

## APROXIMACIONES ADMISIBLES DENTRO DE TEORÍAS EMPÍRICAS

IGNACIO JANÉ

Universidad Autónoma  
Metropolitana

C. ULISES MOULINES

Instituto de Investigaciones  
Filosóficas

0. Cada teoría empírica se aplica efectivamente a su dominio de aplicaciones propuestas sólo bajo el supuesto de admitir un cierto grado de inexactitud o aproximación en el manejo de la teoría y en la reconstrucción de los datos subsumibles bajo ella. *De facto* (y quizás también por principio) ninguna teoría empírica desarrollada funciona exactamente. El grado de inexactitud con que funciona una teoría puede expresarse numérica o cualitativamente, según el tipo de teoría y de aplicación. En teorías empíricas “matematizadas”, es decir, teorías que emplean conceptos métricos, se tenderá a expresar (*en parte*) el grado de inexactitud numéricamente, mientras que en teorías “cualitativas”, es decir, aquellas que sólo usan conceptos clasificatorios o comparativos, el grado de inexactitud asumido explícita o implícitamente vendrá dado por comparaciones no cuantitativas. Sólo en teorías cualitativas muy burdas se puede prescindir del uso (implícito o explícito) de aproximaciones, pero a expensas de producir aserciones triviales, escasas en contenido empírico y aplicabilidad tecnológica. En teorías cualitativas mínimamente elaboradas, al igual que en las teorías más plenamente matematizadas de la física, habrá un uso esencial (aunque frecuentemente implícito) de aproximaciones. Por ejemplo, cuando al aplicar un determinado *test* de aptitud intelectual asignamos a dos individuos distintos el mismo cociente intelectual y concluimos que ambos “tienen la misma inteligencia”, sabemos que, si el *test* es medianamente sensitivo, las respuestas proporcionadas por dichos individuos no serán, por lo general, exactamente iguales; ello no nos impide atribuir a ambos el mismo nivel intelectual, si considera-

mos que dichas diferencias están por debajo del umbral discriminador del *test*. Así, pues, en cualquier teoría de la personalidad que maneje conceptos (comparativos) como los de inteligencia, neuroticidad, introversión, etcétera, y que use un instrumental de detección (*tests*) medianamente refinado, la aplicación aproximativa de dichos conceptos será ineludible. Es obvio que estas consideraciones pueden generalizarse a cualquier teoría, “matematizada” o “cualitativa”, tanto de las ciencias naturales como de las sociales.

La importancia de la aproximación en las ciencias empíricas es obvia para los científicos experimentales y los tecnólogos, pero ha sido negligida por la mayoría de científicos teóricos y sólo muy recientemente ha atraído el interés de algunos filósofos. Siguiendo una línea que ya hemos presentado en trabajos publicados anteriormente (cf. Moulines [1976 a], [1976 b]; Jané [1980]; Moulines [1980]) en éste nos proponemos hacer una contribución más dentro de ese programa de investigación. Nuestro propósito es investigar la forma lógica y los requisitos generales de las aproximaciones admisibles dentro de una teoría empírica. Dicho en términos kantianos, se trata de indagar “las condiciones de posibilidad de toda aproximación admisible”.

La mayoría de los filósofos que se han ocupado de la aproximación dentro de las ciencias empíricas lo han hecho desde una perspectiva “enunciativista”, o sea, tomando enunciados empíricos (leyes o sus instanciaciones) como unidades básicas de análisis y considerando la aproximación como una relación entre dichos enunciados y “la verdad (= enunciados empíricos verdaderos, pero desconocidos). Así se introduce el concepto de verosimilitud o algo parecido, se le considera como una propiedad de los enunciados que aparecen en la ciencia real (y que serían, por tanto, estrictamente falsos, pero más o menos “verosímiles”) y se intenta medir ese concepto en base a su “distancia” respecto de la verdad desconocida. En Moulines [1976 a], p. 207, se ha señalado por qué este tipo de enfoque sobre el problema que nos ocupa no es ni

formalmente conveniente ni materialmente realista. Por el contrario, optamos por un enfoque estructural o modeloteórico, que nos parece más adecuado, y en el que la aproximación no es una relación entre enunciados, sino entre estructuras que representan modelos o partes de modelos de una teoría. La noción matemática básica para representar esta relación es la de uniformidad, y en los artículos mencionados hemos explicado cómo interviene en la reconstrucción formal de las relaciones aproximativas (véase, especialmente, Moulines [1976 a] y [1976 b]). Aquí no repetiremos los axiomas que determinan la noción de uniformidad; baste recordar que las uniformidades que nosotros usamos dentro del presente enfoque son uniformidades modeloteóricas: los elementos de cada uniformidad (los llamados “conjuntos borrosos”) son conjuntos de pares de modelos potenciales de una teoría dada; es decir, si  $M_p$  es el conjunto de modelos potenciales de una teoría (el “aparato conceptual” de la teoría previo a la postulación de leyes empíricas), entonces una uniformidad  $U$  será una entidad del siguiente estrato conjuntista:

$$U \subseteq \mathcal{P} (M_p \times M_p)$$

Cada “conjunto borroso” elemento de  $U$  representa un cierto grado de inexactitud con el que se comparan (se consideran equivalentes) dos modelos potenciales. Nuestra tesis general sobre la naturaleza de las teorías empíricas es que cada enunciado particular o general (ley) de una teoría llevará asociado, implícita o explícitamente, al menos un conjunto borroso perteneciente a la uniformidad asociada a la teoría; este conjunto borroso expresa el “margen de error” dentro del cual consideramos válido el enunciado en cuestión.

Ahora bien, como ya se explicó en Moulines [1976 a] y Moulines [1980], no todos los elementos de la uniformidad asociada a la teoría dada serán considerados *admisibles* a efectos de contrastación empírica de la teoría. Los conjuntos borrosos “razonables”, los que efectivamente se manejan den-

tro de una teoría dada, formarán un subconjunto propio (“pequeño”) de la uniformidad general. En este trabajo nos proponemos investigar con detalle las características que deberán revestir los conjuntos borrosos admisibles en cualquier teoría.

Previamente, sin embargo, deberemos hacer algunas observaciones sobre el concepto de teoría empírica que presupondremos como base para nuestras indagaciones.

De acuerdo con las ideas más recientes de la concepción estructural, identificamos cada teoría empírica con un árbol o red con primer elemento (véase Moulines [1979]). Cada uno de los “puntos” de la red representa un “elemento teórico”; los elementos teóricos inferiores son “especializaciones” de los superiores. El elemento teórico en la cúspide de la red se llama “elemento básico” y contiene la(s) ley(es) fundamental(es) de la teoría. (Para mayores detalles consúltese el artículo mencionado.)

Cada elemento teórico consta de un “núcleo”  $K$  (la parte “formal” o “teórica”) y un dominio de aplicaciones propuestas  $I$  (la parte “empírica”). Entre ambas ha de mediar un componente aproximativo que hace posible admitir que  $I$  se “subsume aproximadamente” bajo  $K$  o que  $K$  se “aplica aproximadamente” a  $I$ . Este componente aproximativo será una clase  $A$  de conjuntos borrosos admisibles dentro de una uniformidad  $U$  definida sobre  $K$ . Así, pues, cada elemento teórico  $T_i$  de la red tendrá la forma:

$$T_i = \langle K_i, A_i, I_i \rangle$$

Postulamos que, en toda red teórica adecuadamente construida, la uniformidad  $U$  en la que estarán incluidas las clases  $A_i$  será la misma para todos los elementos teóricos. Este postulado implica la homogeneidad conceptual de todas las estructuras aproximativas en la teoría y, por tanto, la posibilidad de compararlas entre sí. En este trabajo nos limitaremos a considerar un elemento teórico cualquier  $T_i$  de una red y los requisitos que el conjunto  $A_i$  dentro de él debe satisfacer.

Para simplificar la discusión, en lo que sigue consideraremos que el núcleo de cada elemento teórico consta sólo de dos componentes: el conjunto de modelos potenciales  $M_p$  (el “aparato conceptual”) y el conjunto de los modelos  $M$  (las leyes); es decir, ignoramos otros dos componentes que son esenciales para la concepción estructural: la distinción entre el nivel  $T$ -teórico y el  $T$ -no-teórico y las condiciones de ligadura. Sin embargo, esta negligencia no afecta lo esencial de las consideraciones que siguen. Las mismas podrían, sin duda, generalizarse al caso de que tuviéramos en cuenta la distinción de niveles y las condiciones de ligadura. En todo caso, en el presente contexto, un elemento teórico será de la forma:

$$T = \langle M_p, M, A, I \rangle$$

La determinación formal de  $I$  es la siguiente. Es conveniente considerar  $I$  no como una clase amorfa de aplicaciones individuales, sino como un *conjunto de clases* de aplicaciones homogéneas. Cada elemento de  $I$ , llamémosle  $J_i$ , representa un *tipo* de aplicaciones de la teoría. Por lo común, una teoría mínimamente desarrollada tendrá varios *tipos* de aplicaciones, es decir,  $I$  no será un conjunto unitario. Por ejemplo, en la mecánica de partículas newtoniana, tendremos un gran número de tipos de aplicaciones: planetas, cometas, proyectiles sobre la superficie terrestre, péndulos, cargas eléctricas, resortes, choques, etcétera. Cuando se discute si un determinado fenómeno pertenece o no al campo de aplicaciones de una teoría, no se suele considerar ese fenómeno como un hecho aislado, sino como una clase de fenómenos “empíricamente equivalentes”. Así, no se discute sólo si las mareas que se dan en las costas del Mar del Norte constituyen un caso subsumible bajo la mecánica newtoniana, sino si lo son todos los casos de marea en cualquier lugar de la superficie terrestre.

Dado que cada uno de los casos individuales está descrito en el aparato conceptual de la teoría (de lo contrario no podríamos ni siquiera plantear la cuestión), formalmente de-

beremos considerarlos modelos potenciales de la teoría, o sea, elementos de  $M_p$ . Y dado que  $I$  es un conjunto de clases de casos equivalentes, tendremos que  $I \subseteq \mathcal{P}(M_p)$ . La cuestión de relevancia empírica a averiguar es entonces, si también  $I \subseteq \mathcal{P}(M)$  o no. Si la respuesta es afirmativa, diremos que la teoría funciona bien; si es negativa, diremos que funciona mal o, por lo menos, no muy bien. Pero ya hemos insinuado que en la ciencia real nunca tendremos una respuesta exacta a esa pregunta; la relación entre  $I$  y  $\mathcal{P}(M)$  sólo podrá ser aproximativa según un grado de aproximación admisible en el mejor de los casos.

Es razonable suponer que las diversas clases de aplicaciones homogéneas que constituyen  $I$  son disjuntas entre sí. A primera vista, esto parece obviamente falso: un mismo objeto físico puede considerarse plausiblemente dentro de dos tipos distintos de aplicaciones, por lo que dos clases  $J_1, J_2$  de  $I$  podrían tener una intersección no vacía. Por ejemplo, podría argüirse: podemos tener el mismo objeto (un reloj de pared) dentro de la clase de los péndulos si lo usamos como reloj y dentro de la clase de los proyectiles si los arrojamos por la ventana. Pero en esto se olvida que, aunque intuitivamente se trata del mismo objeto, dentro de la teoría le corresponderán dos descripciones distintas (una como péndulo y otra como proyectil), o sea, dos modelos potenciales distintos; en definitiva, para la teoría se tratará de dos “objetos” distintos. Hasta donde alcanzamos a ver, esta consideración se puede generalizar a todos los casos de aparentes intersecciones comunes a clases distintas de aplicaciones. Por lo tanto, es plausible reconstruir  $I$  como una partición en clases de equivalencia de modelos potenciales.

1. En tratamientos más tradicionales de la aproximación en las teorías empíricas se expresan las relaciones aproximativas mediante los recursos de la “ $\epsilon$ -métrica”, es decir, se presupone la métrica estándar sobre los números reales y se establece la comparación solamente entre los valores que toma

cada función métrica dada. Cada  $\epsilon > 0$  expresa un cierto grado de aproximación para una función dada. Esto excluye la posibilidad de hacer una comparación aproximativa simultánea entre varios conceptos de una teoría. Esta forma de proceder concuerda con el espíritu general de lo que Stegmüller ha llamado el “análisis micrológico” en la filosofía de la ciencia, en el que las únicas relaciones que se consideran son de “término a término” o de “enunciado a enunciado”. Por otro lado, el uso exclusivo de la epsilónica para expresar relaciones aproximativas no permite por principio establecer comparaciones entre conceptos no métricos.

En cambio, nuestro uso de uniformidades para expresar la aproximación empírica supera esas dos graves desventajas del análisis micrológico. El uso de uniformidades incluye, naturalmente, como caso especial las aproximaciones expresadas al estilo de la epsilónica; en una palabra, es más general. Las uniformidades permiten la consideración aproximativa de modelos globalmente considerados, es decir, tomando varias funciones métricas a la vez, y también permiten dar un sentido preciso a la aproximación de términos “cualitativos” — la aproximación no métrica.

Para ver esto más claramente, consideremos un ejemplo. Supongamos que nos interesa establecer comparaciones aproximativas entre cinemáticas, es decir, entre configuraciones de trayectorias posibles de partículas en el espacio (órbitas de planetas, por ejemplo). Independientemente de cuáles sean las leyes que vayamos a aplicar (las de Kepler, las de Newton, las relativistas, etc.), cada cinemática será desde nuestro punto de vista un modelo potencial de cierta teoría. Para fijar ideas, consideraremos que cada cinemática (cada trayectoria) vendrá determinada por un conjunto de partículas  $P$  (uno o varios planetas, por ejemplo), la fijación de una “posición inicial”  $s(p)$  para cada  $p$  de  $P$  y las velocidades angulares respectivas para cada  $p$ ,  $\omega(p)$ . (Para simplificar la discusión, vamos a prescindir de la mención explícita del tiempo y a considerar que la velocidad angular es uniforme para

cada  $p$  de  $P$ .) Entonces, cada cinemática considerada será de la forma

$$a = \langle P, s, \omega \rangle$$

donde  $P$  es un conjunto no-vacío de objetos, y  $s$  y  $\omega$  son funciones de  $P$  sobre los reales. Si  $P$  es, por ejemplo, el conjunto formado por el Sol, los planetas y los satélites,  $a$  será una descripción cinemática (idealizada) del sistema solar. Pero en vez de ese conjunto total podríamos tomar cualquier subconjunto del mismo o hasta un solo planeta. O también, para un mismo conjunto  $P$ , podríamos considerar distintas posiciones iniciales y velocidades de los planetas. Cada una de estas descripciones cinemáticas posibles es un modelo potencial de una teoría planetaria.

¿Qué tipo de comparaciones aproximativas pueden plantearse para estos modelos? Está claro que algunas descripciones cinemáticas de “la misma” configuración de planetas, aunque estrictamente distintas, se considerarán muy próximas entre sí — equivalentes a efectos de la aplicación de la teoría que estemos manejando; otras, en cambio, se considerarán demasiado divergentes para ser aceptables. Por ejemplo, si dos astrónomos en observatorios distintos fijan la posición inicial de un mismo planeta en el mismo instante y constatamos que entre ambos valores hay una diferencia de unas pocas décimas de segundo de arco, probablemente consideraremos ésa una diferencia irrelevante para efectos teóricos (al menos dentro de cierta teoría) y diremos que hay una “buena aproximación” entre ambas descripciones. Explicaremos la divergencia por factores no teóricamente relevantes, como pequeñas diferencias en la calibración de los micrómetros respectivos, en los tiempos de reacción de cada uno de los astrónomos, etcétera. En cambio, si la divergencia fuera de varios minutos de arco, diríamos que alguna de las dos descripciones, o ambas, es inaceptable, o bien que algo anda mal en la teoría. Lo mismo se aplicaría a dos determinaciones distintas de la velocidad angular.

Asimismo, podemos establecer comparaciones aproximativas de carácter no-métrico sobre el conjunto  $P$ . En primer lugar, éstas pueden referirse al número de elementos de  $P$  considerados. Por ejemplo, dentro de cierta teoría planetaria es probable que dos descripciones cinemáticas del sistema planetario que coincidan en todo excepto en que una de ellas ignora uno de los satélites menores de Saturno que, en cambio, la otra incluye, se considerarán como muy aproximadas y equivalentes para muchos efectos. En cambio, en ninguna teoría planetaria se considerará que una descripción del sistema planetario en que falte Júpiter es una buena aproximación de otra en la que se incluya este planeta. Nótese que, en este tipo de consideraciones aproximativas sobre el conjunto que constituye el dominio de cada modelo (un conjunto de partículas en el presente caso), juegan un papel tanto las diferencias entre el número de elementos considerados como las debidas a la importancia teórica asignada a algunos de estos elementos en particular. (Quitar, o no, del sistema solar cierto número de satélites menores o de asteroides puede carecer relativamente de importancia para calcular las órbitas de los demás cuerpos del sistema; pero quitar o no a Júpiter es absolutamente decisivo.) Estas comparaciones aproximativas sobre el número y la importancia de los elementos de  $P$  son “cualitativas” en el sentido de que no son expresables en términos “epsilónticos”, mediante la métrica estándar sobre los reales.

Otro tipo de consideraciones aproximativas cualitativas son las que se refieren a la descripción de la naturaleza misma de cada uno de los elementos de  $P$ . Por ejemplo, para una determinada teoría planetaria (en una determinada fase histórica de la mecánica celeste, pongamos por caso) pudo considerarse que una descripción de los planetas en que éstos aparecieran como esferas era una buena aproximación de una descripción en que aparecieran como elipsoides de escasa excentricidad (“un poco chatos”). Pero en otra teoría (en una fase histórica posterior) ya no se consideraría así; en todo caso, se

tomaría como buena aproximación sólo la relación entre un elipsoide y un geoide (= elipsoide "arrugado" por montañas y valles). Tampoco ésta es una diferencia que normalmente se intente expresar en términos "epsilónticos".

En la comparación aproximativa global entre dos cinemáticas planetarias intervendrán, pues, varios componentes simultáneamente: las diferencias métricas entre las posiciones iniciales respectivas y entre las velocidades angulares respectivas, entre el número de elementos considerados en cada caso y su importancia relativa, entre las descripciones de la forma de cada elemento, y quizás algunos factores más.

Sistematicemos estas diferencias aproximativas de la siguiente manera. Para expresar la diferencia entre posiciones y velocidades utilizaremos, como es usual, números reales positivos  $\epsilon$ ,  $\delta$ , respectivamente. Fijando ciertas cotas superiores  $\epsilon_0$ ,  $\delta_0$ , diremos que hay una aproximación admisible entre las posiciones de cada partícula en dos modelos distintos si el valor absoluto de la diferencia de posiciones es menor que  $\epsilon_0$ ; análogamente para las velocidades respecto a  $\delta_0$ .

Además, diremos que el conjunto  $P$  de un modelo potencial  $a$  es una buena aproximación del conjunto  $P'$  de otro modelo potencial  $a'$  si ambos están relacionados por una relación de semejanza fuerte, que simbolizaremos por  $\sim$  y que admitimos que es reflexiva y simétrica. La relación  $\sim$  es una primitiva en la presente reconstrucción. Sin embargo, podemos tratar de acotarla al máximo, especificando algunas condiciones semiformales que deberá satisfacer en cualquier caso. Para formularlas, es conveniente introducir cierta terminología especial.

*Objeto importante:* Sea  $P$  el conjunto básico del modelo  $a$ . Diremos que un objeto  $p \in P$  es importante para la teoría en cuestión si, bajo el supuesto de que se cumpliera que  $a$  está en el dominio de aplicaciones  $I$ , el modelo potencial  $a^*$  constituido igual que  $a$  con la salvedad de que  $P^* = P - \{p\}$  necesariamente cumpliría que  $a^*$  no está en  $I$ . (Nótese que para formular este requisito hacemos uso

de un condicional subjuntivo, por lo que la posibilidad de formalizar esta condición completamente depende de la aceptación de una lógica de condicionales subjuntivos apropiada.)

*Descripciones muy parecidas de objetos:* Esta es una condición que inevitablemente se expresará de manera informal, al menos en el presente contexto. Sólo precisaremos lo siguiente. Suponemos que la comunidad científica que maneja la teoría en cuestión dispone de criterios intersubjetivos para decidir si dos descripciones hechas en el lenguaje usado por esa comunidad son muy parecidas entre sí o no.

*Cuasi-biyección:* Sean  $P$  y  $P'$  dos conjuntos básicos de dos modelos potenciales y sea  $R \subseteq P \times P'$ . Diremos que  $R$  es una cuasi-biyección entre  $P$  y  $P'$  si y sólo si: Existen  $Q_P \subseteq P$  y  $Q_{P'} \subseteq P'$  tales que

- a)  $//Q_P// \gg //P - Q_P//;$ <sup>1</sup>
- b)  $//Q_{P'}// \gg //P' - Q_{P'}//;$
- c)  $R: Q_P \dashrightarrow Q_{P'}$  y  $R$  es biyectiva.

Ahora podemos dar condiciones *necesarias* para que  $\sim$  sea una relación de “semejanza fuerte”.

$P \sim P'$  sólo si:

- 1)  $\sim$  es una cuasi-biyección entre  $P$  y  $P'$  (relativa a ciertos subconjuntos respectivos  $Q_P$  y  $Q_{P'}$ ).
- 2)  $P - Q_P$  y  $P' - Q_{P'}$  no contienen ningún objeto importante.
- 3) La descripción de cada elemento de  $Q_P$  es muy parecida a la descripción de su  $\sim$  —correspondiente en  $Q_{P'}$ .

<sup>1</sup>  $//...//$  indica la cardinalidad de un conjunto. “ $\gg$ ” se lee “es mucho mayor”. Este último término es de uso frecuente en los textos científicos, aunque obviamente impreciso. El problema de su precisión conceptual cae fuera del presente contexto.

Estas son condiciones bastante fuertes de semejanza entre dos conjuntos empíricos, por lo que alguien podría sentirse inclinado a considerarlas en conjunto como suficientes para la noción de semejanza. Sin embargo, aquí queremos dejar abierta esta cuestión.

Dado cierto  $p \in Q_P$ , a la imagen de  $p$  en  $Q_{P'}$  por  $\sim$  la designaremos por  $\tilde{p}$  y, recíprocamente, dado un  $p' \in Q_{P'}$ ;  $\tilde{p}'$  será su imagen en  $Q_P$ .

Ahora podemos definir la aproximación “global” *admisibile* entre dos cinemáticas. Dadas cierta relación de semejanza  $\sim$ , y cotas  $\epsilon_0, \delta_0$ , diremos que  $a = \langle P, s, \omega \rangle$  es una *aproximación admisible* de  $a' = \langle P', s', \omega' \rangle$  (y recíprocamente) si y sólo si:

$$P \sim P' \wedge \forall p \in Q_P (/s(p) - s'(\tilde{p}) / < \epsilon_0 \wedge / \omega(p) - \omega'(\tilde{p}') / < \delta_0).$$

Dadas las propiedades de  $\sim$  como biyección entre  $Q_P$  y  $Q_{P'}$ , de aquí se sigue que también

$$\forall p' \in Q_{P'} (/s'(p') - s(\tilde{p}') / < \epsilon_0 \wedge / \omega'(p') - \omega(\tilde{p}) / < \delta_0).$$

por lo cual la relación de aproximación admisible entre modelos es simétrica.

La uniformidad que necesitamos para expresar aproximaciones entre cinemáticas (“AC”) estará, pues, constituida por conjuntos borrosos cada uno de los cuales está determinado por una relación  $\sim$  y unos valores  $\epsilon$  y  $\delta$  específicos:

$$(AC) \ u_{\sim \epsilon \delta} = \{ \langle x, y \rangle / x, y \in M_p \wedge P_x \sim P_y \wedge \forall p \in Q_p (/s_x(p) - s_y(\tilde{p}) / < \epsilon \wedge / \omega_x(p) - \omega_y(\tilde{p}) / < \delta) \}.$$

Es fácil comprobar que el conjunto de tales  $u_{\sim \epsilon \delta}$  cumple las propiedades de una uniformidad. Un cierto grado de aproximación global entre dos cinemáticas se expresará ahora en un enunciado modeloteórico de la simple forma:

$$\langle a; b \rangle \epsilon u \sim \epsilon \delta$$

Es obvio que no todos los enunciados posibles de esta forma producidos por la uniformidad serán considerados como genuinas aproximaciones. Si se toman cotas  $\epsilon$  o  $\delta$  demasiado elevadas, ya no se considerará que las diferencias entre las posiciones o las velocidades son “negligibles”. También la relación  $\sim$  deberá representar una semejanza cualitativa suficientemente cercana. Naturalmente, estas consideraciones variarán según la teoría que tengamos en mente aplicar y la fase histórica de desarrollo teórico y experimental en que se encuentre dicha teoría. También variarán según el tipo de aplicación que estemos considerando dentro de esa teoría. La aproximación admisible entre cinemáticas será naturalmente más estricta si se trata de planetas que si se trata de estrellas y menos que si se trata de satélites artificiales. Por todo ello resulta claro que no será posible dar con condiciones necesarias y suficientes que sean universalmente válidas para la admisibilidad de un conjunto borroso de una uniformidad dada. En otras palabras, la noción de “conjunto borroso *admisible*” (para abreviar: “admisible”) no es formalmente definible. Sin embargo, esto no significa que no se puedan hallar algunas condiciones necesarias generales, que provienen de nuestra intuición *a priori* acerca de lo que puede ser empíricamente admisible dentro de una uniformidad. Algunas de estas condiciones necesarias fueron formuladas ya en Moulines [1976a]. Aquí vamos a investigar esta cuestión con mayor detalle.

2. Las dos condiciones esenciales de admisibilidad que se habían postulado en Moulines [1976a] podrían denominarse la “condición de máximo” y la “condición de relevancia aplicada”. Intuitivamente, la primera significa que, por encima de cierto grado de inexactitud, la disparidad en la comparación aproximativa de dos modelos no se considerará tolerable; deberá haber pues una cota superior dentro de la porción efectivamente utilizable de la uniformidad. En aquel trabajo

también habíamos mencionado la posibilidad de postular un mínimo en el grado de aproximación, una cota inferior que no puede ser superada por muy exactos que queramos ser. Puede que el establecimiento de tal cota inferior fuera relevante para ciertas teorías especiales, como la mecánica cuántica, o la psicología de la percepción, o para elaborar una epistemología general que hiciera uso esencial de la idea de inexactitud. Sin embargo, hasta donde alcanzamos a ver, no hay razón para postular *a priori* y con carácter universal la existencia de tales mínimos aproximativos.

El segundo requisito mencionado, el de relevancia aplicada, significa que sólo tomaremos como admisibles aquellos conjuntos borrosos de la uniformidad que incluyan alguna aplicación propuesta de la teoría; dicho aún más intuitivamente, aquellos que tengan “algo que ver” con el dominio de aplicaciones propuestas. Una formulación de esta condición más elegante que la ofrecida en Moulines [1976a] es la siguiente. Si  $I$  es el dominio de aplicaciones de un elemento teórico dado, el conjunto  $A$  de admisibles correspondientes deberá cumplir:

$$A \subseteq \mathcal{P}(M_p \times I) \cup (I \times M_p)$$

(Recuérdese que  $A \subseteq U \subseteq P(M_p \times M_p)$ )

Para una formulación adecuada del primer requisito mencionado, el de máximo, debemos investigar la cuestión más detenidamente. En primer lugar, más que de “máximo” propiamente dicho, en la mayoría de los casos reales de aproximación se tratará de “supremo”. Por ejemplo, en la comparación de cinemáticas antes discutidas, normalmente se escribirá

$$/s_a(p) - s_b(\tilde{p}) / < \epsilon_0$$

y no

$$/s_a(p) - s_b(\tilde{p}) / \leq \epsilon_0$$

En lo sucesivo, pues, hablaremos de supremos, y diremos que cualquier conjunto borroso “menor” (o sea, más estricto) que un supremo será admisible para formular enunciados empíricos de la teoría.

Definimos el conjunto de estos supremos simplemente así:

$$\text{Sup}(A) = \{u/ u \in U \wedge \forall u' \in U (u \subset u' \rightarrow u' \notin A) \wedge \\ \wedge \forall u'' \in U (u'' \subset u \rightarrow u'' \in A)\}.$$

La cuestión básica que ahora queremos plantearnos es la de si podemos decir algo a la vez universal y formalizable sobre la estructura de esos supremos. Por ejemplo, si  $\text{Sup}(A)$  es el conjunto de los supremos admisibles para un elemento teórico dado, una pregunta con sentido es: ¿cuántos elementos tiene  $\text{Sup}(A)$ ? Una primera respuesta simple sería: uno solo. Se afirmaría entonces que, dado cierto dominio de aplicaciones  $I$  que queremos subsumir bajo cierto núcleo  $K$ , habrá un máximo grado de inexactitud tolerable para hacerlo; un grado que será común a todas las aplicaciones. Sin embargo, esta respuesta no es plausible en general. Dado que teorías mínimamente elaboradas tendrán aplicaciones no homogéneas, como ya hemos señalado, la inexactitud tolerable no será en general la misma para aplicaciones de diversos tipos. Ya hemos indicado que el máximo grado de inexactitud tolerable en la determinación de posiciones y velocidades no será el mismo a escala planetaria que a escala galáctica, por un lado, o que a escala de laboratorio, por otro. Habrá, pues, varios supremos distintos dentro de un  $A$  dado.

Ahora bien, tampoco parece que pueda haber *varios* supremos para una misma clase homogénea de aplicaciones. Parece justamente que un criterio esencial para la homogeneidad de dos aplicaciones es que, en ambas, las determinaciones de las funciones métricas u otros conceptos puedan hacerse con el mismo grado de aproximación. Esta es una cuestión delicada y no pretendemos dar una prueba definitiva de que esto haya de ser así; se trata sólo de argumentos de plausibilidad. Un

primer contraargumento a este criterio podría ser que, con el perfeccionamiento de los instrumentos de medida, cambiará el grado máximo de discrepancia admisible para una misma clase homogénea de aplicaciones. Esto parecería indicar que puede haber varios supremos para una misma clase homogénea de aplicaciones, que serán distintos según el grado de desarrollo tecnológico. Pero con esto se olvida que, con la evolución tecnológica en los instrumentos de medida, lo que cambia no es meramente el supremo, sino el conjunto mismo de admisibles  $A$  y normalmente también el dominio  $I$ ; en realidad, lo que tenemos aquí es el paso histórico de una red teórica a otra (aunque el núcleo  $K$  permanezca, probablemente, igual). El paso del uso de telescopios ópticos a los radiotelescopios dentro de la mecánica celeste significó un cambio importante en la red teórica de dicha teoría, con consecuencias no sólo para el conjunto  $A$ , sino también para el conjunto  $I$  (descubrimientos de nuevos tipos de astros) y, posiblemente, hasta para  $K$ . Estos cambios pueden ser debidos no sólo a variaciones en los instrumentos materiales utilizados, sino también en los instrumentos formales (“operaciones de papel y lápiz”) empleados para determinar los valores numéricos de las funciones. Es sabido que las grandes aportaciones puramente matemáticas de Laplace y Gauss a la teoría de errores y a procedimientos de resolución de ecuaciones diferenciales cambiaron la faz de la mecánica celeste a principios del siglo XIX. En todos estos casos es plausible admitir que ocurre el paso de una red teórica a la siguiente dentro de una misma evolución teórica. Ahora bien, nuestras consideraciones sobre los supremos se refieren a una misma red teórica (en un corte sincrónico de la evolución de la teoría). Por lo tanto, el perfeccionamiento instrumental no afecta la idea de que, en un corte sincrónico, cada clase homogénea de aplicaciones posee un solo supremo aproximativo.

Otra posible objeción a esta idea sería la siguiente. Para una misma clase homogénea de aplicaciones, y en un mismo corte sincrónico, pueden usarse instrumentos de precisión di-

versa para hacer las medidas. Cada una de estas clases de instrumentos tendría su propio supremo. Por ejemplo, podría argüirse: para medir las posiciones de los mismos objetos a escala de laboratorio a veces usaremos una vara de madera y otras una vara de acero, y es obvio que el supremo de admisibles será distinto en uno y otro caso. En este caso sería ciertamente absurdo suponer que la diferencia de supremos es debida a un cambio de fase en la evolución teórica, es decir, que tenemos aquí dos redes teóricas distintas. Simplemente es el caso que dentro de una misma red y para un mismo tipo de aplicaciones se usan dos tipos de instrumentos distintos, con diverso grado de aproximación. Ahora bien, esta situación no implica realmente que debamos fijar varios supremos distintos para un mismo tipo de aplicaciones dentro de una red. El supremo "auténtico" vendrá unívocamente determinado por el instrumento de medición más fino, "mejor", que tengamos en ese momento a nuestra disposición. Lo que ocurre es que podremos usar instrumentos peores siempre y cuando sepamos o supongamos que el grado de inexactitud en la medición que nos darán, *en ese caso particular*, no será superior al supremo del instrumento mejor. Si supiéramos que es superior, no lo usaríamos a efectos de comprobación empírica de *esa* teoría. (Quizá lo usaríamos por consideraciones de comodidad práctica o didáctica, cuando ya estamos seguros del buen funcionamiento de la teoría y de su aplicabilidad, pero este tipo de consideraciones son totalmente irrelevantes para nuestro estudio presente.)

Hay una última posible objeción a la tesis de la univocidad del supremo para clases homogéneas de aplicaciones, que es de carácter más profundo que las anteriores y cuya discusión nos permitirá aclarar un punto importante acerca de la estructura de nuestros conjuntos borrosos. La objeción consistiría en hacer notar que, dentro de una misma clase de aplicaciones, el supremo no es unívoco porque depende de los diversos individuos del dominio de aplicaciones. Para ilustrar esta objeción, consideremos nuevamente el ejemplo del

sistema planetario. Tanto si consideramos este sistema como una única gran aplicación, como si lo consideramos subdividido en varias aplicaciones (quizá una para cada planeta junto con sus satélites), no cabe duda de que, según nuestras intuiciones, este conjunto de aplicaciones constituye una clase homogénea. Ahora bien, se podría argüir: es obvio que en este caso el máximo grado de inexactitud admisible en la determinación de la posición, por ejemplo, variará según el planeta. Está claro que no hay la misma dificultad en determinar con precisión la posición de Marte que la de Plutón, aunque, desde un punto de vista teórico, diríamos que ambas aplicaciones son semejantes. En general, y en igualdad de circunstancias, a mayor distancia del observador, mayor será el grado de inexactitud admisible. Pero pueden intervenir también otros factores en esta variación: por ejemplo, el tamaño relativo de cada partícula o, sobre todo, el número de observaciones de que dispongamos en un momento dado para cada una de las partículas. Este número puede ser, en un mismo corte sincrónico, distinto según la partícula, ya sea por dificultades intrínsecas a su observación o por circunstancias aleatorias; y es sabido que, por el principio de los mínimos cuadrados, el máximo "error" admisible será un valor diferente en cada caso. La consideración de estos y otros factores parece llevar a la conclusión de que, en general, habrá supremos distintos, no sólo según el tipo de aplicación, sino también según cada argumento de la función considerada en una aplicación.

Esta constatación, considerada en sí misma, es correcta; mejor dicho, es correcta si tomamos como supremos los valores numéricos de funciones particulares; en una palabra, sería válida dentro de una concepción "micrológica" (enunciativa) de la aproximación. Pero la interpretación de esa constatación aparece distinta dentro de nuestro enfoque. Cada uno de nuestros conjuntos borrosos no viene determinado, como sabemos, por valores numéricos singulares, ni siquiera por funciones o conceptos singulares. Por el contrario, hemos visto que, en el ejemplo considerado, los conjuntos borrosos  $u_{\sim\epsilon\delta}$  ven-

drían en principio determinados por la comparación relativa a *tres* conceptos a la vez: un conjunto y dos funciones. En la versión simplificada de antes parecía que cada  $u_{\sim\epsilon\delta}$  vendría determinado por dos números reales fijos: uno,  $\epsilon$ , para la posición, y otro,  $\delta$ , para la velocidad angular. Para dar cuenta de la constatación anterior sobre el modo como cada partícula interviene de manera (posiblemente) distinta en el proceso de aproximación, lo único que hay que hacer es admitir que  $\epsilon$  y  $\delta$  no serán en realidad valores constantes, sino variables que dependen de cada partícula. Dicho de otro modo, habrá funciones, llamémoslas  $\eta$  y  $\theta$ , de  $P$  en  $\mathbb{R}$ , tales que, por ejemplo, el valor  $\epsilon$  que escojamos para comparar aproximativamente dos posiciones de la misma partícula  $p$  será  $\epsilon = \eta(p)$ . Es decir, dentro de un conjunto borroso determinado tendremos las aproximaciones:

$$\forall p (/s(p) - s'(\tilde{p})/ < \epsilon_p = \eta(p) \wedge / \omega(p) - \omega'(\tilde{p})/ < \delta_p = \theta(p)).$$

Esto *no* significa que *ese conjunto* borroso no esté unívocamente determinado. En vez de la determinación (AC) de antes, tendremos ahora

$$(AC^*) \ u_{\sim\epsilon\delta} = \{ \langle x, y \rangle / x, y \in M_p \wedge P_x \sim P_y \wedge \forall p \in P' (/s_x(p) - s_y(\tilde{p})/ < \eta(p) \wedge / \omega_x(p) - \omega_y(\tilde{p})/ < \theta(p)) \}.$$

En algunos casos simples  $\eta$  y  $\theta$  serán funciones constantes, pero en general no lo serán. La variabilidad de  $\eta$  y  $\theta$  no es sino un componente más, añadido a la consideración simultánea de  $P$ ,  $s$  y  $\omega$  a efectos de aproximación, que incluimos en la determinación de *cada* conjunto borroso. Y, finalmente, la inclusión de las funciones  $\eta$  y  $\theta$  no es ningún obstáculo para definir los conjuntos borrosos como elementos de una uniformidad, como se puede colegir fácilmente al tener en cuenta las propiedades de cualquier uniformidad “no-epsilónica”.

En este punto comprobamos una vez más las ventajas del enfoque estructural de la aproximación a través de uniformidades modelo-teóricas no-métricas.

De todos esos conjuntos borrosos para cierta clase homogénea de aplicaciones, es plausible entonces admitir que habrá uno, *y sólo uno*, que venga determinado por una relación de semejanza  $\sim$  con la máxima desemejanza tolerable y unas funciones  $\eta$  y  $\theta$  con la máxima dispersión media tolerable. *Este* será el supremo para esa clase de aplicaciones. Por lo dicho, este conjunto borroso estará unívocamente determinado, y con ello quedan eliminadas las objeciones anteriores. Las consideraciones que acabamos de hacer pueden generalizarse a cualquier teoría.

En principio, en cada teoría considerada podrán especificarse más detalles sobre la “estructura fina” de los supremos y de los conjuntos borrosos admisibles. Si conocemos, por ejemplo, el número exacto de partículas consideradas y admitimos que las funciones  $\eta$  y  $\theta$  son simples y fáciles de computar, el supremo será relativamente fácil de determinar. En el ejemplo anterior podríamos admitir, por razones de simplicidad, que siempre que comparamos dos posibles cinemáticas planetarias, tomamos  $P = P'$  y conocemos la cardinalidad de  $P: //P// = n$ ; si suponemos que  $\eta$  y  $\theta$  son funciones lineales monótonas crecientes respecto de una ordenación de los planetas previamente establecida (por ejemplo, según su distancia de la Tierra), entonces los admisibles  $u_i$  vendrán determinados cada uno por un vector de  $2n$  dimensiones del tipo

$$\overline{\epsilon\delta}^i = \langle \epsilon_1^i, \dots, \epsilon_n^i, \delta_1^i, \dots, \delta_n^i \rangle$$

(donde los subíndices se refieren a los planetas), y el supremo será

$$\overline{\epsilon\delta}_{\text{sup}}^i = \langle \text{sup } \epsilon_1^i, \dots, \text{sup } \epsilon_n^i, \text{sup } \delta_1^i, \dots, \text{sup } \delta_n^i \rangle .$$

Claro que este ejemplo es una simplificación de las situacio-

nes concretas que encontramos en la práctica. Sin embargo, por complicadas que sean las situaciones reales con que nos enfrentamos en la aproximación empírica, no hay razón, después de lo dicho, para dudar de que puedan ser tratadas formalmente como elementos de uniformidades en la forma expuesta hasta aquí.

La conclusión que se desprende de la discusión anterior es que cada clase homogénea de aplicaciones “lleva consigo” su propio supremo de admisibles unívocamente determinado, y que este supremo en principio se puede determinar teniendo en cuenta todos los componentes que intervienen en la aproximación. Así, pues, hay una función del dominio de aplicaciones sobre el conjunto de los supremos:

$$\alpha : I \longmapsto \text{Sup}(A) ,$$

que le asigna a cada clase homogénea de aplicaciones  $J_i \in I$  su supremo admisible correspondiente;  $\alpha(J_i) = u_{\text{sup}}^i$ . No podemos postular en general que esta función sea una biyección, puesto que, circunstancialmente, dos clases de aplicaciones distintas podrían coincidir en el supremo.

De cada elemento teórico  $\langle K_i, A_i, I_i \rangle$  de una teoría requeriremos pues que  $//\text{Sup}(A_i)// \leq //I_i//$ .

3. Resumamos los resultados obtenidos hasta aquí. Un elemento teórico (una “miniteoría”)  $T$  de una red teórica será siempre un tripla  $\langle K, A, I \rangle$  determinado de la siguiente manera:

- (1)  $K$  es un núcleo (en el sentido de este término propio de la concepción estructural).
- (2)  $I \subseteq P(M_p)$ .<sup>2</sup>
- (3) Siendo  $M_p$  el conjunto de modelos potenciales de  $K$ , existe una uniformidad  $U \subseteq P(M_p \times M_p)$  tal que

<sup>2</sup> Si consideráramos el conjunto de modelos parciales  $M_{pp}$  como distinto de  $M_p$  (distinción entre conceptos  $T$ -teóricos y  $T$ -no-teóricos), esta condición debería formularse así:  $I \subseteq P(M_{pp})$ .

- (a)  $A \subseteq U$ .
- (b)  $A \subseteq P ((M_p \times I) \cup (I \times M_p))$
- (c)  $\text{Sup}(A) \neq \emptyset$ .
- (d) Existe  $\alpha : I \dashrightarrow \text{Sup}(A)$ .

#### BIBLIOGRAFÍA

- Jané, I. [1980]: "Observaciones sobre el concepto de aproximación empírica." *Crítica*, Núm. 35.
- Moulines, C.U. [1976a]: "Approximate Application of Empirical Theories: A General Explication." *Erkenntnis*, Núm. 10/2.
- Moulines, C.U. [1976b]: "Un concepto estructural de aproximación empírica." *Crítica*, Núm. 24.
- Moulines, C.U. [1979]: "Theory-nets and the Evolution of Theories: The Example of Newtonian Mechanics". *Synthese*, Núm. 41/3.
- Moulines, C.U. [1980]: "Intertheoretic Approximation: The Kepler-Newton Case". *Synthese*, Núm. 45/3.

## SUMMARY

In some previous writings (listed in the bibliography) the authors have dealt with the concept of approximation in empirical science by using a formal approach that departs from the standard one: It does not consider the relation of approximation as a relation between statements, but as a relation between certain kinds of structures (potential models of a theory). Within this same approach, the question is raised now: Which approximations are (empirically) *admissible* and why? The authors try to give a general account of the conditions that make an approximation between models admissible. The discussion is illustrated by means of examples taken from planetary astronomy; for example, the question: When are we going to say that two descriptions of a planetary orbit approximate each other within an *admissible* degree of approximation? And what does this mean precisely?

In the first part of the article, it is shown that different aspects or factors must be taken account of when trying to give a complete answer to the preceding questions. Some of them are of a qualitative, some are of a quantitative kind, but all must be somehow “integrated” into a “global” approximative relationship. The explication of such factors can only partially be carried in formal terms. The main concepts that are involved in this explication are those of “(relative) importance” of different objects within the domain of the models; “very similar descriptions of objects”, and “quasi-bijective correspondence of models”. It is clear that the first two notions cannot be explicated in purely formal or quantitative terms. This does not mean that we cannot try to make them reasonably clear.

The second part of the article is devoted to the question of whether the notion of a maximum degree of admissible approximation makes sense and can be made precise. It is argued that each kind of application of a theory must have a supremum of admissible approximations and that this supremum is univoquely determined.

Finally, all the aspects considered in the discussion are summarized in a set of necessary conditions for approximation within an empirical theory.

[C. Ulises Moulines]