

SOBRE SISTEMAS FORMALES NO CLÁSICOS*

SUSANA BERESTOVOY
Universidad Autónoma Metropolitana,
Iztapalapa, México

La adecuación de la lógica clásica para el tratamiento de ciertos conceptos se plantea hoy como un problema que podemos considerar incorporado a la tradición filosófica. Los diversos cuestionamientos que de ella se han hecho tanto en relación con sus ámbitos de aplicación como con algunos de sus principios mismos, tienen como una de sus consecuencias el surgimiento en nuestro siglo de sistemas no clásicos. Aunque el origen de estos cuestionamientos está ligado, en algunos casos, a problemas de vieja raigambre filosófica, la forma en que se manifiestan está determinada por el desarrollo de la lógica clásica misma y su formalización: los sistemas, que podríamos llamar alternativos, algunos de los cuales nos proponemos discutir, son sistemas formales. Esto posibilita una clara visión de los principios que asumen, así como de la independencia y equivalencia entre éstos.

No creemos que haya un ámbito neutro desde el cual pueda decidirse la verdad de los principios de los distintos sistemas lógicos, pero sí consideramos fundamentales la discusión de estos principios como tales y el análisis de las ideas subyacentes.

Vasilév,¹ uno de los precursores en el tratamiento de lógicas polivalentes, describía su trabajo como un intento de hacer en relación con la lógica aristotélica lo que Lobatchevsky había hecho con respecto a la geometría euclídea.

* Conferencia pronunciada en el Seminario de Filosofía e Historia de la Ciencia del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM en diciembre de 1978.

¹ Cf. [7]. Los números entre corchetes refieren a la bibliografía al final del artículo.

Desde nuestro punto de vista, esta visión es correcta: del mismo modo que las geometrías no euclídeas son más adecuadas que la geometría euclídea para el tratamiento de ciertos problemas, notablemente en física, así algunas lógicas no clásicas se adaptan mejor al análisis de ciertas ideas y recuperan más adecuadamente que la lógica clásica ámbitos del lenguaje natural o problemas de aproximación, por ejemplo.

Un principio de carácter semántico que, aunque ha sido aceptado por las principales corrientes lógicas ortodoxas, había sido discutido ya por Aristóteles en relación con el problema de los futuros contingentes, es el principio de bivalencia, según el cual:

Todo enunciado es verdadero o falso.

La consideración de los enunciados futuros contingentes que pueden ser analizados como indeterminados, dando así lugar a un tercer valor de verdad, así como el estudio de las distintas modalidades proposicionales, están en el origen del cuestionamiento de este principio e impulsan la creación de las llamadas lógicas polivalentes.

Precusores en este campo son McColl, motivado fundamentalmente por las modalidades probabilísticas; Peirce, que extendió el método de las tablas de verdad a lógicas con tres valores, y Vasilév, quien desarrolló una lógica que calificaba de imaginaria, en la cual consideraban n estados o valores posibles, siendo n un entero mayor o igual que 2.

Los primeros trabajos formales sobre lógicas polivalentes fueron los desarrollados en los años veinte por Lukasiewicz, quien presentó en principio un sistema de lógica trivalente, que Wajsberg axiomatizó en 1931,² y por Post, que creó sistemas n -valentes, para n finito.

Distintas lógicas polivalentes pueden obtenerse a partir del tratamiento de diferentes modalidades proposicionales, como por ejemplo probabilísticas, epistémicas, existenciales, alé-

² Véase el Apéndice.

ticas. En este último caso tendríamos una lógica 4-valente, siendo sus valores de verdad: necesariamente verdadero, necesariamente falso, contingentemente verdadero y contingentemente falso.

Una semántica formal n -valente, es decir, polivalente con n valores, consiste de:

1) Un conjunto, VV , de n valores de verdad:

$$VV = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

2) Un subconjunto propio VD de VV de valores distinguidos, y

3) Funciones de verdad, de productos finitos del conjunto VV en sí mismo, que interpretan los conectivos lógicos.

El número de valores y las funciones de verdad que se consideren, dependen naturalmente de la asignación de significados que se den a estos valores y a los conectivos. Para que una semántica formal de este tipo pueda ser llamada una lógica polivalente, se impone que los significados asociados a los elementos de VV sean, o estén relacionados con, valores de verdad. Por ejemplo, en una lógica con valores 0, 1, 2, pueden considerarse éstos como verdadero, indeterminado y falso, respectivamente, y tomar como único valor distinguido 0 (tendríamos $VV = \{0, 1, 2\}$, $VD = \{0\}$). Las funciones de verdad no quedan unívocamente determinadas por esta atribución de significados y pueden darse, por ejemplo, de la siguiente manera (donde $v(A)$ designa el valor de verdad del enunciado A):

$$v(\sim A) = 2 - v(A)$$

$$v(A \& B) = \text{máximo } \{v(A), v(B)\}$$

$$v(A \vee B) = \text{mínimo } \{v(A), v(B)\}$$

$$v(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } v(A) \geq v(B) \\ v(B) & , \text{ si } v(A) < v(B). \end{cases}$$

Notemos que esta interpretación de los conectivos, restringida a los valores 0, 2 coincide con la dada en la semántica bivalente clásica, y que su generalización a una semántica n -valente con $n > 2$ finito, es inmediata (sólo modifica-

mos $v(\sim A) = (n-1) - v(A)$, habiendo considerado 0 como verdadero, $n-1$ como falso y los valores $1, \dots, n-2$ valores intermedios susceptibles para cada n de distintas interpretaciones).

Lo más objetable, desde un cierto punto de vista, es el valor dado a " $A \rightarrow B$ ". Modificaciones posibles si consideramos que una implicación ha de ser verdadera o falsa o si queremos que el valor de " $A \rightarrow B$ " dependa de ambos valores $v(A)$, $v(B)$ y no sólo de la relación de orden entre ellos, son, respectivamente, las siguientes:

$$v(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(A) \geq v(B) \\ (n-1) & \text{si } v(A) < v(B). \end{cases}$$

$$v(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(A) \geq v(B) \\ v(B) - v(A) & \text{si } v(A) < v(B). \end{cases}$$

Desde el inicio de su desarrollo, las lógicas polivalentes se extendieron a sistemas con un conjunto infinito de valores de verdad; tales sistemas fueron incluso considerados en un principio por Łukasiewicz como los que, junto con los trivalentes, ofrecían mayor interés desde el punto de vista filosófico.

Para muchos de estos sistemas no se ha dado aún una atribución satisfactoria de significados a sus valores de verdad. A pesar de ello ofrecen interés por sus aplicaciones en ámbitos específicamente formales, por ejemplo, para dar pruebas de independencia. Mediante sistemas con infinitos valores de verdad se han resuelto los problemas de caracterización del cálculo intuicionista³ CI y del sistema S_5 de lógica modal de Lewis; es decir, se han obtenido semánticas polivalentes infinitas tales que las fórmulas que toman en ellas sólo valores distinguidos son exactamente los teoremas de CI y S_5 , respectivamente.

Resultados negativos habían sido obtenidos por Gödel y Dugundji para la caracterización de estos cálculos mediante sistemas polivalentes finitos.

³ Véase el Apéndice.

Las lógicas probabilísticas dan lugar a sistemas con infinitos valores, en las cuales se asocia a cada enunciado A un valor de probabilidad en el intervalo real $[0, 1]$, de modo tal que sean satisfechas condiciones similares a las impuestas a una medida de probabilidad.

Los trabajos precursores en este campo han sido desarrollados por Reichenbach y Zawirski en los años treinta.

Más recientemente han surgido las lógicas difusas. El proceso de inferencia en ellas es de naturaleza semántica más que sintáctica y tiende a recuperar la imprecisión del razonamiento habitual más que el razonamiento exacto. Su concepción, cuyo origen podemos situar en la noción de conjunto difuso introducida por Zadeh,⁴ pretende dar cuenta del hecho de que los enunciados del lenguaje natural no son, generalmente, ni verdaderos ni falsos, sino verdaderos o falsos con un cierto grado y en un cierto sentido.

Diversos sistemas de lógica difusa se han desarrollado, en los cuales el conjunto de valores de verdad puede ser totalmente ordenado o constituir un retículo y otros en los cuales los valores de verdad son conjuntos difusos. En este último caso se toma en cuenta la consideración de que a un enunciado vago no puede asignársele un valor de verdad que sea preciso.

Consideremos la valuación propuesta por Lakoff⁵ en la cual el conjunto de valores de verdad es el intervalo real $[0, 1]$ totalmente ordenado con el orden natural:

$$\begin{aligned} v(\sim A) &= 1 - v(A) \\ v(A \& B) &= \text{mínimo } \{v(A), v(B)\} \\ v(A \vee B) &= \text{máximo } \{v(A), v(B)\} \\ v(A \rightarrow B) &= \begin{cases} 1 & \text{si } v(A) \leq v(B) \\ 0 & \text{si } v(A) > v(B) \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que en esta valuación es adecuado considerar 0 como falso y 1 como verdadero.

⁴ Cf. [8].

⁵ Cf. [4].

Puede definirse la noción de consecuencia semántica (\models) como sigue:

$A \models B$ si y sólo si para toda evaluación v , si $v(A) \geq 1/2$ entonces $v(B) \geq 1/2$.

Van Fraassen⁶ da un conjunto de axiomas y reglas, *FUZZ*, para el cual obtiene el resultado de adecuación siguiente:

$X \vdash A$ si y sólo si $X \models A$.

Sistemas en los cuales el conjunto de valores de verdad no es totalmente ordenado pueden obtenerse al considerar no sólo el grado de verdad de un enunciado, sino un conjunto de condiciones en virtud de las cuales un enunciado es verdadero en un cierto grado.

Consideramos como un ejemplo simple el enunciado ' x es P ', donde P es una propiedad resultante de un conjunto de características c_1, c_2, \dots, c_n , i.e., un individuo tiene la propiedad P si y sólo si tiene c_i (para $1 \leq i \leq n$). Si a, b son dos individuos con características c_1, c_2 y c_2, c_3 , respectivamente, el grado de verdad de las afirmaciones ' a es P ', ' b es P ' es el mismo (si c_1, c_2, c_3 se consideran de igual peso en la determinación de P) pero, sin embargo, podemos distinguir entre el 'tipo de verdad' de ambas.

También puede obtenerse un conjunto parcialmente ordenado de valores de verdad $\{a_1, \dots, a_n\}$ si consideramos cada a_i como 'verdadero relativo a un mundo'.

Si tenemos k mundos M_1, \dots, M_k , podemos asociar a cada enunciado A el conjunto de mundos en los cuales es verdadero, obteniendo 2^k posibles valores de verdad que corresponden a cada uno de los subconjuntos de $\{M_1, \dots, M_k\}$. Si nos interesa un mundo M_j en particular; tendrá valor distinguido todo enunciado verdadero en M_j .

Es claro que la lógica bivalente resulta de considerar un solo mundo M en el cual cada enunciado puede tomar uno de los valores verdadero o falso.

Este tipo de interpretación de los valores de verdad como relativos a mundos está estrechamente vinculado con las se-

⁶ Cf. [6].

mánticas de Kripke para lógicas modales, en las cuales se consideran además relaciones de accesibilidad entre los mundos para dar cuenta de los enunciados en los cuales ocurren operadores modales.

En algunos de los sistemas de lógicas polivalentes y difusas no son válidos los principios de tercero excluido y de no contradicción.

El primero de ellos, a veces identificado con el principio de bivalencia, ha sido a lo largo de la historia el más cuestionado de los principios clásicos.

Puede enunciarse como:

Para todo enunciado A , $A \vee \sim A$ es válido.

Esta formulación es diferente del principio de bivalencia: Si definimos, por ejemplo, $v(\sim A) = 0$ si $v(A) \neq 0$ y $v(\sim A) = n$ si $v(A) = 0$, y $v(A \vee B) = \text{mínimo } \{v(A), v(B)\}$, obtenemos, cualquiera que sea n finito mayor que 2, un sistema polivalente en el cual es válido el principio de tercero excluido como lo formulamos.

La validez de este principio depende de la interpretación que demos de la disyunción, la negación y también de lo que entendemos como verdadero.

Por ejemplo, si identificamos ‘ser verdadero’ con ‘ser demostrable en un sistema deductivo S ’ y si S es incompleto, es decir, si existe un enunciado A tal que en S no son demostrables ni A ni $\sim A$, resulta que ninguno de los dos es verdadero y por lo tanto $A \vee \sim A$ tampoco lo es.

Del mismo modo, si sólo admitimos como verdadero lo que se ha establecido de acuerdo con ciertas reglas o métodos, y éstos no han producido una prueba de A y tampoco una de $\sim A$, $A \vee \sim A$ no será verdadero.

Esta última es la posición de los intuicionistas, para los cuales la verdad de un enunciado ha de establecerse de manera constructiva.

Kolmogoroff da una interesante interpretación del cálculo intuicionista como cálculo de problemas: cada variable proposicional representa un problema, los conectivos se interpretan como funciones de problemas de la siguiente manera:

Establecer: $A \& B$ significa resolver los dos problemas A, B ; $A \vee B$, resolver por lo menos uno de los problemas A, B ; $A \rightarrow B$, obtener a partir de una solución de A una solución de B ; $\sim A$, obtener una contradicción a partir de la suposición de que se tiene una solución de A .

El principio de tercero excluido, $A \vee \sim A$, significaría aquí que dado un problema cualquiera A , podemos ya sea resolverlo, ya sea obtener una contradicción de la suposición de que una solución para A existe, lo cual no es el caso en general.

En este sentido los intuicionistas rechazan el principio de tercero excluido y no admiten el principio de doble negación, es decir, la validez de $\sim\sim A \leftrightarrow A$. Sí es válido en el cálculo intuicionista $A \rightarrow \sim\sim A$, ya que no se admiten simultáneamente A y $\sim A$, es decir, se acepta el principio de no contradicción; pero no es válido $\sim\sim A \rightarrow A$, ya que el haber establecido $\sim\sim A$ probando la imposibilidad de $\sim A$ no da necesariamente una prueba constructiva de A .

No tenemos en el cálculo intuicionista la equivalencia clásica entre $\sim A \vee B$ y $A \rightarrow B$; de hecho, ninguno de los conectivos $\&, \vee, \rightarrow, \sim$ es definible en términos de los otros.

Tampoco son equivalentes intuicionísticamente el principio de no contradicción y el de tercero excluido.

El principio de no contradicción afirma que: para cualquier enunciado A , $\sim(A \& \sim A)$ es válida; en particular, que no pueden ser simultáneamente verdaderos A y su negación $\sim A$.

La razón más importante desde el punto de vista formal para la aceptación tanto en el cálculo clásico como en el intuicionista, de este principio, es la validez en ambos sistemas de la fórmula

(I) $(A \& \sim A) \rightarrow B$ (cualquiera que sea B).

Por tanto, si admitimos en el sistema un enunciado A y su negación $\sim A$, cualquier enunciado se obtiene como teorema mediante la regla de *Modus Ponens*. En otras palabras, el sistema resultaría trivial. (Se denomina trivial un sistema en el cual toda fórmula es teorema; es obvio el por qué de la

denominación.) Una teoría T cuya lógica subyacente es la clásica o la intuicionista es trivial si y sólo si es inconsistente, es decir, si y sólo si se prueba en T , para algún enunciado A , A & $\sim A$.

Lógicas en las cuales (I) no es válido pueden utilizarse como subyacentes para construir teorías en las cuales podemos admitir A y también $\sim A$ para ciertos enunciados A , sin que T resulte trivial. El interés de poder desarrollar teorías tales se debe a consideraciones de tipo filosófico, en las que se da una cierta interpretación de la negación, o bien, de tipo lingüístico, en lo concerniente al lenguaje natural. Pensemos por ejemplo en un enunciado A tal que en una lógica trivalente $v(A) = v(\sim A) = 1$, resulta que si tomamos $\{0, 1\}$ como conjunto de valores distinguidos, A y $\sim A$ serían admisibles.

Esto lleva a la creación de sistemas en los cuales ni el principio de no contradicción ni su negación son válidos. Tales sistemas son los cálculos C_n ,⁷ con n entero mayor o igual que 1, de Da Costa,⁸ que son ellos mismos consistentes y sirven de base para la construcción de teorías inconsistentes pero no triviales. El cálculo C_ω , además, no es finitamente trivializable, es decir, la adjunción a C_ω de un número finito de fórmulas no permite la obtención de cualquier enunciado como teorema. Esto se prueba mediante una matriz polivalente con infinitos valores.⁹

Ya mencionamos distintas interpretaciones posibles para la implicación \rightarrow . Este concepto, fundamental en todo sistema deductivo, ha sido fuertemente cuestionado en su interpretación clásica.

Comencemos por mencionar las así llamadas paradojas de la implicación, que se siguen, según algunos autores, de la aceptación del principio

$$(II) A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Este, que según Curry da una condición que debe obviamen-

⁷ Cf. el Apéndice.

⁸ Cf. [3].

⁹ Cf. el Apéndice.

te satisfacer cualquier implicación, es válido tanto clásica como intuicionísticamente, aunque no lo es en algunos sistemas de lógica difusa.

Si se considera, como es generalmente admitido, el carácter formal de la inferencia lógica, y dado que D se infiere de C ($C \vdash D$) si y sólo si es válido $C \rightarrow D$ ($\vdash C \rightarrow D$), un enunciado de la forma $C \rightarrow D$ tiene, si es verdadero, verdad necesaria. El establecerlo como tal ha de ser, por tanto, independiente de cualquier consideración fáctica. Pero si admitimos (II), la verdad, eventualmente contingente, de A , nos permite establecer, mediante la regla de *Modus Ponens*, la de $B \rightarrow A$, quien tiene carácter necesario y en la cual se afirma que A , cuya verdad es contingente, se sigue necesariamente de B , cualquiera que sea el enunciado B (es decir, $A \vdash B \rightarrow A$ (para todo B)).

En algunos sistemas, el S_3 de Lewis,¹⁰ por ejemplo, (II) no es válido; pero sin embargo $B \rightarrow A$ puede establecerse si A es necesariamente verdadero (tenemos por ejemplo $\vdash B \rightarrow (C \rightarrow C)$, dado que $C \rightarrow C$ es necesariamente verdadero), aunque B sea irrelevante para A .

Es claro que si queremos establecer A a partir de B ha de haber una relación entre A y B , y como el equivalente en el lenguaje formal de $B \vdash A$ es $B \rightarrow A$, éste sólo podría establecerse si B es relevante para A .

Recuperar la noción de relevancia en un sistema formal no es un problema simple y no está resuelto, pero una condición mínima de relevancia de B para A puede ser que B y A tengan al menos una variable proposicional en común. Esta condición se satisface en los sistemas W ¹¹ y E ,¹² ya que en ellos sólo puede probarse $B \rightarrow A$ para fórmulas B , A que tengan un átomo en común.

Mencionemos finalmente que las consideraciones hechas acerca del carácter relevante y necesario de la implicación,

¹⁰ Cf. el Apéndice.

¹¹ Cf. el Apéndice.

¹² Cf. el Apéndice.

hacen afirmar a autores como Anderson y Belnap¹³ que la definición clásica de 'prueba a partir de hipótesis' es inadecuada ya que no recupera el sentido de 'a partir' (por la posible irrelevancia) ni establece lo probado con carácter necesario.

Apéndice

Presentamos aquí algunos de los sistemas que mencionamos en el trabajo. Los símbolos de los lenguajes considerados serán variables proposicionales y conectivos lógicos (para los cuales usamos las notaciones $\&$, \vee , \rightarrow , \sim). Las letras A , B , C , D , son usadas como variables metalingüísticas. En el cálculo C_1 usamos la abreviatura $A^\circ: \sim(A \& \sim A)$. La única regla de inferencia usada en todos los cálculos es *Modus Ponens*: $A, A \rightarrow B \vdash B$. La notación $X \vdash A$ indica: A se deriva de X .

AXIOMAS ESQUEMAS

- 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $A \& B \rightarrow A$
- 4 $A \& B \rightarrow B$
- 5 $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$
- 6 $A \rightarrow A \vee B$
- 7 $B \rightarrow A \vee B$
- 8 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
- 9 $\sim A \vee A$ 9' $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow A)$
- 10 $\sim \sim A \rightarrow A$ 10' $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 11 $B^\circ \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$
- 12 $A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \& B)^\circ$
- 13 $A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \vee B)^\circ$
- 14 $A^\circ \& B^\circ \rightarrow (A \rightarrow B)^\circ$

1-10 son los axiomas de C_ω .

¹³ Cf. [1].

1-14 son los axiomas de C_1

1-8, 9', 10 son los axiomas del *CPC* (cálculo proposicional clásico)

1-8, 9', 10' son los axiomas de *CPI* (cálculo proposicional intuicionista)

En C_1 el principio de reducción al absurdo: Si $X, A \vdash B$ y $X, A \vdash \sim B$ entonces $X \vdash \sim A$, no es válido, pero tenemos

Si $X, A \vdash B^\circ$ y $X, A \vdash B$ y $X, A \vdash \sim B$ entonces $X \vdash A$.

Agregando a C_1 el principio de no contradicción obtenemos *CPC*.

La lógica polivalente que podemos utilizar para probar que C_ω no es finitamente trivializable, tiene como valores de verdad el conjunto de los números naturales y como valores distinguidos los números naturales impares. Si notamos V_d y V_{nd} los valores distinguidos y no distinguidos, respectivamente, las funciones de verdad se definen como sigue:

$$v(A \& B) = \begin{cases} V_{nd} \{v(A), v(B)\} & \text{si sólo uno de los valores} \\ & \text{es no distinguido} \\ \text{máximo } \{v(A), v(B)\} & \text{en todos los otros casos} \end{cases}$$

$$v(A \vee B) = \begin{cases} V_d \{v(A), v(B)\} & \text{si sólo uno de los valores} \\ & \text{es distinguido} \\ \text{mínimo } \{v(A), v(B)\} & \text{en todos los otros casos} \end{cases}$$

$$v(\sim A) = v(A) + 1$$

$$v(A \rightarrow B) = \begin{cases} v(B) & \text{si } v(A) \text{ es distinguido y } v(B) \text{ no es} \\ & \text{distinguido o } v(A) \text{ y } v(B) \text{ son no dis-} \\ & \text{tinguidos y } v(A) < v(B) \\ 1 & \text{en todos los otros casos} \end{cases}$$

FRAGMENTO IMPLICATIVO DE LEWIS S_4

1 $A \rightarrow A$

- 2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B))$

FRAGMENTO IMPLICATIVO DE CHURCH \mathcal{W}

- 1 $A \rightarrow A$
- 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 4 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

SISTEMA IMPLICATIVO E

- 1 $A \rightarrow A$
- 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$
- 4 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- 5 $((A \rightarrow A) \rightarrow B) \rightarrow B$

Utilizando la matriz

\rightarrow	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	0
2	0	0	2

se prueba que en E , ningún enunciado condicional $B \rightarrow C$ se sigue de una variable proposicional A , ya que si $v(A) = 1$ entonces $v(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = 0$ pero todos los axiomas de E toman valor 2 y *Modus Ponens* conserva este valor.

Si $A \rightarrow B$ es probable en E o \mathcal{W} entonces A y B tienen una variable en común.

Esto se prueba utilizando la matriz

\rightarrow	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	2	2	3
2	0	1	2	3
3	0	0	0	3

Los axiomas de E y \mathcal{W} toman valores 2 o 3, pero si A y B no tienen una variable en común existe una asignación que da a $A \rightarrow B$ el valor 0.

La axiomatización dada por Wajsberg para la lógica de Lukasiewicz es la siguiente:

- 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 3 $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- 4 $((A \rightarrow \sim A) \rightarrow A) \rightarrow A$

BIBLIOGRAFÍA *

- [1] Anderson, A. y Belnap, N., "The Pure Calculus of Entailment", en *Journal of Symbolic Logic*, vol. 27 (1962).
- [2] Bellman, R. E. y Zadeh, L., "Local and Fuzzy Logic", en Dunn J. y Epstein, G. (eds.), *Modern Uses of Multiple Value Logic*, Reidel-Dordrecht (1977).
- [3] Da Costa, N., "On the Theory of Inconsistent Formal Systems", en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. XV, no. 4 (1974).
- [4] Lakoff, George, "Hedges: A Study in Meaning Criteria and the Logic of Fuzzy Concepts", en *Journal of Philosophical Logic*, 2 (1973).
- [5] Rescher, N., *Many-Value Logic*, McGraw Hill (1969).
- [6] Van Fraassen, "Comments: Lakoff's Fuzzy Propositional Logic", en Hockney et al. (eds.), *Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics*, Reidel-Dordrecht (1975).
- [7] Vasilév, N., "Imaginary (Non-Aristotelian) Logic", Atti del V Congresso Internazionale di Filosofia (Naples, 1925).
- [8] Zadeh, L., "Fuzzy Sets", *Information and Control*, 8 (1965).

* En [2], [3] y [5] aparecen amplias bibliografías.

SUMMARY

Classical logic's adequacy to deal with certain concepts has been put forward in our time as a problem which can be taken as part and parcel of our philosophical tradition. The various questionings of it which have been made as regards its scope of application, and some of its very principles as well, have in our century given rise to, among other things, non-classical systems of logic.

Vasilev, a forerunner in the treatment of many-valued logics, described his work as an attempt to do with Aristotelian logic what Lobatchevsky had done with regard to Euclidean geometry. From our viewpoint this is a correct approach: in the same way as non-Euclidean geometries are more adequate than Euclidean geometry to deal with certain problems, notably in physics, some non-classical logics are better adapted for the analysis of certain ideas and are more fit than classical logic to deal with certain provinces of natural languages or with approximation problems.

A semantic principle which, even though it has been accepted by the main trends of orthodox logic, had been already discussed and questioned by Aristotle in connection with future contingents, is the principle of two-valuedness, according to which:

Every statement is either true or false.

The taking into account of future contingent statements which can be analyzed as indeterminate, giving rise in this way to a third truth value, and the study of the various propositional modalities, is the source from which the questioning of this principle arises, jettisoning the creation of the so-called many-valued logics.

Different many-valued logics can be obtained by dealing with different propositional modalities as, for example, probabilistic, epistemical, existential, alethic.

From the beginning of their development many-valued logics were extended into systems with an infinite set of truth values; such systems were even considered by Lukasiewicz as those which, together with 3-value systems, hold the most interest from a philosophical standpoint. For many of these systems we have not as yet an adequate attribution of meanings to their truth values. Even if such is the case, they are of interest because of their applications in purely formal realms, e.g., independence proofs.

More recently we have seen the upsurge of fuzzy logics. The inferential process in them is more of a semantical than of a syntactical nature, with an intention to recapture the impreciseness of our usual

modes of reasoning rather than to deal with exact reasoning. Their conception, originating in the notion of fuzzy set introduced by Zadeh, intends to take into account the fact that statement within natural languages are neither true nor false in an absolute way but only in a certain degree and in a certain sense.

Different systems of fuzzy logics have been developed in which the set of truth values can be totally ordered or constitute a lattice; there are others in which the truth values are a fuzzy set. In this case, account is taken of the fact that one cannot assign a precise truth value to a vague statement.

In some systems of many-valued and fuzzy logics the principles of excluded third and of non-contradiction are not valid. The former, identified sometimes with the principle of two-valuedness, has been the most questioned of classical principles along history. It can be stated as:

For any statement A , $(A \vee \sim A)$ is valid.

The validity of this principle depends on how we interpret disjunction, negation and what we understand by "true", as well.

For example, if we take "to be true" as meaning "to be provable in a deductive systems S " and if S is incomplete, then for a statement A not provable in S , neither A nor $\sim A$ are true in S and hence $(A \vee \sim A)$ is not true.

By the same token, if we only admit as true something which has been established according to some rules or methods, and these have not yielded a proof neither of A nor of $\sim A$, then $(A \vee \sim A)$ will again not be true.

This last is the position adopted by intuitionists; for them the truth of a statement has to be established constructively.

The principle of non-contradiction can be stated thus:

For any statement A , $\sim(A \& \sim A)$ is valid.

From a formal viewpoint, the strongest reason to accept this principle, both in classical and in intuitionistic logic, is that both of them have as a valid formula:

(I) $((A \& \sim A) \rightarrow B)$, for any B whatsoever.

Hence if the principle were not taken as valid, this would render the system trivial.

Logics in which (I) is not valid can be used as bases for theories, T , in which we can admit, for a certain statement A , both A and $\sim A$ without making T trivial. To do this might be of interest from a philosophical standpoint, given a certain interpretation of negation, or

from a linguistic viewpoint if we are interested in natural languages. Implication has also been questioned in its classical interpretation. We can begin by pointing out the so-called paradoxes of material implication which, for some thinkers, follow from the acceptance of the principle

$$(II) (A \rightarrow (B \rightarrow A))$$

This principle is valid both in classical and in intuitionistic logics. The problem with (II) is that by accepting it and *modus ponens*, and by taking a statement A which might be contingently true, it follows then that A is necessarily implied by any statement B whatsoever, i.e.:

$$A \vdash B \rightarrow A.$$

In Lewis' system S_4 , (II) is not valid.

To remedy this apparent fault of implication, it has been suggested that for A to be implied by B , B has to be relevant for A . What this means is not clear as yet, but a proposal has been made that a minimal condition of relevancy of B for A is that both statements have, at least, a common propositional variable. Certain systems incorporating this notion have already been developed.

[J. A. Robles]