POSIBILIDADES DE GENERALIZACIÓN DE LAS LÓGICAS CUÁNTICAS

CARLOS LUNGARZO
Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia

En un trabajo anterior (*Crítica*, IX (1977), nº 27, p. 49) dimos algunas evidencias en favor de la siguiente tesis: el valor epistemológico de las lógicas cuánticas reside en considerarlas como *teorías* (o, por abuso de lenguaje, como modelos para teorías), más que como cálculos lógicos propiamente dichos. Los cálculos lógico-cuánticos de proposiciones (p.e., Kalmbach [9]) o de predicados de primer orden (p.e., Dishkant [3]), tienen un interés intrínseco propio para el especialista en lógicas no clásicas, pero lo que da significado metodológico a las familias de estructuras llamadas "lógicas" cuánticas es su carácter modelístico, el cual está fundamentado en (y es analizado con ayuda de) la lógica habitual.

El término 'lógica cuántica' será usado aquí siempre en este sentido que es, por otra parte, el consagrado en la literatura epistemológica y física. Aun cuando esa lógica surgió de consideraciones sobre los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert asociado con un sistema físico, las generalizaciones formales se presentaron rápidamente en la literatura. Luego de los clásicos trabajos de Von Neumann, Birkhoff, Mackey, Varadarajan, Jauch y Piron, aparecieron numerosas corrientes que presentaron diversas familias de estructuras, todas ellas inspiradas en el modelo hilbertiano (por ejemplo, retículos ortomodulares, conjuntos parcialmente ordenados ortomodulares, álgebras parciales, etc.). Se produjo un fenómeno análogo al desenvolvimiento de la lógica algebraica en el caso clásico: aunque la lógica clásica es un álgebra de Boole (en su aspecto proposicional) de dos elementos (verdadero y falso, o *0* y *1*, etc.) "básicos", aparecieron en seguida formulaciones generales de las álgebras de Boole, entre cuyos modelos estaba esta lógica, pero que admitían muchos otros.

Lo que nos interesa considerar en este trabajo es cuáles, entre las generalizaciones de la lógica del espacio de Hilbert, conservan todavía significado metodológico. Por ejemplo, un retículo ortomodular *finito* es (un modelo de) una lógica cuántica, pero carece de interés físico. Se precisa entonces considerar las generalizaciones formales ya existentes y, entre ellas, destacar las que consisten en una extensión del "modelo básico", por ejemplo, modificando las exigencias sobre el espacio o sobre el cuerpo* de números, o sobre otros objetos matemáticos que tienen significación empírica. Inclusive, se debe contemplar la posibilidad de futuras generalizaciones formales que permitan la introducción de nuevos espacios, o sea, que consistan, simultáneamente, en generalizaciones "de contenido", con ampliación del espectro de aplicaciones a las teorías físicas. A través de un muestreo de los resultados principales hasta ahora conocidos, se conjetura que tales generalizaciones (llamémoslas "epistemológicamente significativas") *simplemente no son posibles,* y que la modificación de los modelos "naturales" de las teorías cuánticas (problema que está en el ápice de la polémica actual), produciría estructuras muy diferentes de las actuales, a las que sólo por analogía histórica podría rotularse de "lógicas". Por supuesto, aun cuando esta conjetura sea cierta, una prueba rigurosa de la misma no se podrá dar hasta que sean bien conocidos los papeles de nuevas herramientas matemáticas en las teorías físicas.

1. *La lógica de los operadores*

Vamos a suponer, como de costumbre, que una primera aproximación de un sistema físico S, requiere la identificación de S con un cierto espacio de Hilbert H_S, y de los elementos

* En el texto, el autor utiliza la palabra cuerpo en lugar de la palabra campo, que es la usual en México. (N. del E.)

"empíricos" de S (observables, estados, etc.) con elementos "típicos" de H_S, p.e. operadores, rayos, etc.

En lo sucesivo, indicaremos H_S simplemente por "H", sobreentendiéndose el sistema cuando eso no conduce a confusión.

Esta conocida identificación (que puede verse en el libro de Mackey [11] o en la más reciente tesis de Brown [1]) no requiere ser establecida como axioma de la teoría formalizada de la mecánica cuántica, ya que resulta como consecuencia de otros grupos de axiomas que admiten el *"postulado"* del cuerpo de los complejos (Maczynski [13]).

Sea H el espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, sobre el cuerpo K (todavía a determinar), y Hm(H) la clase de todos los operadores hipermaximales en H. Si consideramos todos las *proyecciones ortogonales,* que evidentemente estarán dentro de Hm(H), podemos construir una *lógica,* en el sentido de que esas proyecciones son nuestras proposiciones. De ahora en adelante, identificaremos el concepto de proyección con el de proposición cuántica, y rotularemos PR(H) al conjunto de las mismas. La idea de que ellas son "realmente" proposiciones, viene sugerida por varias analogías formales, y, como sabemos, es posible incluso definir conectivas entre los elementos de PR(H). Estas proposiciones se comportan muy similarmente a las proposiciones clásicas, con la excepción más notable de que no vale la propiedad distributiva entre la conjunción y la disyunción.

El operador idénticamente nulo O y el operador identidad I pueden considerarse como (la clase de equivalencia de) la contradicción y la tautología, respectivamente. Si A y B están en PR(H) y ambos conmutan (considerados como operadores), es decir si

$$AB = BA$$

entonces es fácil definir una conjunción y una disyunción en términos de las operaciones algebraicas entre operadores:

$$A \wedge B := AB$$
$$A \vee B := A + B - AB$$

En general, sin embargo (cf. Holland [6]), si no se dan condiciones especiales, no hay manera directa más o menos natural de definir las conectivas. Por ejemplo, A + B puede *no* ser un proyector si A y B no conmutan. Para tener definiciones siempre aplicables, conviene aprovechar el isomorfismo de PR(H) con SC(H), el conjunto de todos los subespacios cerrados de H, realizado por la siguiente función f:

$$f\colon PR(\mathrm{H}) \to SC(\mathrm{H})$$

definida así: para cada A en PR(H), es

$$f\colon \ A \to \mathrm{Im}(A)$$

donde "Im(A)" denota la imagen del espacio bajo el operador A, o sea: A[H].

Con esto, ya las conectivas pueden definirse de una manera que, aunque indirecta, es muy precisa y vale en todos los casos. La "negación", sin embargo, admite todavía una definición general que es independiente de la identificación hecha entre las proposiciones y los subespacios. En efecto:

$$\sim A := I - A$$

donde la diferencia del segundo miembro es la "resta" algebraica usual entre operadores. La función f nos servirá, ahora, para definir la conjunción y la disyunción en todos los casos: el símbolo "*cl*" indica la clausura del subespacio al cual se aplica.

$$A \wedge B := f^{-1}(f(A) \cap f(B)) = f^{-1}(\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B))$$
$$A \vee B := f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A) + f(B))).$$

lo cual tiene sentido porque f es una aplicación biunívoca y suprayectiva.

Vamos a definir ahora la implicación a la manera de Dishkant [3], p. 13:

$$A \supset B := \sim(A \vee B) \vee B$$

Luego, nuestro conjunto de proposiciones ha sido dotado de operaciones análogas con las conectivas proposicionales usuales. Es fácil verificar que se cumplen muchas de las leyes conocidas, aunque, por ejemplo, falla la distributividad:

$$A \vee (B \wedge C) \neq (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Esto ocurre ya cuando la dimensión del espacio H es mayor que 1. Con más razón entonces en nuestro caso, en que H es de dimensión infinita. Más todavía, en el caso infinito, es falsa inclusive la igualdad *modular*. En cambio, siempre es válida la igualdad *ortomodular*, que, en cierto sentido, es la que "caracteriza" esta "nueva lógica":

$$A \vee (\sim A \wedge (A \vee B)) = (A \vee B)$$

Podemos agregar todavía una relación de orden parcial entre las proposiciones de nuestra lógica. El significado de la definición es claro:

$$A \leqslant B := ((A \wedge B) = A)$$

La abreviatura $A < B$ (de $(A \leqslant B) \& (A \neq B)$) será usada a menudo sin indicación explícita.

Luego, tenemos una descripción relativamente satisfactoria de lo que llamaremos "*la lógica del espacio de Hilbert H*", que indicaremos por $LG(H)$. Puede ser considerada como una estructura algebraico-relacional con dos elementos distinguidos, donde $PR(\mathrm{H})$ es el universo:

$$LG(\mathrm{H}) = (PR(\mathrm{H}); \wedge, \vee, \sim, O, I, \leqslant)$$

Es claro que no existe una sola lógica, unívocamente determinada, hasta no fijar el cuerpo K, sobre el cual está definida la estructura vectorial de H. (Como se sabe, habitualmente este cuerpo es elegido entre el de los números reales **R**, los complejos **C**, o más raramente, los cuaterniones **Q**.) Se deduce que, conocido exactamente el espacio de Hilbert H, la lógica queda inmediatamente caracterizada por el hecho de que las proposiciones de ese espacio son sus proyecciones ortogonales. No necesitamos una lista de "axiomas" tipo *Principia Matemática* para saber cuáles fórmulas son válidas, pues ellas se demuestran a partir de las propiedades algebraicas de los operadores, que ya se conocen a través del análisis funcional.

2. *La teoría reticular*

La "cantidad" de lógicas que podemos obtener, haciendo variar el espacio de Hilbert H es reducida. Veremos después que existen limitaciones sobre la elección del cuerpo K, el cual es uno de los objetos que pretenderíamos "generalizar" para obtener una cuántica más poderosa. A su vez, la dimensión topológica de H está limitada, si es que queremos que nuestra lógica LG(H) tenga sentido empírico, por lo menos, aceptando las ideas centrales de los creadores de la teoría. Pero, para construir *teorías más generales*, de cuya clase de modelos las LG(H) sean un caso particular, existen algunas soluciones. Esas estructuras asociadas con las teorías pertenecen a la clase ecuacional de los retículos ortomodulares (completos, atómicos, etc.), pero vamos a precisar, en nuestro enfoque, una lógica de segundo orden para desenvolverla.

Sea, entonces, una lógica subyacente de segundo orden con una cantidad arbitraria de variables de predicado de grados diversos, que indicaremos con P, Q, R. S, ... etc. Para los fines prácticos, podemos suponer que ese número de variables es ω. Utilizando esta lógica como subyacente a la teoría, vamos a construir una teoría llamada *OM* (por "ortomodular"), y cuyo lenguaje es el siguiente:

$$L(OM) = L = (', 0, 1, \leqslant)$$

Introducimos dos operadores y una constante de predicado en L por medio de las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN: *2.a* $x \vee y :=$ supremo de (x,y) en el orden $\leqslant$
2.b $x \wedge y :=$ ínfimo de (x,y) en el orden $\leqslant$

La siguiente constante de predicado *At* se lee "... es atómico".

2.c $At(x) : \Longleftrightarrow (0 < x) \; \& \; (\forall y)(0 < y \leqslant x \Longrightarrow y = x)$

Los siguientes son los postulados de la teoría:

AXIOMAS. (i) Postulados de reticulado en general (cf., p.e. Gratzer [19], p. 5 ss)

(ii) $(\forall x) \; (0 \leqslant x \leqslant 1)$

(iii) Postulados relativos al *complemento* $'$

(iii).*a* *Involución* $(x')' = x$

(iii).*b* *Tercero excluido* $(x \vee x') = 1$

(iii).*c* *Contraposición* $(x \leqslant y) \Longrightarrow (y' \leqslant x')$

Los cuantificadores universales, que deberían ser prefijados en el comienzo de las fórmulas, están sobreentendidos.

(iv) Atomicidad
$(\forall x)(0 < x \Longrightarrow (\exists y)(At(y) \; \& \; y \leqslant x)$

(v) Cubrimiento
$(\forall x)(At(x) \Longrightarrow \sim(\exists y, z)(z < y < z \vee x))$

(vi) Ortomodularidad
$x \vee (x' \wedge (x \vee y)) = x \vee y$

(vii) Completud
$(\forall P)[(\exists x)P(x) \Longrightarrow (\exists y)(\forall z)]P(z)$
$\Longrightarrow (z \leqslant y) \& (\forall u)(z \leqslant u \Longrightarrow y \leqslant u)]]$

Consideremos ahora la clase de todos los modelos de la teoría *OM,* o sea *Mod*(OM). Es claro que *LG*(H) pertenece a esta clase, ya que nuestra lógica de operadores del espacio H satisface los axiomas dados aquí para esta teoría, más general, cuyos modelos son los *retículos ortomodulares.*

Esta generalización es puramente modelística, y, por lo tanto, demasiado formal. Nuestra "lógica inicial" *LG*(H) se encuentra ahora incluida en una clase más general, de la cual forman parte todos los modelos de la teoría *OM*. Sin embargo, en la clase *Mod*(OM), existen algunas estructuras (reticulados ortomodulares, atómicos, etc.), que no necesariamente reflejan propiedades relevantes de la mecánica cuántica. Veremos posteriormente, cuáles son nuestras posibilidades de obtener generalizaciones en otra dirección: a saber, de obtener nuevas lógicas de operadores, eligiendo diferentes espacios H_j y, por consiguiente, nuevas estructuras $LG(H_j)$. Esa modificación podría obtenerse, al menos en principio, o bien considerando espacios no hilbertianos, o bien cambiando de cuerpo K para la estructura vectorial, o realizando ambas modificaciones a la vez. Aun así, la esperanza de conseguir una lógica más general parece infundada, como será visto más adelante.

Sin embargo, fueron los mismos lógicos y epistemólogos de la mecánica cuántica, quienes se interesaron por la mera generalización "modelística" de nuestra teoría. Inclusive, se sostuvo la tesis de que el *retículo* ortomodular sería una estructura demasiado restrictiva, y debería ser generalizada a conjuntos ortomodulares que fuesen parcialmente ordenados, pero sin cumplir, necesariamente, las exigencias de existencia de supremo e ínfimo.

En lo siguiente, trataré de dar una formalización de la teoría *COM* (conjuntos ortomodulares), vertiendo en moldes lógicos las descripciones intuitivas corrientes que aparecen, por ejemplo, en Pulmanová o Gudder [15] y [5], respectivamente. Esa formalización no requiere una lógica de segundo orden mas, en la forma aquí presentada, se utiliza esencialmente la lógica infinitaria $(\omega_1; \omega_1)$. Dicho sea de paso, creo que esta formulación no puede ser debilitada, y un argumento semejante al utilizado en el caso de la buena ordenación, podría, tal vez, demostrarlo. De cualquier manera, antes de exponer los axiomas, voy a formular la siguiente

CONJETURA: ¿Admite la teoría de los conjuntos parcialmente ordenados ortomodulares una formulación no más fuerte que $(\omega_1; \omega)$?

Nuestro lenguaje será ahora $L(COM) = L = (', 0, 1, \leqslant)$.

Las definiciones 2.a y 2.b son las mismas, con la salvedad de que el supremo $\vee$ y el ínfimo $\wedge$ no son ahora operaciones totales, definidas para cada par de proposiciones. Por esa razón la estructura resultante no precisa ser un reticulado. Aparecerán, en cambio, algunas definiciones nuevas:

DEFINICIÓN *2.d* $x \perp y :\Longleftrightarrow x \leqslant y'$ (o, equivalentemente, $y \leqslant x'$).

2.e $x \approx y :\Longleftrightarrow (\exists x_1, y_1, z)((x_1 \perp y_1)\ \&\ (y_1 \perp z)\ \&\ (z \perp x_1)\ \&\ (x = x_1 \vee z)\ \&\ (y = y_1 \vee z))$

Los postulados son los siguientes:

AXIOMAS

(i) Axiomas usuales de orden parcial.

(ii) Son los mismos que los axiomas (ii) de *OM*.

(iii) Son los mismos que (iii) de *OM*, con la aclaración de que en la propiedad de tercero excluido iii. b, debe suponerse la siguiente hipótesis:

Para cada x, siempre existe el supremo entre x y x′, y el resultado es x v x′ = 1.

Esto forma parte del axioma porque en *COM* no está garantizado que el supremo de dos elementos exista.

OBSERVACIÓN: La notación "$x \perp y$" se lee como "x es disjunto con y", y tiene el significado habitual de disyunción cuando se considera el caso particular de las álgebras de Boole de conjuntos. La notación "$x \approx y$" se lee "x es compatible con y" y tiene el significado habitual de conmutación cuando se consideran operadores.

Consideramos ahora los axiomas más característicos de *COM*.

(iv) $(\forall x,y)\ (x \leqslant y \Longrightarrow (\exists z)\ (z \leqslant x') \ \& \ (y = z \vee x))$

(v) $[\forall \underset{n<\omega}{x_1 \ldots x_n \ldots}]\ (\underset{i \neq j}{\&}\ x_i \perp x_j \Longrightarrow (\exists y)((\underset{n<\omega}{\&}\ x_n \leqslant y)$

$\& \ (\forall u)(\underset{n<\omega}{\&}\ x_n \leqslant u \Longrightarrow y \leqslant u))$

(vi) $(\forall x_1 x_2 x_3) \left\{ \underset{i,j=1,2,3}{\&} (x_i \approx x_j) \quad \Longrightarrow (x_1 \approx x_2 \vee x_3) \right\}$

El axioma (iv) garantiza la posibilidad de "completar" un elemento *y* sumándole a un elemento *x* menor que él, un nuevo elemento que sea disjunto con éste. Está claro que eso vale automáticamente en la lógica usual, o en el cuerpo de los subconjuntos de un conjunto, donde si $A \subset B$, entonces B puede escribirse como $A \cup (B - A)$. Ya que los modelos de *COM* no son necesariamente reticulados, el supremo no siempre existe; con mayor razón, entonces, no se puede garantizar la existencia del supremo de una familia cualquiera. Pero esa existencia está postulada por (v) cuando la familia es numerable y disjunta. Este axioma es el que obliga a usar un fragmento de un lenguaje de tipo (ω_1; ω_1). Como dentro de las lógicas infinitarias, la (omega$_1$, omega$_1$) es una de las menos conocidas, los resultados modelísticos para *COM* que podemos obtener con la teoría usual de modelos infinitarios (del estilo de Keisler [10]) son todavía muy pobres.

Sin embargo, denotemos por *Mod*(COM), la clase de modelos de *COM*. Es evidente que *Mod*(OM) es una subclase de la misma, ya que todo reticulado ortomodular completo y atómico es un elemento de *COM* (elementos que serán llamados "conjuntos ordenados ortomodulares"). En este sentido ésta es una generalización de la situación anterior.

De todas maneras, esta situación que parece llevar al máximo las posibilidades de prolongación de los reticulados ortomodulares, no resuelve el problema de encontrar formulaciones más poderosas que las actuales. En el fondo, esta nueva formulación tiene su motivación también en la teoría de los espacios de Hilbert, aunque eludiendo el compromiso de la existencia de supremo e ínfimo, lo cual podría carecer de sentido en algunas consideraciones cuánticas, especialmente cuando las proposiciones no son disjuntas. Elude, además, el discutido axioma de cubrimiento cuya formulación (cf. p.e. Hultgren y Shimony [7]) ha sido varias veces acusada de no tener la plausibilidad empírica que le atribuyó la escuela de Jauch y Piron.

Nos queda, entonces, por explorar las posibilidades de enriquecimiento del formalismo actual, a través de la obtención de nuevas *LG*(E) para espacios diferentes (o de *LG*(H), para espacios H diferentemente definidos con relación a la elección del cuerpo).

3. *Lógicas de espacios no usuales*

No se trata aquí de discutir si el espacio de Hilbert es o no el "modelo" directo más apropiado para un sistema cuántico. Este problema, que estuvo en discusión desde su misma propuesta hace más de cuarenta años, cae más dentro del campo de la fundamentación que dentro de la lógica de la teoría cuántica. Además, el conocimiento científico actual no parece todavía suficiente para dar una respuesta definitiva. Existen, sin embargo, propuestas interesantes como la de Rayski [16], que hacen dudar entre la elección del espacio de Hilbert y del espacio de Schwartz.

Sin embargo, lo que ahora nos interesa buscar es una (utópicamente posible, tal vez) sucesión de generalizaciones, que no sean puramente formales (no impliquen simplemente la extensión de las clases de modelos *Mod*(T) para nuevas teorías *T*), sino que consistan en auténticas modificaciones del espacio "*concreto*" en el cual son representables los fenómenos físicos. Comenzaremos por fijar la "naturaleza" del Espacio *H* (usaremos la letra "E" para referirnos a un espacio topológico más general, no necesariamente de Hilbert), a partir de una modificación del cuerpo base.

3.1 *Alteración del cuerpo de escalares.* El espacio vectorial topológico (de Hilbert) de la mecánica cuántica, está definido, a los fines de la teoría física, sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos. Ésta es una vieja tradición que se remonta a los fundadores de la teoría axiomática en mecánica cuántica. Sin embargo, después de los trabajos de Stueckelberg [17], sabemos que en algunos casos físicos particularmente simples, los resultados logrados adoptando $\mathbf{R}$ (los números reales), como cuerpo de escalares, no conduce a resultados muy diferentes que los de $\mathbf{C}$. Luego, esta restricción no estaría acompañada, aparentemente, por una mayor ganancia en información, y pasar, entonces, de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{R}$ estaría exactamente en nuestro objetivo opuesto: una restricción que no proporciona ninguna ventaja. Además, es bastante natural que una mecánica cuántica puramente real, complique de manera esencial los fenómenos menos simples que, aun dentro de su complejidad, tengan una formulación razonable en $\mathbf{C}$. Finalmente, no toda la riqueza de una teoría cuántica real está profundamente explorada, y existe la conjetura de que muchas propiedades consideradas físicamente esenciales se pierden.

3.1.a *Los cuaterniones.* Como reconoce Jauch [8], no tenemos argumentos tan simples para rechazar una formulación de un espacio topológico E con base en el conjunto $\mathbf{Q}$ de los cuaterniones. Un intento en esa dirección fue hecho por Emch [4], pero nuevamente sucede que una formulación en el espacio (E, $\mathbf{Q}$) coincide parcialmente con la formulación clásica (H, $\mathbf{C}$), por lo menos en casos muy simples. Ignoro si las últimas investigaciones sobre el tema han arrojado más luz sobre esta similaridad, pero ella existe (y es de hecho una equivalencia) para situaciones tales como las que involucran una sola partícula en el espacio de Hilbert sobre $\mathbf{C}$. Sin embargo, por ahora, esta generalización no parece totalmente decisiva, en el sentido de generar una lógica que "supere" nuestra clásica LG(H) del espacio complejo.

3.1.b *Cuerpos topológicos incompletos.* La alternativa de considerar cuerpos topológicos incompletos, como, por ejemplo, el conjunto Q de los racionales, parece carecer de toda plausibilidad. En efecto, Q no es simplemente un auxiliar para "dilatar" los vectores unitarios del espacio, sino que es también el "blanco" de las funciones lineales definidas sobre tal espacio. Para empezar, la utilización de Q conduce rápidamente a problemas de dimensión: p. e., la recta real, que tiene dimensión 1 sobre sí misma, no tiene ninguna dimensión "razonable" sobre los racionales (¿cuántos racionales hacen falta para formar una combinación lineal que genere cualquier real, cuando la base de $\mathbf{R}$ es, por ejemplo, el número 1?).

Por otro lado, es claro que el cuerpo elegido afecta la noción de medición, que siempre se supone realizada, utilizando, por lo menos, números reales, o el cuerpo K contiene a los reales, en cuyo caso sólo puede ser **R** mismo, **C** o Q, o elegimos completaciones topológicas que contengan "suficientes" elementos para realizar esas mediciones. Fue esta idea la que condujo a considerar completaciones o extensiones de cuerpos que en principio no eran completos.

3.1.c *Completaciones y extensiones.* Hay dos clases "exóticas" de cuerpos, que, por su utilidad en otras ramas de la matemática, hacen suponer su posible aplicación en las teorías cuánticas. Uno de ellos es el cuerpo de los números *p-ádicos*, que aparecen entre los cuerpos admisibles para servir de base de escalares a las variedades diferenciables.

Un candidato menos tentador, pero igualmente experimentable, en principio, es el cuerpo de Galois (o los cuerpos de Galois de diferente orden). Sin embargo, existen dos resultados limitativos que echan por tierra esta ilusión.

Supongamos *D* un cuerpo cualquiera, no topológicamente completo, en alguna "topología natural" (p. e., considerándolo así mismo como espacio vectorial topológico sobre sí mismo). Consideremos primero el caso p-ádico Q_p, y extendamos éste mediante una extensión algebraica o un completamiento, hasta obtener K (Cf. mayores referencias en Beltrametti y Cassinelli [2]); si nos restringimos hasta la cuarta dimensión no aparece ningún problema especial; sin embargo, si consideramos el espacio vectorial (V,K) donde V es el espacio base y K la extensión, tiene lugar el siguiente resultado, bien conocido en el álgebra del análisis funcional para dimensión mayor que 4.

> Dado cualquier *anti*-automorfismo de K en K, que satisfaga la propiedad de involución (o sea, si g es el antiautomorfismo, entonces $g^{-1} = g$), entonces, no existe ninguna forma hermítica asociada con g.

Un resultado análogo se tiene cuando consideremos *D* como un cuerpo de Galois, y a K como la extensión o el completamiento de D. En ese caso aparece un resultado todavía peor, ya que ahora la limitación vale también para todo espacio (V,K) con dimensión mayor o igual que 3.

Si la dim(V,K) es mayor o igual que 3, entonces no existen formas hermitianas sobre V.

Como las formas hermitianas que inducen el producto escalar son las que hacen posible construir nuestra complementación o "negación" en las lógicas cuánticas, el conjunto *LG*(V) no será una lógica para los casos en que V esté provisto de tales cuerpos de escalares.

Que yo sepa, no existe un estudio detallado sobre los cuerpos de Hensel en relación con el problema de las lógicas cuánticas, pero su estructura bastante especial hace sospechar que estos cuerpos tendrían análogas o más severas limitaciones para ser utilizados en la generación de una lógica ortomodular *LG*(V).

Resta, entonces, la posibilidad de considerar espacios más generales que los de Hilbert, pero sobre los cuerpos clásicos **R**, **C** y Q. Sin embargo, teniendo en cuenta las analogías entre ellos, nos restringimos, en lo sucesivo, a espacios vectoriales topológicos sobre **C**. (La referencia "espacio sobre el cuerpo de los números complejos", será omitida en general.)

3.2 *Generalización del espacio de Hilbert.* Veamos cuales son las posibilidades de generalizar el espacio de Hilbert a otros espacios vectoriales topológicos complejos, y cuáles son las repercusiones sobre la lógica.

En lo sucesivo, dado el isomorfismo entre operadores de proyección ortogonales y subespacios cerrados, pensaremos *LG*(E) como el conjunto de los subespacios cerrados del espacio vectorial topológico E.

Supongamos que E es un espacio de Banach. Por un resultado ya clásico de Mackey y Kakutani [12], sabemos que si *LG*(E) admite una ortocomplementación (es decir, una negación satisfaciendo (iii): a-b de § 2), él mismo es un espacio de Hilbert. Luego, admitiendo el carácter de"Banach" del espacio, no podremos ir más lejos que de la clase de los espacios de Hilbert, a menos que aceptemos perder la ortocomplementación, y, por lo tanto, la lógica.

Parece existir entonces una posibilidad: prescindir de espacios normados y concentrarnos en espacios topológicos más "débiles", como aquellos que admiten algo más que una topología localmente convexa. Sin embargo, hay resultados de Wilbur [18] que contribuyen a nuestra desilusión también en este punto.

En efecto, Wilbur ha probado que si (E,T) es un espacio vectorial topológico con topología T, entonces ocurre la siguiente situación: si el conjunto *LG* (E) admite una ortocomplementación (y, por tanto, tenemos esperanza de convertirlo en una lógica cuántica), entonces, existe una topología T_1 localmente convexa, compatible con la estructura vectorial de E, tal que en el nuevo espacio $E_1 = (E,T_1)$, la nueva lógica $LG(E_1)$ coincide con la primitiva.

O sea, entonces, que si una topología, por rara que sea, es tal que permite la formación de una lógica con los subespacios cerrados de E, habrá una topología "no tan rara" (de hecho ¡localmente convexa!) que no sólo permite una tal lógica, sino que produce la misma lógica que teníamos. Luego, para obtener una cosa nueva, deberíamos disponer de una topología T, lo suficientemente rara como para que no admita lógica ninguna (caso que no nos interesa) o de un espacio vectorial lo suficientemente raro como para dotarlo de una topología que no sea localmente convexa. Esta posibilidad, teóricamente abierta, disminuye en mucho nuestras esperanzas de mantener un contacto relevante con las teorías cuánticas, ya que un espacio *no* localmente convexo, como, p. e., L^p para p menor que 1, parece algo que escapa a cualquier tratamiento racional de los fenómenos físicos, y hasta de las propiedades matemáticas consideradas usualmente "interesantes".

Una alternativa que fue pensada por varios autores, es la sustitución de los espacios de Hilbert por los espacios de Mackey. A pesar de que ellos son localmente convexos, quedaba en pie la esperanza de obtener lógicas levemente diferentes a las hilbertianas. Sin embargo, el siguiente resultado, relativamente reciente, de análisis funcional nos lleva a un callejón sin salida:

> Si M es un espacio de Mackey de dimensión infinita, provisto de una topología T que sea estrictamente más fuerte que la llamada 'topología débil', y tal que $LG(\mathrm{M})$ sea una lógica, entonces M es un espacio de Hilbert.

No hace falta señalar que volvemos así al punto de partida. Diferentes resultados relacionados con éste, cierran otras salidas consideradas anteriormente posibles:

> Si M es un espacio de Mackey, y su conjunto de subespacios $LG(\mathrm{M})$ admite una complementación ortogonal (no decimos que cumpla con todos los axiomas de una lógica), entonces, nuevamente M es un espacio de Hilbert.

No hace falta sin embargo sumergirnos en las sutilezas de los espacios vectoriales topológicos en su sentido más general. Un simple espacio métrico goza de la misma propiedad. Si E es métrico, de dimensión infinita, y $LG(\mathrm{E})$ es una lógica, entonces E es de Hilbert.

Consideremos ahora algo intermedio: un espacio B de Banach, cuyo conjunto $LG(\mathrm{B})$ admita una complementación ortogonal. Por un resultado todavía relativamente reciente de Maczynski [14] sabemos que $LG(\mathrm{B})$ debe admitir un conjunto completo de medidas de probabilidades. Luego, no podemos generalizar nuestra lógica a un espacio de Banach (de dimensión infinita), sin arrastrar al mismo tiempo la consecuencia de que esa lógica lleva un conjunto completo de probabilidades, hecho que, en algunos casos particulares, puede introducir ciertas limitaciones sobre los deseos de nuestra generalización.

Parece entonces que todo intento de generalización nos devuelve al caso hilbertiano anterior, o nos arroja en situaciones triviales, o nos obliga a asumir, de pasada, suposiciones demasiado fuertes.

Existe una interesante propuesta por Rayski acerca de la plausibilidad de sustituir el espacio de Hilbert por el espacio de Schwartz, en la expresión del formalismo habitual de la mecánica cuántica. Aunque la versión que conocemos de esa propuesta [16], no parece todavía muy madura, es posible que posteriores investigaciones lleven a una reformulación total de la axiomatización de la mecánica cuántica, y que el espacio de Hilbert caiga en la prehistoria.

Es indudable que si una formalización sobre el espacio de Schwartz pudiese ser hecha sin dejar vacíos, ella daría una información mucho más precisa sobre las propiedades de la función de onda y de otros objetos estrechamente relacionados con el comportamiento cuántico de las partículas. Resulta dudoso, en cambio, que una actitud tal tenga repercusiones interesantes en la formulación de la lógica $LG(E)$ del espacio. En efecto, un espacio de Schwartz entra dentro de una clase bastante *estándar* de espacios vectoriales topológicos y a él serían aplicables los resultados limitativos ya reseñados.

Otra alternativa, frente a la cual está el desafío de la investigación actual, es prescindir definitivamente inclusive de la formulación "en sentido amplio" de una lógica cuántica, y concluir que las teorías de la física moderna tienen diversos modelos, todos los cuales descansan en la lógica clásica y que la apelación, hasta incluso en sentido alegórico, a una "lógica cuántica" se vuelve sin sentido. A nuestros descendientes la ardua decisión.

REFERENCIAS

1. Brown, H., *Problems of Measurement in Quantum Theories* (Ph. D. thesis, Chelsea College, London, 1978).
2. Beltrametti & Cassinelli, *Rivista del Nouvo Cimento*, 6, (1976) p. 321 ss.
3. Dishkant, H., *Reports on Mathematical Logic 3*, (1974), p. 9-18.
4. Emch, G., *Helvetica Physica Acta 36* (1963), p. 739, 770.

5. Gudder, S., *Pacific Journal of Mathematics 19*, (1966), p. 81-93.
6. Holland, S., en Hooker (ed.), *The logico-algebraic approach to Quantum Mechanics*, (Reidel), p. 437-496.
7. Hultgren, B. & Shimony, A., *Journal of Mathematical Physics, 18* (1977), p. 381-393.
8. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1968).
9. Kalmbach, G., *Z. für Math. Logik und Grundl. d. Math. 20*, p. 395.
10. Keisler, J., *Model Theory for Infinitary Logic*, (North-Holland, 1971).
11. Mackey, G. W., *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Benjamín, 1963).
12. Mackey, G. W. & Kakutani, S., *Annals of Mathematics 2*, p. 50.
13. Maczynsky, M., *Rep. of Mathematical Physics 3*, p. 209.
14. Maczynsky, M., *Studia Mathematica*, XLIX, p. 149.
15. Pulmannová, S., *Commun. Mathematical Physics*, 49, p. 47.
16. Rayski, J., *Foundations of Physics 7*, p. 151.
17. Stueckelberg, *Helv. Physica Acta 33*, p. 727.
18. Wilbur, W. J., *Transactions of the Am. Math. Soc. 207*, p. 343.
19. Gratzer, G., *Lattice Theory* (Freeman & Co., 1971).

The complete and atomic orthomodular lattice structure which is formed by the projectors (or equivalently, by the closed subspaces) of a complex and separable Hilbert space will be indicated in this paper by LG(H), where H is the Hilbert space. (We take operations and distinct elements for granted.)

LG(H) is, classically considered, the "typical" logic of quantum mechanics, in the following sense: if H is the space associated with physical system S, then H's rays, the ultramaximal operators, etc., represent typical properties of S, such as observable states and magnitudes.

$LG(H)$ is simply an element in model sets of more general theories such as the orthomodular lattice set, which we formalize in § 2, using a second-order logic. This generalization, which we call "formal" because it consists merely of giving more permissive axioms that facilitate the apparition of new structures other than LG(H), can yet be extended. In § 2 we use infinitarian logics, where a numerable number of conjunctions and quantificators is permitted, to express the theory of orthomodular partially ordered sets (posets). That formulation uses essentially the logic called (omega-1, omega-1), and a conjecture is raised about proving it cannot be realized within a weaker logic. The way to prove this, it is suggested, should be analogous to the way the indefinability of well-ordering is proved.

Such generalizations are analogous to those obtained when we pass, e.g., from the field of real numbers to any commutative, Archimedian, etc., field; then to a commutative ring with an unity, and so on. They are, therefore, formal, in the sense that (1) they do not "say" much about the initial structure which motivated the generalization, and that (2) in generalizing, we allow the "entrance" of new structures that have little to do with the original motivation. For instance, in the theory of orthomodular lattices, besides Hilbert-space logics (or those based on other topological vectorial spaces), new models appear, such as finite orthomodular lattices, for which the name "quantum logic" has little sense.

In § 3 we study the modifications, and eventual generalizations, of the basic structure that generates quantum logic, i.e., the infinite-dimensional separable complex Hilbert space structure.

A first way seems to be the generalizing of the field, and it is analyzed in § 3.1. In principle, it seems natural to admit that the field must contain some copy of the field of real numbers, or have at least an expressive force as great as theirs. This is why the use of real fields —and for a greater certainty, of complex fields— in the H spaces of quantum mechanics seems to be fully justified. The study of quaternions, carried on by Emch and others, but not clearly completed yet, could lead to an equivalent quantum mechanics, notwithstanding the non-commutativity of this field. Anyway, real, complex and quaternions seem to be the only fields with a "natural" right to sustentate these spaces. The incompleteness of rational fields, and their undesirable properties as to dimension and measurability, cause them to be rejected.

Other proposals are studied. Leaving aside Hensel's bodies, that seem to be wholly different in nature, we are left with p-adics Q_p and Galois' fields as the only reasonable candidates.

Known algebraic results are then invoked, according to which an extension or completion of these bodies would not lead to the desired results. Quite simply, we would not, save on trivial instances, have any logic at all.

It is a well-known fact that by completing p-adic fields (let K be such a completion) we arrive at a space (V,K) upon that field, which does not allow to define hermitian forms for dimensions greater than 4. Actually, no involutory anti-automorphism of the field (such as complex conjugation) permits to associate any quadratic form for a dimension greater than or equal to 5.

Things, are even worse in the case of Galois' fields where limitative results begin to appear already in dimensions greater than 2.

In § 3.2 we choose to accept the complex numbers body **C** as a canonic body, and see whether it is possible to generalize space into a class that need not be Hilbert's. There are various possibilities: to consider Banach spaces, or else more or less general local convex spaces, and particularly, to focus analysis on Mackey spaces.

For Banach spaces there appear Maczynski's limitative results; for Mackey spaces, "analogous" results from Wilbur. (Cf. references at the end of the essay.)

As a matter of fact, only infinite-dimensional spaces can be of any interest. In this case, if a Mackey space has an "acceptable" topology, i.e., a stronger one than the so-called weak convergence topology, and its LG(M) is really a logic, then M is once again a Hilbert space.

Several of these results lead to the conclusion that we can hardly obtain a different logic (a more general or anyway more informative one) by taking the class LG(E) of some non-Hilbert space E. Rayski's proposition about substituting Schwartz space for Hilbert space is also considered, but although such a substitution would modify actual work "within" the space in the interests of formalization, it is natural to expect the apparition of a logic $LG(\mathrm{S})$, equivalent to former logics.

Maybe the part special logics play in quantum mechanics will be entirely unnecessary when the axiomatizing of a physical system can be done in terms of some kind of spaces that leaves no doubt about its usefulness.

[*C. L.*]