SOBRE FUNCIONES Y COMPOSICIÓN DE RELACIONES

JESÚS MOSTERÍN
Universidad Central
de Barcelona

Actualmente suele considerarse que una relación (binaria) es una función (monaria) si y sólo si el segundo miembro de cada una de sus díadas está unívocamente determinado por el primero. Por eso en casi todos los libros de lógica, teoría de conjuntos y matemática en general encontramos definiciones que vienen a decir que para cualquier relación R:

(1) R es una función $\leftrightarrow \forall xyz\ (xRy \;\&\; xRz \rightarrow y = z)$
o, en notación conjuntista:
(1′) R es una función $\leftrightarrow \forall xyz\ (\langle x,y\rangle \in R \;\&\; \langle x,z\rangle \in R \rightarrow y = z)$

Se llama argumento al primer miembro de cada díada relacionada, y valor o imagen, al segundo. Puesto que el valor está unívocamente determinado por la función y el argumento, se puede caracterizar el R de x como el único y tal que xRy.

(2) $R\,(x) = \iota y\ (x\,R\,y)$
o, si se prefiere:
(2′) $R\,(x) = \iota y\ \langle x,y\rangle \in R$

De aquí se sigue que para cualquier función R y cualquier argumento suyo x, x está en la relación R con $R\,(x)$.

(3) $x\,R\,R\,(x)$
o, en jerga conjuntista:
(3′) $\langle x, R\,(x)\rangle \in R$

De (1), (2) y (3) se sigue finalmente que para cualquier función R y cualquier argumento suyo x, ocurre que x está en la relación R con un individuo si y sólo si el individuo es precisamente $R(x)$.

(4) $\forall y \, (xRy \leftrightarrow y = R(x))$
o, si se prefiere:
(4') $\forall y \, (\langle x,y \rangle \in R \leftrightarrow y = R(x))$

Esta concepción de las funciones como relaciones unívocas ha representado un gran progreso en la clarificación de las nociones básicas de la matemática. Lo esencial de ella consiste en que un miembro de cada díada está unívocamente determinado por otro. Ahora bien, decidir si queremos que sea el primer miembro de cada díada el que esté determinado por el segundo, o más bien sea el segundo el que quede determinado por el primero, es un asunto meramente convencional, carente de toda importancia matemática. De hecho actualmente casi todos los autores[1] adoptan la convención ya expuesta de que para llamar función a una relación es preciso que el segundo miembro de cada una de sus díadas esté unívocamente determinado por el primero. De esta convención (1) se siguen (2), (3) y (4).

Estas convenciones, tan generalizadas entre lógicos y matemáticos, chirrían lamentablemente en cuanto las aplicamos al lenguaje ordinario.

En el lenguaje ordinario se usan las mismas palabras (sustantivos, adjetivos ...) como relatores y como functores, anteponiéndoseles en este último caso el artículo determinado. Así decimos de un hombre que es autor de algo o padre de alguien (donde usamos "autor" o "padre" como relatores) y nos referimos a él como el autor de ese algo o el

[1] Véanse, por ejemplo, los libros de teoría de conjuntos de Kuratowski & Montowski, de Takevti & Zaring, de Suppes, de Levy, de Lemmon, de Morse, de Schmidt, de Mosterín (donde (1'), (2'), (3') y (4') corresponden exactamente a 7.1, 7.6, 7.7 y 7.8), etc. y casi todos los libros recientes de matemáticas en que estas nociones se definen explícitamente.

padre de ese alguien (donde usamos "autor" o "padre" como functores). Esto se corresponde bien con la concepción matemática de una función como un tipo especial de relación. Pero las convenciones arriba indicadas producen aquí resultados absurdos. Veámoslo.

Sea P la relación de paternidad, sea a Antonio y c, Carlitos. Supongamos que Antonio es un hombre que tiene un solo hijo: Carlitos. Antonio es padre de Carlitos.

aPc

Según la convención (2), de aquí se sigue que $P(a) = \iota y\,(a P y)$. Por tanto, y puesto que $\iota y\,(a P y) = c$

$P(a) = c$

Es decir, el padre de Antonio es Carlitos. Pero habíamos supuesto que Antonio era padre de Carlitos y, por tanto, que Carlitos es hijo de Antonio. Así, pues, el padre de Antonio es Carlitos y el hijo de Antonio es Carlitos. En resumen, el padre de Antonio es el hijo de Antonio. Esto es absurdo, pero inescapable, si aceptamos (2).

Consideremos ahora (3), que decía que para cada función R, x está en la relación R con $R(x)$. De aquí se sigue, por ejemplo, que

$a P P(a)$

Es decir, Antonio es padre del padre de Antonio, o lo que es lo mismo: ¡Antonio es abuelo de sí mismo! En general estas expresiones son absurdas, pero se siguen inexorablemente de (3).

Consideremos finalmente (4), que decía que para cualquier función R y cualquier argumento suyo x ocurre que:

(4) $\forall y\,(x R y \leftrightarrow y = R(x))$

Aplicando esto a a, P y c obtenemos:

$a P c \leftrightarrow c = P(a)$

Es decir, Antonio es padre de Carlitos si y sólo si Carlitos es el padre de Antonio. Del mismo modo podemos concluir que Cervantes es autor de Don Quijote si y sólo si Don Quijote es el autor de Cervantes. López Portillo es presidente de México si y sólo si México es el presidente de López Portillo. Todo esto es grotesco, pero se sigue de (4).

Acabamos de ver que la aplicación de (1), (2), (3) y (4) al lenguaje ordinario produce conclusiones peregrinas y absurdas. Lo mismo ocurre si aplicamos la definición actualmente más generalizada de la composición de relaciones.

Los matemáticos definen normalmente[2] la composición $R \circ S$ de las relaciones R y S del siguiente modo:

(5) $\forall xy\ (x\, R \circ S\, y \leftrightarrow \exists z\ (x\, S\, z\ \&\ z\, R\, y)$

o, en notación conjuntista:

(5′) $R \circ S = \{\langle x,y\rangle \mid \exists z(\langle x,z\rangle \in S\ \&\ \langle z,y\rangle \in R)\}$

Mediante esta definición obtienen lo que les interesa, a saber, que para el caso de que R y S sean funciones, ocurra que

(6) $(F \circ G)\ (x) = F\ (G\ (x))$.

Y si la definición (5) no concuerda con el lenguaje ordinario, tanto peor para el lenguaje ordinario. Y, en efecto, el pobre lenguaje cotidiano no podía salir peor parado, como a continuación veremos.

A veces decimos de alguien no sólo que es hermano de fulano, sino que es hermano del padre de fulano, es decir, que es tío de fulano. La relación "... es tío (paterno) de ..." es la composición de "... es hermano de ..." y "... es padre de ...". Designando por T, H y P estas relaciones, tenemos que T es la composición de H y P.

$$T = H \circ P$$

Por tanto, decir que x es tío de w equivale a decir que x es hermano de alguien que es padre de w, a decir que x es her-

[2] Por ejemplo, véanse los libros de teoría de conjuntos de Kuratowski & Mostowski, de Takenti & Zaring, de Morse, de Schmidt, etc. y casi todos los libros recientes de matemáticas.

mano del padre de w. Pero si aplicamos la definición (5), obtenemos:

$$x\,T\,w \leftrightarrow \exists z\,(x\,P\,z\,\&\,z\,H\,w)$$

Es decir, x es tío de w si y sólo si x es padre de alguien que es hermano de w. Así pues, ser tío de alguien es ser padre de su hermano y, por tanto, ¡ser tío de alguien es ser su padre!

De igual modo, si definimos el sobrino como el hijo del hermano (o hermana), es decir, si consideramos que la relación "... es sobrino de ..." es la composición de "... es hijo de ..." y "... es hermano de ...", de (5) se seguirá que el sobrino no es el hijo del hermano, sino el hermano del hijo, es decir, el hijo.

Una definición de la composición de relaciones según la cual el tío es el padre y el sobrino es el hijo evidentemente no es adecuada para su aplicación al lenguaje cotidiano.

La definición (5) de la composición de relaciones sirve a los matemáticos, porque de ella se sigue (6), pero resulta catastrófica al aplicarla al lenguaje ordinario. Lo que necesitamos en el lenguaje ordinario es una definición como ésta:

$$(7)\quad x\,R \circ S\,y \leftrightarrow \exists z\,(x\,R\,z\,\&\,z\,S\,y)$$

De aquí se sigue lo que esperamos que se siga, por ejemplo (y recordando que $T = H \circ P$), que

$$x\,T\,w \leftrightarrow \exists z\,(x\,H\,z\,\&\,z\,P\,w)$$

Es decir, x es el tío (paterno) de w si y sólo si x es hermano de alguien que es padre de w; x es hermano del padre de w, que es lo que queremos obtener.

La definición (7) de la composición de relaciones funciona perfectamente en el lenguaje ordinario. ¿Por qué hay tantos lógicos y matemáticos que prefieren la definición (5), de tan absurdas consecuencias? Porque de (7), junto con (1) y (2), se sigue[3] que para funciones R y S:

$$(R \circ S)\ (x) = S\ (R\ (x))$$

Y eso es algo que quieren evitar,[4] por antiintuitivo. En vez de ello quieren obtener (6), es decir

$$(R \circ S)\ (x) = R\ (S\ (x))$$

Si fuese posible deducir (6) de (7), sería absurdo aferrarse a la definición (5). Convendría adoptar la definición (7), de la que los matemáticos podrían obtener (6), que es lo que les interesa, y que los demás podrían aplicar sin traumas al lenguaje ordinario. Pero, ¿es posible obtener (6) a partir de (7)? No, mientras mantengamos (1) y (2). Sí, si cambiamos (1) y (2), que junto con sus consecuencias (3) y (4), eran —como vimos— una fuente de absurdas consecuencias, al aplicarse al lenguaje ordinario. Así pues, tenemos una doble motivación para cambiar (1) y (2): por un lado, eliminar sus desastrosas consecuencias para el lenguaje ordinario; por otro, permitirnos adoptar la definición (7) de la composición de relación, conservando (6).

¿Es posible sustituir (1) y (2) por otras convenciones igual de simples y matemáticamente equivalentes, compatibles con el lenguaje ordinario y con (7) y (6)? Sí es posible. De hecho, no sólo es posible, sino que ya Peano, Russell, Gödel y Quine[5] lo han hecho así. En efecto, todo lo que ne-

[3] Así, por ejemplo, en mi libro *Teoría axiomática de conjuntos*, que acepta las convenciones (1) y (2), pero define la composición de relaciones del modo lingüísticamente razonable (7), se obtiene como teorema $(R \circ S)\ (x) = S\ (R(x))$, lo que resulta indeseable, por no coincidir con el uso matemático normal.

[4] Para evitar esta dificultad, P. Suppes (en *Axiomatic Set Theory*, pp. 63 y 87) recurre a usar dos signos distintos y dos conceptos distintos (y hasta opuestos) de composición, según se trate de relaciones en general o de relaciones que son funciones, lo cual no deja de ser una solución engorrosa y artificiosa.

[5] La definición de una función como una relación en la que el primer miembro de cada díada está unívocamente determinado por el segundo se encuentra claramente articulada en G. Peano: *Sulla definizione di funzione*. Atti

cesitamos es definir una función (monaria) como una relación (binaria) en la que el primer miembro de cada una de sus díadas está unívocamente determinado por el segundo. En vez de (1) tendríamos que para cualquier relación R:

(8) R es una función $\leftrightarrow \forall x\, y\, z\, (x\, R\, z\, \&\, y\, R\, z \rightarrow x = y)$

Ahora tendríamos que llamar argumento al segundo miembro de la díada, que determina unívocamente al primero. Así, podemos caracterizar el R de x como el único y tal que $y\, R\, x$.

(9) $R\,(x) = \iota\, y\, (y\, R\, x)$

Con esto desaparecen todos los inconvenientes. De (8) y (9) ya no se siguen (3) y (4), sino

(10) $R\,(x)\, R\, x$

(11) $\forall y\, (x\, R\, y \leftrightarrow x = R\,(y))$

Lo cual corresponde a nuestras intuiciones del lenguaje ordinario. Aplicando esto a Antonio y Carlitos, ahora ya no obtenemos consecuencias absurdas, sino lo que era de esperar. De (1) y (11) se sigue

$P\,(c)\, P\, c$

Es decir, el padre de Carlitos es padre de Carlitos. De (1) y (11) se sigue también

$a\, P\, c \leftrightarrow a = P\,(c)$

delle Reale Accademia dei Lincei, 1911; B. Russell & A. N. Whitehead: *Principia Mathematica* (part I, 30.01), 1910; K. Gödel: *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, 1940; W. O. Quine: *Set Theory and its Logic*. Estas tres últimas obras contienen también la definición de la composición de relaciones compatible con el lenguaje ordinario.

Es decir, Antonio es padre de Carlitos si y sólo si Antonio es el padre de Carlitos. Asimismo, Cervantes es autor de Don Quijote si y sólo si Cervantes es el autor de Don Quijote. López Portillo es presidente de México si y sólo si López Portillo es el presidente de México, etc.

Adoptando las convenciones (8), (9) y (7) en vez de (1), (2) y (5) se solucionan todos los problemas que planteaba la aplicación de (1), (2), (3), (4) y (5) al lenguaje ordinario. Además, no sólo (6) es compatible con (8), (9) y (7), sino que ya se sigue de ellos, con lo que se evitan los grotescos resultados de la aplicación de (5) al lenguaje cotidiano, sin por ello perjudicar en nada al uso matemático de $F \circ G$ reflejado en (6), que sigue siendo válido.

Además, (8) y (9) son más naturales que (1) y (2) incluso para el lenguaje matemático. Simbolicemos por S la relación "... es el siguiente de ...". El 5 es el siguiente del 4. Por tanto,

$$5\,S\,4$$

De (2) se sigue

$$S\,(5) = 4$$

Es decir, el siguiente de 5 es 4, lo cual es absurdo.[6] Sin embargo, de (9) se sigue

$$S\,(4) = 5$$

Es decir, el siguiente de 4 es 5, lo cual es lo que queremos decir.

Así pues, incluso en el lenguaje matemático (8), (9) y (7) parecen tener ventajas sobre (1), (2) y (5). Sin embargo, y aun teniendo tantas ventajas y tan pocos inconvenientes, la combinación de convenciones (1), (2) y (5) se ha extendido actualmente mucho más que la otra en la lógica,

[6] Los matemáticos que adoptan las convenciones (1) y (2) no dicen, naturalmente, que el siguiente de 5 es 4, no se contradicen. Pero esto sólo lo consiguen a base de evitar usar el signo S como relator, usándolo sólo como functor. Utilizan el lenguaje ordinario para predicar de un número que es el siguiente de otro y el lenguaje formal para referirse al siguiente de un número. Las convenciones (8) y (9) permiten eliminar tales reservas y usar sin contradicción el mismo signo S como relator y functor, tal como en el lenguaje ordinario utilizamos la misma palabra "siguiente" como relator y como functor.

teoría de conjuntos y matemáticas. Sólo Quine[7] —que yo sepa— ha elevado su voz contra este estado de cosas.

¿A qué se debe la amplia aceptación de las convenciones (1), (2) y (5), a pesar de su flagrante incompatibilidad con el lenguaje ordinario? Es posible que en gran parte se deba al gran uso que actualmente se hace de las funciones como aplicaciones de un conjunto —el de los argumentos— en otro (o el mismo) —el de los valores o imágenes.

Llamemos dominio de F al conjunto de los argumentos (o cosas para las que F está definida o "valores de la variable independiente") de la función F, y recorrido de F al conjunto de las imágenes (o valores o "valores de la variable dependiente") de la función F. El hecho de que F sea una aplicación de A en B, es decir, el hecho de que el dominio de F sea A y su recorrido esté incluido en B se expresa así:

$$F : A \rightarrow B$$

Si llamamos $\mathbf{D}\,F$ al dominio de F y $\mathbf{R}\,F$ al recorrido de F, la definición usual es:

(12) $F : A \rightarrow B \leftrightarrow F$ es una función $\& \, \mathbf{D}\,F = A \, \& \, \mathbf{R}\,F \subset B$

Esta manera de representar las funciones está tan extendida y en muchos casos es tan intuitiva que cualquier definición de las funciones incompatible con ella está abocada al fracaso. Ahora bien, si definimos el dominio y el recorrido (o contradominio) de una relación como es usual, es decir

(13) $\mathbf{D}\,R = \{x \mid \exists y \; x R y\}$
$\mathbf{R}\,R = \{y \mid \exists x \; x R y\}$

entonces ocurre que la definición (12) sólo es adecuada suponiendo las convenciones (1) y (2) —incompatibles con el lenguaje ordinario, como vimos—, pero no las convenciones

[7] Véase W. O. Quine: *Set Theory and its Logic*, revised edition, 1969, pp. 23-26.

(8) y (9), que eran las deseables lingüísticamente. Esta dificultad puede eliminarse fácilmente considerando que el dominio es el conjunto de los segundos miembros de las díadas relacionadas, mientras que el recorrido es el conjunto de los primeros, es decir, sustituyendo la convención (13) por la siguiente:

$$(14)\quad \begin{aligned} \mathbf{D}\,R &= \{x \mid \exists y\; y\,R\,x\} \\ \mathbf{R}\,R &= \{y \mid \exists x\; y\,R\,x\} \end{aligned}$$

Ahora resulta que la definición (12), que corresponde a la intuición de las funciones como proyecciones, es compatible con (8), (9) y (14), con lo que se salva el uso matemático.

En resumen, el uso matemático actual requiere la validez de (6) y (12). Para obtenerla, se aceptan normalmente las convenciones (1), (2) y (5). Pero estas convenciones, junto con sus consecuencias (3) y (4), son incompatibles con el lenguaje ordinario. La sustitución de (1), (2), (5) y (13) por (8), (9), (7) y (14), respectivamente, permite mantener (6) y (12) —que es lo matemáticamente deseable— y, al mismo tiempo, es perfectamente concorde con el lenguaje ordinario.

La situación puede también describirse del siguiente modo. La identificación de las funciones con las relaciones unívocas ha introducido una gran clarificación de nuestras nociones matemáticas. Pero conviene no perder de vista que nuestra expresión "relación unívoca" no es unívoca, sino equívoca, pues puede expresar dos conceptos distintos: el de proyección y el de asignación.

Una proyección es una relación unívoca por la derecha, en el sentido de que el término derecho o segundo está siempre unívocamente determinado por el término izquierdo o primero de la relación. Sea R una relación.

(15) R es una proyección $\leftrightarrow \forall xy\ (xRy \,\&\, xRz \rightarrow y = z)$

(15′) R es una proyección $\leftrightarrow \forall xy\ (\langle y,x\rangle \in R\ \&\ \langle x,z\rangle \in R \rightarrow y = z)$

Si R es una proyección y xRw, decimos que R proyecta x sobre w. Como fácilmente se ve, las convenciones (1), (2) y (5) corresponden a la identificación de las funciones con las proyecciones.

Una asignación es una relación unívoca por la izquierda, en el sentido de que el término izquierdo o primero está siempre unívocamente determinado por el término derecho o segundo de la relación.

(16) R es una asignación $\leftrightarrow \forall xy\ (yRx\ \&\ zRx \rightarrow y = z)$
(16′) R es una asignación $\leftrightarrow \forall xy\ (\langle y,x\rangle \in R\ \&\ \langle z,x\rangle \in R \rightarrow y = z)$

Si R es una asignación y xRw, decimos que R asigna x a w. Precisamente las convenciones (8), (9) y (7) corresponden a la identificación de las funciones con las asignaciones.

En la matemática podemos interpretar las funciones como proyecciones (que es lo más frecuente en la actualidad) o como asignaciones (que es lo que hacían Gödel y Quine). Pero la moda de interpretarlas como proyecciones es tan fuerte que ni siquiera los matemáticos que encuentran la otra alternativa más satisfactoria se atreven a navegar contra corriente.[8] Esto es desafortunado porque, como ya vimos, el lenguaje natural sólo admite la interpretación de las funciones como asignaciones.

De todos modos la sangre no llega al río, pues si una determinada relación es una proyección, entonces su inversa es una asignación, y viceversa, como trivialmente se sigue de (15) y (16) y de la definición de inversa:

[8] Así, A. Oberschelp, después de reconocer que la concepción de las funciones como asignaciones es más ventajosa que su consideración como proyecciones, acaba adoptando esta última convención, "pues es la más frecuente y no hay ninguna esperanza de poder cambiarla". Véase A. Oberschelp: *Elementare Logik und Mengenlehre*, Vol. II, Mannheim, 1978, p. 65.

(17) $\forall xy\ (xRy \leftrightarrow yR^{-1}x)$
Por tanto,

(18) R es una proyección $\leftrightarrow R^{-1}$ es una asignación.

Pero, claro está, R no es lo mismo que R^{-1}, sino precisamente lo contrario. No es lo mismo ser padre que ser hijo, cubo que raíz cúbica, autor que obra. Y es que no es lo mismo una proyección que una asignación. Lo más conveniente sería identificar también en la matemática y en la lógica las funciones con las asignaciones. Pero quizá resulte ya imposible, dado que la moda opuesta es demasiado fuerte. Con el tiempo el lenguaje formal se solidifica y anquilosa, como el natural, y perpetúa rasgos que sólo dependen del uso y la tradición y no del diseño consciente y racional. Quizás tampoco importe gran cosa y podamos considerar que el lenguaje formal (como el natural, según Wittgenstein) ya está bien como está y que no vale la pena intentar cambiarlo. Pero entonces al menos hemos de ser conscientes de las trampas que nos tiende, para no caer en ellas (siguiendo aquí también el consejo wittgensteniano). Llamar la atención sobre una de esas trampas es todo lo que aquí hemos pretendido.

SUMMARY

The aim of this paper is to put foward a reminder, in a wittgensteinian way, about the pitfalls that we might fall into if, following the almost standard usage (Quine's is an exception) of certain notions by logicians and mathematician, within mathematics, we try to adhere to that same usage in ordinary language.

The notions I have in mind are those of *function* and *composition* (of functions). Now, the standard definitions are as follows:

(1) R is a function $\leftrightarrow \forall xyz\ (xRy\ \&\ xRy \rightarrow y = z)$

Since the second member of the pair is uniquely determined by the first (we must bear in mind that this is a mere convention which has no mathematical significance and so that it might be substituted by the opposite convention, as we shall see, in which the first member of the pair is the one which is uniquely determined by the second) this allows us to characterize the R of x as the unique y such that xRy, i.e.:

(2) $R\ (x) = \iota y\ (xRy)$

from which it follows that for any function R and argument x, x has R to $R\ (x)$:

(3) $x\,R\,R\ (x)$

Finally, from (1), (2) and (3), it follows that for any function R and argument x, x has R to an individual if that individual is precisely $R\ (x)$:

(4) $\forall y\ (xRy \leftrightarrow y = R\ (x))$

And now we turn to functional composition. The standard definition runs as follows, for R, S relations:

(5) $\forall xy\ (x\,R \circ S\,y \leftrightarrow \exists z\ (xSz\ \&\ zRy)$

from which mathematicians can obtain, when R, S are functions:

(6) $R \circ S\ (x) = R\ (S\ (x))$

Now let's see what happens if we take these definitions literally and apply them in our ordinary speech. Let F be the relation *father of*, and let Antonio (a) be the father of Carlitos (c), his only child. Then, we have that Antonio is Carlitos' father, i.e.:

$$a\,F\,c;$$

but now, according to (2), we have that

$$F(a) = \iota y\,(aFy);$$

since $\iota y\,(aFy) = c$, we therefore have that

$$F\,(a) = c$$

which says that Antonio's father *is* Carlitos, his only son! By accepting (2) this is an inescapable conclusion.

If we now take (3) into account and continue with our example, we have that

$$a\,F\,F\,(a)$$

i.e., that Antonio is the father of the father of Antonio, which means that Antonio is his own grandfather! Finally, let's see what other genetical surprises does (4) have in the offing. What we get from it, as applied to our example, is that

$$a\,F\,c \leftrightarrow c = F\,(a);$$

in plain words it says that Antonio is Carlitos' father if and only if Carlitos is Antonio's father; an interesting, although impossible, genetical loop!

These peculiar and grotesque results can be obtained not only from (1)-(4), as we have just seen, but from (5) and (6) as well. Let's consider our well know relation of being a paternal uncle of (U); this relation is the composition of two other relations: "... is a brother of ..." (B) and "... is the father of ..." (F). Then:

$$U = B \circ F.$$

Hence, to say that x is a (paternal) uncle of w amounts to saying that x is a brother of someone who is w's father. By applying (5), we get:

$$x\,U\,w \leftrightarrow \exists z\,(x\,F z\,\&\,z\,B\,w)$$

which is to say that x is an uncle of w if and only if x is the father of someone's brother, i.e. x is an uncle of w if and only if x is w's father.

If we want to obtain results which do not violate so catastrophically our ordinary usage, we would like to have a definition of composition like the following one:

$$(7)\quad x\,R \circ S\,y \leftrightarrow \exists z\,(x\,R\,z\,\&\,z\,S\,y).$$

But if we have (7) and (1) and (2), we would then obtain:

$$R \circ S\,(x) = S\,(R\,(x))$$

which would go against our intuitions. Instead we would like to obtain something more acceptable, like

$$R \circ S\,(x) = R\,(S\,(x))$$

i.e. our (6) above. But to attain this result, (1) and (2) have to be modified; hence, instead of (1) we might have (following Quine):

$$(8)\quad R \text{ is a function} \leftrightarrow \forall xyz\,(x\,R\,z\,\&\,y\,R\,z \rightarrow x = y)$$

where now the second element of the pair, instead of the first one as in (1), would uniquely determine the first, instead of the second. And so, (2) would become

$$(9)\quad R\,(x) = \iota y\,(y\,R\,x).$$

With these simple changes all our worries come to an end as the reader can easily check. But then, if this is so, why is the usage we have been here criticizing so widespread?

A possible answer is that this is so in a large measure owing to the great use which nowadays is made of functions as mappings from a set —that of the arguments— into another (or the same) set —that of the values of images. The fact that the domain of F (the set of arguments; $\mathbf{D}\,F$) be A and its range (the set of values; $\mathbf{R}\,F$) be included in B, i.e. that F is a mapping from A into B is expressed by

$$F : A \leftrightarrow B$$

and the usal definitions is:

(12) $F : A \rightarrow B \leftrightarrow F$ is a function & $\mathbf{D} F = A$ & $\mathbf{R} F \subset B$.

Now since this is a very widespread, firmly rooted and intuitive way of representing functions, it's no use going against it; but if we define, as is commonly done, the domain and range of F by means of

(13) $$\begin{aligned} \mathbf{D} F &= \{x : \exists y \; xRy\} \\ \mathbf{R} F &= \{y : \exists x \; xRy\} \end{aligned}$$

then (12) is an adequate definition *only if* we assume our counter-intuitive (1) and (2) above. So, to obtain again a more pleasing result, leaving (6) and (12) as they are —which are the intuitively good mathematical propositions we want to preserve—, a slight change in (13) will be in order and so we would have, instead of it,

(14) $$\begin{aligned} \mathbf{D} F &= \{y : \exists x \; xRy\} \\ \mathbf{R} F &= \{x : \exists y \; xRy\} \end{aligned}$$

Hence, if we do have propositions (8), (9), (7) and (14) instead of (1), (2), (5) and (13) respectively, we can avoid those undersirable results concerning ordinary language and still retain propositions (6) and (12) which are mathematically desirable.

But will this proposal be heeded? Maybe it's already too late to reverse the tide. With time, formal language gets hardened, as it so happens with natural language, and retains features which depend just on usage and tradition and not on conscious rational design. If this is so, the best we can do then is to be conscious of the traps hidden in formal languages so as not to be caught in them.

[J. A. ROBLES]