OBSERVACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE APROXIMACIÓN EMPÍRICA

IGNACIO JANÉ
UAM-Iztapalapa

0. *Introducción*

0.1. En [1] y [2] Moulines ofrece una elucidación del concepto de aproximación intrateórica en el contexto del programa estructural de reconstrucción de teorías empíricas. De acuerdo con tal elucidación, toda teoría científica, T, viene equipada con una uniformidad, **U**, definida sobre la clase Mp de los modelos potenciales de la teoría. De este modo, dos modelos, a, b $\in$ Mp son próximos o semejantes entre sí, si y sólo si hay un elemento X $\in$ **U** tal que el par $\langle a,b \rangle$ está en X. Ahora bien, no toda uniformidad en Mp es aceptable como vehículo de aproximación; una condición necesaria de aceptabilidad es que la uniformidad, **U**, en Mp induzca de un modo natural una uniformidad, R(**U**), en Mpp —la clase de todos los modelos potenciales parciales (es decir, desprovistos de interpretaciones para los conceptos T-teóricos) de la teoría en cuestión. Para expresar esta condición algo más precisamente, recordemos brevemente la definición de uniformidad y la relación entre las clases Mp y Mpp.

0.2. Si A es un conjunto no vacío, sea $\Delta(A)$, la diagonal de A, el conjunto $\{\langle x,x \rangle : x \in A\}$, y si X es una relación en A, es decir, si $X \subseteq A \times A$, sea $X \circ X$, la composición de X consigo misma, el conjunto de los pares $\langle x,z \rangle$ tales que para algún $y \in A$, tanto $\langle x,y \rangle$ como $\langle y,z \rangle$ están en X. Finalmente, si $X \subseteq A \times A$, sea X^{-1}, la inversa de X, el conjunto de los pares $\langle x,y \rangle$ tales que el par $\langle y,x \rangle$ está en X. Con estas definiciones previas, una uniformidad en A es

(1) un conjunto no vacío, $\mathbf{U}$, de relaciones en A

tal que

(2) si $X \in \mathbf{U}$ y si $X \subseteq Y \subseteq A \times A$, entonces $Y \in \mathbf{U}$
(3) si $X, Y \in \mathbf{U}$, entonces $X \cap Y \in \mathbf{U}$
(4) si $X \in \mathbf{U}$, entonces $\triangle(A) \subseteq X$
(5) si $X \in \mathbf{U}$, entonces $X^{-1} \subseteq U$
(6) si $X \in \mathbf{U}$, entonces hay un $Y \in \mathbf{U}$ tal que $Y \circ Y \subseteq X$.

0.3. Fijemos una teoría empírica, T, con clases Mp de modelos potenciales y Mpp de modelos potenciales parciales. Cada modelo $a \in Mp$ da lugar, por restricción, a un único modelo $r(a) \in Mpp$. La relación, r, de restricción es, pues, una función $r: Mp \rightarrow Mpp$, de hecho es *sobre* Mpp. Si ahora X es una relación en Mp, sea

$$r_2 [X] = \{ \langle r(x), r(y) \rangle : \langle x,y \rangle \in X \},$$

la restricción de X a Mpp. Con esta terminología, la condición necesaria mencionada de aceptabilidad para una uniformidad $\mathbf{U}$ en Mp es que el conjunto $R(\mathbf{U})$ de restricciones de elementos de $\mathbf{U}$ a Mpp, es decir el conjunto

$$R(U) = \{ r_2 [X] : X \in \mathbf{U} \}$$

sea a su vez una uniformidad en Mpp.

0.4. No toda uniformidad en Mp es aceptable en este sentido. En [1] pp. 213-220 Moulines define y justifica intuitivamente el concepto de *uniformidad empírica* y prueba que toda uniformidad empírica es aceptable. Su definición es la siguiente: una uniformidad, $\mathbf{U}$, en Mp es empírica si y sólo si

$$(D4)(2): (\forall X \in \mathbf{U})(\forall x,y,z)(\langle x,y\rangle \in X \,\&\, r(x) = r(z) \rightarrow \langle z,y\rangle \in X)$$

Pero esta definición presenta un problema. De hecho, en los casos interesantes toda uniformidad empírica en el sentido expuesto es trivial. Más precisamente: si T es una teoría en la cual todo modelo potencial parcial puede expandirse a por lo menos dos modelos potenciales distintos (lo cual ocurre siempre en teorías avanzadas), entonces hay una sola uniformidad empírica en la clase de los modelos potenciales de T, a saber, aquella según la cual dos modelos *cualesquiera* son *siempre* semejantes o próximos entre sí (ver 1.1 para una formulación precisa).

0.5 La organización de esta nota es como sigue: En *1* justifico la afirmación anterior y presento una definición alternativa de uniformidad empírica que, según creo, capta la intuición de Moulines expresada en [1] y muestro que, en cierto sentido, es la mejor definición posible (1.7, Observación). En *2* desarrollo formalmente el material presentado en *1* y proporciono las pruebas anunciadas allí.

1

1.1. *Objeción*: Supongamos que todo modelo en Mpp puede expandirse a por lo menos dos modelos distintos en Mp (es decir, que si $x \in \mathrm{Mpp}$, entonces hay $a, b \in \mathrm{Mp}$, $a \neq b$, tales que $r(a) = r(b) = x$). Bajo tal condición hay una única uniformidad empírica en Mp —la uniformidad trivial, es decir, la uniformidad cuyo único elemento es el conjunto $\mathrm{Mp} \times \mathrm{Mp}$. ("Empírica" según (D4)(2)).

Justificación: Supongamos que **U** sea una uniformidad empírica en Mp y que la suposición de la Objeción se cumple. Si **U** no es trivial, hay un $X \in \mathbf{U}$ y hay $a, b \in \mathrm{Mp}$ tales que $\langle a,b\rangle \notin X$. Sea $a' \in \mathrm{Mp}$, $a \neq a'$, $r(a) = r(a')$. Puesto que **U** es empírica, $\langle a',b\rangle \notin X$. Por (2) en la definición de uniformidad, $X \cup \{\langle a,b\rangle\} \in \mathbf{U}$. Pero esto es imposible ya que $\mathbf{U}$ es empírica y $\langle a'b\rangle \notin X \cup \{\langle a,b\rangle\}$.

1.2. Afortunadamente, la objeción anterior es muy superficial. Una manera obvia de escapar a ella sin dañar el contenido intuitivo en la definición (D4)(2) sería exigir que, en la definición de uniformidad empírica, la condición (D4)(2) fuera satisfecha no por cada elemento de la uniformidad $\mathbf{U}$ sino solamente por cada elemento en una base para $\mathbf{U}$. Más precisamente, la condición (D4)(2) podría substituirse por la condición:

$$(D4)(2'): \ (\forall X \in \mathbf{U})(\exists Y \subseteq X, \ Y \in \mathbf{U})(\forall x,y,z)(\langle x,y\rangle \in Y \wedge r(x) = r(z) \rightarrow \langle z,y\rangle \in Y)$$

1.3. Una manera más elegante de evitar la objeción 1.1 es la siguiente.
Pongamos

$$\Psi = \{\langle x,y\rangle \in Mp \times Mp : r(x) = r(y)\}$$

(Ψ puede ser llamada "la pseudo-diagonal de Mp" y redefinamos una uniformidad empírica como una uniformidad, $\mathbf{U}$, en Mp que satisfaga

$$(D4)(2''): \ (\forall X \in \mathbf{U})(\Psi \subseteq X).$$

1.4. (D4)(2′) y (D4)(2″) son equivalentes entre sí y, además, son equivalentes a una condición adicional (ver 1.7) que afirma que $\mathbf{U}$ es obtenible de un modo natural a partir de alguna uniformidad en Mpp. La prueba de la equivalencia entre (D4)(2′) y (D4)(2″) se encuentra en 2. *Prop. 1* ((i) $\leftrightarrow$ (iii)). A partir de ahora, *tomemos (D4)(2″) como la definición oficial de uniformidad empírica.*

1.5. En primer lugar, debemos comprobar que si $\mathbf{U}$ es una uniformidad empírica en Mp y que si definimos una familia,

$R(\mathbf{U})$, de subconjuntos de Mpp $\times$ Mpp mediante la ecuación

$$(*)\quad R(\mathbf{U}) = \{r_2[x] : X \in \mathbf{U}\}$$

(donde $r_2 : Mp \times Mp \to Mpp \times Mpp$ es la función dada por $r_2(\langle x,y\rangle) = \langle r(x), r(y)\rangle$), entonces $R(\mathbf{U})$ es una uniformidad en Mpp, a la que podemos referirnos como a *la restricción de* **U** *a Mpp.*
Este es el contenido de 2. *Prop. 2.*

1.6. Sin embargo, la situación es algo mejor. Hay una forma canónica de obtener una uniformidad en Mp a partir de una uniformidad en Mpp. A saber, sea **V** una uniformidad en Mpp y pongamos

$$(*,*)\quad E(\mathbf{V}) = \{X \subseteq Mp \times Mp : (\exists Y \in V)\} \\ (r_2^{-1}[Y] \subseteq X)$$

Entonces $E(\mathbf{V})$ es una uniformidad en Mp, a la que podemos referirnos como a *la expansión de* **V** *a* Mp. $E(\mathbf{V})$ es empírica, ya que $\Psi \subseteq r_2^{1-}[\triangle(Mpp)]$.
Esto se prueba en *2. Prop. 3.*
La situación algo mejor a la que hemos aludido puede describirse como sigue:
Si **U** es una uniformidad empírica en Mp, entonces

$$\mathbf{U} = E(R(\mathbf{U})).$$

En otras palabras, si partimos de una uniformidad empírica, **U**, en Mp y aplicamos (*) obtenemos una uniformidad $R(\mathbf{U})$ en Mpp. Si ahora aplicamos (*,*) a $R(\mathbf{U})$ regresamos a nuestro punto de partida, es decir, a **U**.
Este es el contenido de *2. Prop. 5.*

1.7. De hecho, las uniformidades empíricas en Mp son precisamente aquellas que se obtienen como expansiones de uniformidades en Mpp. Con más detalle:

Observación: **U** es una uniformidad empírica en Mp si y sólo si hay una uniformidad, **V**, en Mpp tal que $\mathbf{U} = E(\mathbf{V})$.

Justificación: Si **U** es empírica, $\mathbf{U} = E(R(\mathbf{U}))$ —según sabemos. Por otra parte, si $\mathbf{U} = E(\mathbf{V})$, donde **V** es una uniformidad en Mpp, entonces, y dado que cada $Y \in \mathbf{V}$ incluye (como subconjunto) a $\triangle(Mpp)$, cada $X \in \mathbf{U}$ debe ser tal que

$$\Psi = r_2^{-1}[\triangle(Mpp)] \subseteq X$$

probando así que **U** es empírica.

1.8. *Conclusión.* Si queremos una uniformidad empírica en Mp, podemos partir de una uniformidad arbitraria en Mpp. Por expansión, tal uniformidad da lugar a una uniformidad empírica en Mp y la observación anterior nos asegura que nada se pierde con tal procedimiento.

1.9. Por completud, podemos añadir lo siguiente:

Si **V** es una uniformidad en Mpp, entonces

$$\mathbf{V} = R(E(\mathbf{V})).$$

Es decir, si aplicamos (*,*) a **V** obtenemos la uniformidad $E(\mathbf{V})$ en Mp. Puesto que $E(\mathbf{V})$ es empírica, podemos aplicar (*) a ella —obteniendo **V**.

Tal es el contenido de 2. *Prop. 7.*

1.10. *Nota.* Hay una condición necesaria y suficiente que una uniformidad **U** en Mp debe satisfacer para que su restricción $R(\mathbf{U})$ sea una uniformidad en Mpp. Tal condición es la siguiente:

$$(\forall X \in \mathbf{U})(\exists Y \in \mathbf{U})(\forall x,y,z,u \in Mp)$$
$$(\langle x,y\rangle \in Y \ \&\ \langle z,u\rangle \in Y \ \&\ r(y) = r(z) \rightarrow$$

$$(\exists x',u')(r(x) = r(x') \,\&\, r(u) = r(u') \,\&\, \langle x',u'\rangle \in X)).$$

Sin embargo, aquí no consideraré en absoluto tal condición, ya que no parece ser relevante intuitivamente para el concepto de aproximación empírica.

2

2.1. Sea A un conjunto no vacío, $\equiv$ una relación de equivalencia en A.

Definiciones:

(i) Un conjunto $X \subseteq A \times A$ es $\equiv$–*cerrado* si y sólo si $(\forall x,x',y,y' \in A)(\langle x,y\rangle \in X \,\&\, x \equiv x' \,\&\, y \equiv y' \rightarrow \langle x,y'\rangle \in X)$

(ii) Un conjunto $X \subseteq A \times A$ es $\equiv$–*cerrado por la izquierda* syss $(\forall x,x',y \in A)(\langle x,y\rangle \in X \,\&\, x \equiv x' \rightarrow \rightarrow \langle x',y\rangle \in X)$

(iii) Sea **U** una uniformidad en A. β *es una base para* **U** syss $\mathbf{U} = \{X \subseteq A \times A : (\exists Y \in \beta)(Y \subseteq X)\}$

(iv) $\Psi(\equiv) = \{\langle x,y\rangle \in A \times A : x \equiv y\}$
(Cuando no haya duda acerca de la relación de equivalencia de la que hablamos, escribiremos 'Ψ' en vez de '$\Psi(\equiv)$'

(v) Sea **U** una uniformidad en A. U es $\equiv$–*aceptable* syss $(\forall X \in \mathbf{U})(\Psi(\equiv) \subseteq X)$.

Proposición 1. Sea **U** una uniformidad en A, $\equiv$ una relación de equivalencia en A. Las siguientes condiciones son equivalentes entre sí:

(i) U es $\equiv$–aceptable.
(ii) Los conjuntos $\equiv$–cerrados en **U** forman una base para **U**.

(iii) Los conjuntos $\equiv$–cerrados por la izquierda que están en **U** forman una base para **U**.

Prueba.

(i)$\rightarrow$(ii): Supongamos que U es $\equiv$–aceptable y sea $x \in \mathbf{U}$. Debemos encontrar $Y \subseteq X$, $Y \in \mathbf{U}$, Y $\equiv$–cerrado. Puesto que **U** es una uniformidad, hay Z, $W \in \mathbf{U}$ tales que

$$Z \subseteq Z \circ Z \subseteq W \subseteq W \circ W \subseteq X.$$

Pongamos

$$Y = \{\langle x',y'\rangle : (\exists\, x,y)(\langle x,y\rangle \in Z \,\&\, x \equiv x' \,\&\, y \equiv y')\}$$

(Y es la $\equiv$–clausura de Z). Entonces:

1) $Y \in \mathbf{U}$ (ya que $Z \subseteq Y$).

2) Y es $\equiv$–cerrado (por definición de Y y el hecho de que $\equiv$ es una relación de equivalencia).

3) $Y \subseteq X$ (Pues sea $\langle x',y'\rangle \in Y$. Así, hay $\langle x,y\rangle \in Z$ tal que $x \equiv x'$, $y \equiv y'$. Puesto que **U** es $\equiv$–aceptable, $\langle x'x\rangle \in Z$, y, por tanto, $\langle x',y\rangle \in Z \circ Z \subseteq W$. Usando de nuevo la suposición de que **U** es $\equiv$–aceptable, tenemos que $\langle y,y'\rangle \in W$. Por consiguiente, $\langle x',y'\rangle \in W \circ W \subseteq X$.)

(ii)$\rightarrow$(iii): Trivial, ya que todo conjunto $\equiv$–cerrado es $\equiv$–cerrado por la izquierda.

(iii)$\rightarrow$(i): Supongamos que **U** satisface (iii). Sean $X \in \mathbf{U}$, $x \equiv y$. Debemos ver que $\langle x,y\rangle \in X$. Sea $Y \subseteq X$, Y $\equiv$–cerrado por la izquierda. Puesto que $\langle y,y\rangle \in Y$, vemos que $\langle x,y\rangle \in Y \subseteq X$. Esto concluye la prueba de Prop. 1.

2.2. *Notación.* Para lo que sigue, fijemos:

A, B, conjuntos no vacíos

$r: A \xrightarrow{\text{sobre}} B$

$\equiv_r$, la relación de equivalencia en A inducida por r; es decir, $a \equiv_r a'$ si y sólo si $r(a) = r(a')$.

r_2: $A \times A \xrightarrow{\text{sobre}} B \times B$, la función dada por $r_2(\langle a,a' \rangle) = \langle r(a), r(a') \rangle$

Si **U** es una uniformidad en A, sea

$R(\mathbf{U}) = \{r_2[X] : X \in \mathbf{U}\}$

Si **V** es una uniformidad en B, sea

$E(\mathbf{V}) = \{X \subseteq A \times A : (\exists Y \in \mathbf{V})(r_2^{-1}[Y] \subseteq X)$

Proposición 2. Si **U** es una uniformidad $\equiv_r$–aceptable en A, entonces $R(\mathbf{U})$ es una uniformidad en B.

Prueba. La única condición no obvia es que para todo $Y \in R(\mathbf{U})$ hay un $Z \in R(\mathbf{U})$ tal que $Z \circ Z \subseteq Y$. Sea $Y \in R(\mathbf{U})$. Hay pues $X \in \mathbf{U}$ tal que $Y = r_2[X]$. Puesto que **U** es una uniformidad, hay un $W \in \mathbf{U}$ tal que $W \circ W \subseteq X$ y, puesto que U es $\equiv_r$–aceptable; podemos suponer que W es $\equiv_r$ –cerrado por la izquierda. Basta verificar que $r_2[W] \circ r_2[W] \subseteq Y$. Ahora bien, supongamos que $\langle x,y \rangle, \langle y,z \rangle \in r_2[W]$ —digamos $x = r(a)$, $y = r(b) = r(b')$, $z = r(c)$, con $\langle a,b \rangle$, $\langle b',c \rangle \in W$. Puesto que $b \equiv_r b'$ y W es $\equiv_r$–cerrado por la izquierda, $\langle b,c \rangle \in W$. Por tanto, $\langle a,c \rangle \in W \circ W \subseteq X$. Así, $\langle r(a), r(c) \rangle \in r_2[X] = Y$. Esto concluye la prueba.

Proposición 3. Si **V** es una uniformidad en B, entonces $E(\mathbf{V})$ es una uniformidad $\equiv_r$–aceptable en A.

Prueba. Para justificar la afirmación de que $E(\mathbf{V})$ es una uniformidad, ver [3], capítulo 6, observaciones después del teorema 9. Para convencerse de que $E(\mathbf{V})$ es $\equiv_r$–aceptable, nótese que $\Psi = r_2^{-1}\ [\triangle(B)]$; de modo que si $X \in E(\mathbf{V})$; $\Psi \subseteq X$.

Lema 4. Si X es $\equiv_r$–cerrado, $X \subseteq A \times A$, entonces $r_2^{-1}\ [r_2 [X]] = X$.

Prueba: Sea X $\equiv_r$–cerrado y supongamos que $\langle u,v \rangle \in r_2^{-1}$ $[r_2\ [X]]$. Hay, pues, $\langle u',v' \rangle \in X$ tal que $r_2(\ \langle u,v \rangle\ ) = r_2$ $(\ \langle u',v' \rangle)$, es decir $u \equiv_r u'$ y $v \equiv_r v'$. Así, dado que X es $\equiv_r$–cerrado, $\langle u,v \rangle \in X$. Esto muestra que $r_2^{-1}\ [r_2 [X]] \subseteq X$. La inclusión opuesta es bien conocida.

Proposición 5. Si $\mathbf{U}$ es una uniformidad $\equiv_r$–aceptable en A, entonces $\mathbf{U} = E(R(\mathbf{U}))$.

Prueba.

1) $\mathbf{U} \subseteq E(R(\mathbf{U}))$: Sea $X \in \mathbf{U}$. Puesto que $\mathbf{U}$ es $\equiv_r$–aceptable, podemos encontrar $Z \subseteq X$, $Z \equiv_r$–cerrado, $Z \in \mathbf{U}$. Entonces $r_2\ [Z] \in R(\mathbf{U})$ y, por consiguiente, $r_2^{-1}\ [r_2\ [Z]] \in E(R(\mathbf{U}))$. Por el Lema 4, $Z = r_2^{-1}\ [r_2\ [Z]]$. Así, $Z \in E(R(\mathbf{U}))$. Por tanto, ya que $Z \subseteq X$ y que $E(R(\mathbf{U}))$ es una uniformidad, $X \in E(R(\mathbf{U}))$.

2) $E(R(\mathbf{U})) \subseteq \mathbf{U}$: Sea $X \in E(R(\mathbf{U}))$. Hay pues, $Y \in R(\mathbf{U})$ tal que $r_2^{-1}\ [Y] \subset X$. Por definición de $R(\mathbf{U})$, hay $Z \in \mathbf{U}$ tal que $Y = r_2\ [Z]$. Así, $Z \subseteq r_2^{-1}\ [r_2 [Z]] = r_2^{-1}\ [Y] \subset X$. De donde $X \in \mathbf{U}$.

Lema 6. Si $Y \subseteq B \times B$, entonces $r_2\ [r_2^{-1}\ [Y]] = Y$.
Prueba. Inmediato a partir del hecho de que r_2 es sobre $B \times B$.

Proposición 7. Si $\mathbf{V}$ es una uniformidad en B, entonces $\mathbf{V} = R(E(\mathbf{V}))$.

Prueba.

1) $\mathbf{V} \subseteq R(E(\mathbf{V}))$: Sea $Y \in \mathbf{V}$. Así, $r_2^{-1}[Y] \in E(\mathbf{V})$. Por tanto, $r_2[r_2^{-1}[Y]] \in R(E(\mathbf{V}))$. Por el Lema 6, $Y \in R(E(\mathbf{V}))$.

2) $R(E(\mathbf{V})) \subseteq \mathbf{V}$: Sea $Y \in R(E(\mathbf{V}))$. Hay, pues, $X \in E(\mathbf{V})$ tal que $r_2[X] = Y$. Puesto que $X \in E(\mathbf{V})$, hay $Z \in \mathbf{V}$ tal que $r_2^{-1}[Z] \subseteq X$. Por tanto, $Y = r_2[X] \supseteq r_2[r_2^{-1}[Z]] = Z$ (por Lema 6). Puesto que $\mathbf{V}$ es una uniformidad y $Z \in \mathbf{V}$, concluimos que $Y \in \mathbf{V}$.

REFERENCIAS

Moulines, C. U. *Approximate Application of Empirical Theories: A General Explication*, en *Erkennis*, vol. 10 (1976), pp. 201-227.

Moulines, C. U. *Un concepto estructural de aproximación empírica*, en *Crítica*, vol. VIII, No. 24 (1976), pp. 25-51.

Kelley, J. L. *General Topology*. Springer-Verlag (1955).

SUMMARY

These remarks are intended as an improved definition of Moulines' concepts of empirical uniformity as provided in [1] p. 218. Moulines' intention is to set forth conditions on uniformities on the class Mp of all potential full models of a given empirical theory so that its restriction to the class Mpp of all its partial models be a uniformity on Mpp. Here it is shown that Moulines' condition (Def. 4) is too strict to be of general interest and a new definition is offered. According to this new definition, an empirical uniformity on Mp is a uniformity, U, such that every set in U contains all pairs of expansions to Mp of any single partial model. It is shown that this new definition reflects the old's intuitive content and that empirical uniformities are precisely those obtained by expansion to Mp of arbitrary uniformities on Mpp.

[I. J.]