujo es "completo" en el sentido de que al variar su parámetro sobre todo su rango accesible la órbita recorre todo $D$. O bien: $D$ es conjunto minimal.

5. La unión de los conjuntos de la forma $g^n U(x)$ para cualquier $x$ de $D$ están contenidos en $D$.

6. El flujo es invariante ante inversión temporal.

Son suficientes para que, si se toma un entorno de un punto $x$ de $D$, que llamaremos $U(x)$, entonces existan $k$ y $l$ mayores o iguales a 0 tales que

$$g^k U(x) \cap g^l Ux \neq \emptyset$$

*Demostración:*

Supongamos que los conjuntos de la secuencia $U$, $gU$, $g^2U, \ldots$ $g^nU, \ldots$, son todos disjuntos. Por lo tanto:

$$\sum_{i=0}^{\infty} m(g^i U) = \frac{m(U)}{1-b}$$

pero, por otro lado, debido a que no existen intersecciones, se debe cumplir que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} m(g^i U) =< m(D)$$

porque las imágenes de $U$ están todas contenidas en $D$. Luego, se obtiene la inecuación:

$$m(U) < (1-b)m(D)$$

Que vale cuando no existen intersecciones. Pero si las hay, entonces: $m(U) > (1-b)m(D)$. Si esta inecuación no se satisface no hay intersección. Por lo tanto, debido a la condición (3) del teorema, notamos que sí la hay. Entonces, existe recurrencia. *QED.*

Si se piensa "en general", la recurrencia parece derivarse de la preservación del volumen por el flujo. Pero no es así, la recurrencia se deriva, utilizando una descripción imprecisa, del "amontonamiento" de los conjuntos en el espacio que le es accesible a la dinámica. Esto parece muy claro cuando el volumen se preserva, y de hecho en tal caso no se requieren condiciones iniciales particulares. Ahora bien, en el caso disipativo, la "intuición" descarría, pues induce la creencia de que la reducción de los volúmenes es tan rápida que no se amontonarán. No es así, si se elige adecuadamente el volumen inicial, la reducción de volumen dejará de ser importante y las imágenes de los entornos por la dinámica se intersectarán, provocando recurrencia. Hay una manera más simple de mostrar que la causa de la recurrencia es la finitud del espacio accesible. Para ello se utiliza una dinámica discreta, un sistema dinámico con $l$ estados, como se ilustra en Wallace 2015. El teorema de recurrencia para sistemas de estados finitos es como sigue:

Sea $S$ un sistema finito definido por $N$ estados $S = \{a_1 \ldots a_N\}$. Se define un operador invertible $O : S \to S$ entonces

*Teorema de recurrencia para estados finitos*

Un sistema con un número finito de estados es recurrente.

*Demostración*

La secuencia $a, Oa, O^2a, \ldots,$ no genera un número indefinido de resultados diferentes, pues el sistema es finito y eventualmente habrá $n$ y $m$ tales que $O^m a = O^n a$. Por lo tanto: $O^{m-n}a = a$. *QED.*

## 5. *Conclusión*

Si por "rigor" se entiende enumeración de excepciones y su inclusión en el teorema (Lakatos 1976, p. 24) es lo que hace Poincaré al notar que existen excepciones al TR y diseñar un método para establecer que, por improbables, se deben desdeñar. A este tipo de rigor se le denominará e-rigor, y es parte de los métodos diseñados para reconstruir el RG.[22] Sin embargo, el e-rigor evita el análisis de la demostración. Del análisis de esta surgen los CGD, que Birkhoff utiliza para introducir no un contraejemplo, sino un caso que no cabe en el dominio del teorema original. De donde no hay refutación directa sino indirecta. Por ende, los teoremas de recurrencia de Birkhoff son completamente diferentes a los de Poincaré porque incorporan nuevos conceptos surgidos del detallado análisis del teorema. Al tipo de rigor que no consiste en la enumeración de excepciones sino en crear CGD resultado del análisis de la demostración, se le llama a-rigor (Lakatos 1976, p. 33). El problema con este tipo de proceder, y en gran medida esa es la ruta que sigue la matemática contemporánea, consiste en que la EF de cualquier teorema se considera apenas el primer eslabón de una sucesión de etapas formales que no concluyen nunca, pues cada teorema a-riguroso no lo es si, tras un análisis del mismo, se introducen nuevos CGD. Esta es una objeción escéptica, por supuesto, pues del continuo crecimiento de las etapas formales se puede inducir que no hay límite alguno, y que los nuevos teoremas se volverán o muy pobres de contenido o completamente ininteligibles. Paliar esto es la función de la enseñanza de las matemáticas, pues a cada resultado a-riguroso se le diseñará un CP particular cuando sea posible. El a-rigor no es el final del proceso. Como se ilustró en la sección 4 es posible cambiar las diferentes premisas del teorema

[22] Poincaré (1905/2001, p. 214/p. 203) consideraba que el rigor que se obtenía a fines del siglo XIX era absoluto.

de recurrencia, de modo tal que un teorema como el TDR no es ya ni siquiera parecido al original de Poincaré, pues elimina la premisa de conservación del volumen. A estos teoremas, construidos no por introducción de CGD tras un análisis de la demostración, sino por variación de las premisas, se les nombra p-teoremas. De este tipo de teoremas, con cambio en las premisas de partida, se puede encontrar una gran variedad en Hopf 1948. Ante esa situación, a lo que se apunta es al teorema final, cuyas condiciones deben ser suficientes y necesarias.[23] La ruta hacia el teorema final, que debe ser pletórico de contenido y al mismo tiempo más profundo que la conjetura ingenua, no tiene límite, o eso resulta de una "inducción pesimista" a la vista del crecimiento del saber matemático. Ahora bien, en este escenario la construcción de un CP para los teoremas es una práctica poco frecuente en los matemáticos y lógicos, porque parecen dejarla a los docentes y divulgadores como transductores del saber erudito. Sin embargo, es uno de los puntos capitales de la construcción del teorema, pues todos comienzan como conjeturas plausibles, resultado de intuiciones acerca de las relaciones entre los objetos matemáticos. El teorema de recurrencia de Poincaré es plausible a través de ejemplos con cuerpos gravitantes o fluidos ideales. Y estos mantienen su atractivo pese a que el teorema enunciado por Poincaré ya haya sido "superado" por las versiones modernas del mismo. Por eso se afirma que los CP son invariantes históricos pues, en cualquier época, logran hacer plausible un resultado. Demostrarlo ya es un ideal regulativo.[24]

## BIBLIOGRAFÍA

Appell, Paul, 1928, *Oeuvres de Henri Poincaré*, Tomo I, Gauthier-Villars, París.

Arnold, Vladímir, 1989, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, Nueva York.

Aubin, David, y Amy Dahan Dalmedico, 2002, "Writing the History of Dynamical Systems and Chaos: *Longue Durée* and Revolutions, Disciplines and Culture", *Historia Mathematica*, vol. 29, no. 3, pp. 273–339. (https://doi.org/10.1006/hmat.2002.2351)

Bathia, N.P., y G.P. Szegö, 1970, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer Verlag, Berlín.

Birkhoff, George D., 1927a, "Stability and the Equations of Dynamics", *Amer. Jour. Math.*, vol. 49, no. 1, pp. 1–38.

[23] Véase Lakatos 1976, p. 63.

[24] Agradezco a Thomas Hawkins su franqueza y separatas, a Juan José Romero y Gabriela Flores por el espacio para escribir y a Isabel Varela por el tiempo.

Birkhoff, George D., 1927b, *Dynamical Systems, American Mathematical Society*, Providence, Rhode Island, Estados Unidos.

Birkhoff, George D., 1912, "Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques", *Bull. Soc. Math de France*, vol. 40, pp. 305–323.

Bôcher, Maxime, 1900, "The Theory of Linear Dependence", *Annales of Mathematics*, vol. 2, pp. 81–96.

Bromberg, Shirley, y Ernesto Pérez-Chavela Lacomba, 2014, "El error que cambió la mecánica celeste. Las vicisitudes de Poincaré", *Miscelánea Matemática*, vol. 58, pp. 137–152.

Chemla, Karine, Renaud Chorlay, y David Rabouin, 2016, *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford University Press, Reino Unido.

Condillac, Etienne Bonnot, 1822, *La langue des calculs, Leconte et Durey*, París, tomo 16 de las Obras completas.

Hadamard, Jacques, 1897, "Sur les trajectoires en dynamique", *Journal de Mathêmatiques*, vol. 3, pp. 331–388.

Hawkins, Thomas, 2005, "Frobenius, Cartan and the Problem of Pffaf", *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 59, no. 4, pp. 381–436.

Hawkins, Thomas, 1970, *Lebesgue's Theory of Integration*, University of Wisconsin Press.

Hopf, Eberhard, 1948, *Ergodentheorie*, Chelsea, Nueva York.

Jaffe, Arthur, y Frank Quinn, 1993, "Theoretical Mathematics': Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics", *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 29, pp. 1–13.

Kurth, Rudolf, 1960, *Axiomatics of Classical Statistical Mechanics*, Pergamon, Reino Unido.

Kurth, Rudolf, 1957, *Introduction to the Mechanics of Stellar Systems*, Pergamon, Reino Unido.

Lakatos, Imre, 1976, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Liapounoff, Alexandr, 1907, "Probléme géneral de la stabilité du mouvement", *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2 series, vol. 9, *Annals of Mathematics Studies*, 1947, Princeton/Oxford.

Landau, Lev, y E.M. Lifchitz, 1971, *Mécanique des fluides*, Éditions Mir, Moscú.

Letellier, Christophe *et al.*, 2021, "Some Elements for a History of Dynamical Systems Theory", *Chaos*, vol. 31, no. 5, 053110. (https://doi.org/10.1063/5.0047851)

Nemytskii, Viktor-Vladimirovich, y V.V. Stepanov, 1989, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Dover, Nueva York.

Poincaré, Henry, 1905, *La valeur de la science*, Flammarion, París. [Versión en inglés: *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*, Modern Library, Nueva York, 2001.]

Poincaré, Henry, 1899, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Tomo III, Gauthier-Villars/Dover 1957, Nueva York.

Poincaré, Henry, 1890, "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", *Acta Mathematica*, vol. 13, pp. 5–270.

Poincaré, Henry, 1885, "Sur les courbes définies par les équations différentielles", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4 serie, tomo 1, en Appell 1928, pp. 90–161.

Poincaré, Henry, 1882, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques*, 3 serie, tomo 7, en Appell 1928, pp. 3–84.

Robadey, Anne, 2016, "Elaboration of a Statement Degree of Generality of a Property: Poincaré's Work on the Recurrence Theorem", en Karine Chemla *et al.* 2016, pp. 169–222.

Roque, Tatiana, 2011, "Stability of Trajectories from Poincaré to Birkhoff: Approaching a Qualitative Definition", *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 65, no. 3, pp. 295–342.

Ruelle, David, 1991, *Hasard et chaos*, Éditions Odile Jacob, París.

Ruelle, David, y Floris Takens, 1971, "On the Nature of Turbulence", *Les Recontres Physiciens-Mathématiciens de Strasbourg RCP–25*, Conferencias de Haïm Brézis, David Ruelle et Floris Takens y un texto de Rosemonde Gérard et Mme A. Sec, tomo 12, presentación no. 2, 44pp.

Saks, Stanislaw, 1937, *Theory of the Integral*, Hafner, Nueva York.

Sheynin, Oscar B., 1991, "H. Poincaré's Work on Probability", *Arch. Hist. Exact Sci.*, vol. 42, no. 2, pp. 137–171.

Wagon, Stan, 1987, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wallace, David, 2015, "Recurrence Theorems: A Unified Account", *Journal of Math. Phys.*, vol. 56, no. 2. (https://doi.org/10.1063/1.4907384)

*Recibido el 30 de julio de 2024; aceptado el 9 de diciembre de 2024.*