EN TORNO A UNA REVISIÓN DEL LOGICISMO

RICARDO J. GÓMEZ
Indiana University

En *Mathematical Knowledge,* Mark Steiner discute diversas escuelas de filosofía de la matemática; en sus dos primeros capítulos pretende criticar lo que entiende por una reconstrucción adecuada de ciertos aspectos epistémicos del logicismo, y mostrar las que supone son dificultades graves de la teoría de la matemática de W. Quine.

Es nuestro principal propósito someter a revisión los aspectos centrales de la crítica de Steiner al logicismo, en general, y a Quine, en particular.[1]

I

Creemos plausible afirmar, inicialmente, que Steiner no ha propuesto una caracterización adecuada de los aspectos epistémicos del logicismo. En verdad, Steiner (1) ha formulado equívocamente lo que, a su entender, es la pregunta epistemológica central acerca de la matemática, y (2) ha propuesto una reconstrucción parcial inadecuada de la propuesta epistemológica logicista; según la cual, el conocimiento matemático es reducible al conocimiento lógico.

(1) Steiner propone que la pregunta epistemológica central respecto del conocimiento matemático puede formularse como sigue: ¿Cómo llegamos a conocer? (*How do we come to*

[1] Véase, M. Steiner, *Mathematical Knowledge* (Ithaca: Cornell University Press, 1975). En trabajos posteriores, Steiner ha tratado de refinar su crítica a Quine, pero tal intento no invalida las críticas que efectuamos a lo que él afirma en su libro. Véase "Quine and Mathematical Reduction," en *Essays on the Philosophy of W. Quine*, ed. R. Shalan and Chris Swoyer (Normah: Univ. of Oklahoma Press, 1979), pp. 133-143.

know?). Esta formulación, sin ulterior aclaración, puede inducirnos a no comprender acabadamente el propósito principal de ciertas escuelas epistemológicas del siglo XX, y entre ellas, muy especialmente, al logicismo. Es bastamente conocido que una de las propuestas filosóficas más interesantes de este siglo, en el dominio de la teoría del conocimiento, ha consistido en el reemplazo de la pregunta genética por la pregunta fundacional; así, '¿cómo puede ser fundamentado nuestro conocimiento?' debe reemplazar a '¿cuáles son los orígenes o fuentes de nuestro conocimiento?' como pregunta primaria a contestar para elaborar una teoría del conocimiento. Pero, si no se aclara, y Steiner no lo hace, en qué sentido preciso ha de entenderse la pregunta '¿cómo llegamos a conocer?' Esta pregunta puede interpretarse como equisignificativa a (*i*) '¿cuáles son las fuentes de nuestro conocimiento, y qué procesos nos permiten alcanzar tal conocimiento?' o a (*ii*) '¿qué es necesario, de manera necesaria y suficiente conocer para que sea posible el conocimiento?' Obviamente, las respuestas a ambas preguntas pueden ser muy disímiles, en tanto dichas preguntas formulan problemas distintos.

El error mayor consistiría en acusar al logicismo de no haber contestado adecuadamente a (*i*). Sin embargo, éste es precisamente el error que comete Steiner, tal como se manifiesta en su intento de mostrar que el logicismo es una errónea filosofía de la matemática, porque genéticamente no es posible comenzar con el conocimiento lógico para explicar, desde él, cómo se origina el conocimiento matemático.[2] Esto vicia de raíz la crítica de Steiner, porque lo muestra apuntando sus baterías a un supuesto blanco (la cuestión genética del conocimiento matemático) que para el logicismo no era tal.

Al respecto, Russell ya tenía claro que (*a*) ambas cuestiones (genética y fundacional) no definen el mismo problema porque "el orden del conocimiento . . . no es el mismo que el orden de la deducción lógica",[3] y (*b*) a pesar de ser válido

[2] Véase *Mathematical Knowledge*, ed. cit., cap. I.

[3] B. Russell, "The Philosophical Implications of Mathematics", en *Essays in Analysis*, ed. D. Lackey (N. York: G. Braziller, 1973), pp. 284-294; pp. 293.

plantear la pregunta genética, ésta es irrelevante para fundamentar la particular certeza del conocimiento matemático, porque esto último no se logra a través de sus fuentes u orígenes. Es más, Russell también había afirmado que a una verdad matemática se arriba (genéticamente) por abstracción e inducción a partir de observaciones empíricas; sin embargo, el problema que interesa no es el de cómo llegamos a creer, a partir de proposiciones empíricas, una proposición matemática (ésta es una cuestión psicológica), sino el de desde dónde y cómo llegamos a deducir válidamente las proposiciones matemáticas.[4] El logicismo, precisamente, ha de intentar mostrar que todas las proposiciones matemáticas verdaderas son deducibles válidamente desde verdades lógicas, dejando de lado, *ex profeso,* los problemas relativos a cómo llegamos a creer en tales proposiciones lógicas.

En consecuencia, el logicismo se caracteriza por reubicar y reformular la pregunta epistemológica básica acerca del conocimiento matemático, distinguiéndola y desligándola totalmente de la pregunta genética. Steiner parece haber olvidado esto, en tanto formula reiteradamente críticas al logicismo que son infundadas, ya que presuponen que el logicismo ha dado una respuesta incorrecta a la pregunta genética cuando, en verdad, la ha aislado y dejado de lado por creerla irrelevante.[5]

[4] "La proposición '2 ovejas + 2 ovejas = 4 ovejas' era probablemente conocida por pastores miles de años antes que fuese descubierta la proposición '2 + 2 = 4', y, cuando '2 + 2 = 4' fue descubierta por primera vez, lo fue infiriéndola probablemente a partir del caso de las ovejas y otros casos concretos. Vemos así, que la palabra 'premisa' tiene dos sentidos completamente diferentes: por una parte, hay lo que podemos llamar 'premisa empírica' que es la proposición o proposiciones desde las cuales somos conducidos a creer en la proposición en cuestión; por otra parte, hay lo que podemos llamar 'premisa lógica' que es alguna(s) proposición (o proposiciones) más simple(s) desde la(s) cual(es) puede ser obtenida, mediante una deducción válida, la proposición en cuestión." B. Russell, "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics", en *Essays in Analysis*, op. cit., pp. 272-283; p. 272.

[5] Así, por ejemplo, Steiner asume, aunque con reservas, ciertas críticas de Wittgenstein al logicismo, entre las cuales se afirma que, en tanto no podemos recorrer intuitivamente todas las pruebas en lógica, entonces, no podemos explicar el surgimiento del conocimiento matemático (véase Steiner, *op. cit.*, pp. 41-53). Pero no es tal surgimiento lo que el logicismo considera relevante explicar.

(2) Steiner considera que las proposiciones siguientes proporcionan una reconstrucción parcial de la tesis epistemológica que afirma que el conocimiento matemático es reducible al conocimiento lógico:

(*i*) Hay algún sistema formal de lógica tal que la matemática puede ser generada efectivamente a partir de él.

(*ii*) Es suficiente entender las pruebas desarrolladas en tal sistema para conocer todas las verdaderas de las matemáticas que podemos conocer.

(*iiia*) Es posible para nosotros, con nuestra limitada capacidad, llegar a conocer realmente verdades matemáticas del modo sugerido en (*ii*).

(*iiib*) No se tiene verdadero conocimiento matemático de aquello para lo cual se carece de la habilidad, al menos latente, de producir una prueba en lógica.

Tal como Steiner mismo lo reconoce, (*i*) expresa la propuesta logicista que los teoremas de la matemática se pueden derivar desde axiomas lógicos a través de recursos exclusivamente lógicos; (*ii*) enfatiza cuál es la condición suficiente de comprensión de verdades matemáticas, y (*iii*) apunta a señalar que, en la práctica, y no sólo en principio, llegamos a conocer verdades matemáticas derivándolas de axiomas lógicos.

Sin embargo, (*iiib*) es muy fuerte y no está claramente formulada. En verdad, no encontramos texto alguno en la tradición logicista que muestre que alguien perteneciente a ella, haya propuesto alguna vez una versión similar a (*iiib*).

(*iiib*) nos retrotrae otra vez a la cuestión genética; ningún logicista ha negado que podemos llegar a saber verdades matemáticas independientemente de nuestra habilidad para deducirlas de verdades lógicas; en tal sentido (*iiib*) es muy fuerte. Por otra parte, no es claro en qué sentido debe entenderse la expresión 'verdadero' en (*iiib*); si se la entiende en sentido lato, (*iiib*) es falsa (incluso para el más recalcitrante logicista) por lo anteriormente señalado. Si se la entiende como significando 'justificado desde el punto de vista logicista', entonces (*iiib*) está formulada con peligrosa equivocidad porque no es claro a quién está relativizada la producción de la prueba en lógica (a una persona en particular, a la comunidad humana, a un cerebro electrónico o a una inteligencia superior). Tal equivocidad es aumentada por el no muy feliz empleo de la expresión 'al menos latente', cuyo alcance es arduo descifrar.[6]

No nos cabe duda que Steiner reconstruyó al logicismo fuertemente influenciado por la versión wittgensteniana de éste y, además, todos sabemos que Wittgenstein no fue fiel al logicismo (al intentar reconstruirlo para criticarlo) tal como éste se presenta en, por ejemplo, Russell y Quine. Wittgenstein proyectó sobre el logicismo exigencias que no eran más que sus propias tesis acerca de la matemática. Según Wittgenstein, la matemática es como un juego: sus reglas operan como lo hacen las reglas en un juego; en éste debemos ser capaces de reconocer y recorrer (*survey*), más o menos fácilmente, todos los pasos a efectuar según las reglas, para poder efectivamente participar del juego. Por ello, y como, además, (*a*) la forma de una oración y, por ende, de toda prueba no puede ser expresada en otro lenguaje, sino que sólo puede ser "mostrada", y (*b*) las formas de tales pruebas deben ser inspeccionables (*surveyable*) y convincentes, Wittgenstein acusa al logicismo de no cumplir con tales requisitos.

Sin embargo, los filósofos logicistas han desarrollado una concepción de la matemática en la que, *ex profeso*, tanto (*a*) como (*b*) son falsas. Así, desde Russell a Quine, es siempre posible construir lenguajes que expresen la estructura de las proposiciones y de las pruebas (en oposición a (*a*)); tales pruebas tienen que satisfacer solamente las reglas formales propuestas, y los principios lógicos deben ser tales que hagan posible la derivación, desde ellos, y de acuerdo a las reglas,

[6] Steiner hace hincapié en esta dificultad de su reconstrucción, pero la considera una dificultad propia del logicismo; sin embargo, esto no es así, porque, como ya señalamos (*iiib*), no es fiel a texto logicista alguno. (Véase Steiner, *op. cit.*, pp. 27-8.)

de las verdades matemáticas. No se exigen, en oposición a (*b*), requisitos adicionales tales como el de que las pruebas sean convincentes o evidentes; ni los principios lógicos tienen que serlo. Así, Russell ya reconocía esto desde la época en que colaboró en la redacción de *Principia Mathematica*;[7] ningún logicista negaría que las verdades lógicas son más arduas de aprehender que las verdades matemáticas mismas.

Una importante pregunta surge de todo lo anterior: ¿Cómo fundar la credibilidad en las verdades lógicas? Russell respondió tempranamente a ella: "(En el caso de los principios matemáticos) nosotros tendemos a creer en las premisas porque podemos ver que sus consecuencias son verdaderas."[8] Como consecuencia, los principios no son últimos e infalibles, sino el conjunto irreducible (en un determinado momento) de supuestos mínimos desde los cuales puede deducirse la matemática.

Todo ello no fue tomado en cuenta ni por Wittgenstein ni, consecuentemente, por Steiner, en sus críticas al logicismo. Ellos han creado un filósofo pseudo-logicista de la matemática, al cual conciben defendiendo tesis que ningún filósofo logicista ha sustentado jamás.

A pesar de todo lo afirmado, las propuestas de Steiner acerca del logicismo proveen un interesante punto de partida para discutir ciertos aspectos del logicismo. Así, por ejemplo, cabría preguntarse si no es posible pensar que todo nuestro conocimiento matemático emerge genéticamente de estructuras lógicas. Por supuesto, ésta es una pregunta que no se plantearon ni Rusell, ni Carnap, ni Quine (por no estar dentro de sus intereses filosóficos), pero ello no le resta validez. Sin embargo, para responderla, habría que hacerlo desde una perspectiva distinta a la de Steiner. Éste, al entremezclar los

[7] "Hay un aparente absurdo al proceder como uno lo hace en la teoría lógica de la aritmética, partiendo de proposiciones diversas y recónditas de la lógica simbólica para probar truismos como '2+2=4', pues es obvio que la conclusión es más cierta que las premisas y que la supuesta prueba parece fútil." (B. Russell, "The Regressive Method of Discovering the Premises of Mathematics", *op. cit.*, p. 272.)

[8] *Ibid.*, p. 273.

aspectos genéticos y fundacionales, no ha podido dar tampoco una respuesta clara a la pregunta que hemos planteado. Esto es lo que Nino Cochiarella ha captado sutilmente en su comentario crítico al libro de Steiner; Cochiarella, al deslindar claramente ambos aspectos, ha esbozado una respuesta positiva siguiendo los lineamientos generales de la epistemología de Piaget. No nos importa discutir el grado de plausibilidad de la respuesta de Cochiarella, sino enfatizar que una respuesta consistente a la pregunta genética requiere un claro tratamiento genetista sin peligrosas confusiones con cuestiones de tipo fundacional, tal como acaece en el caso de Steiner.

Cochiarella también ha puntualizado correctamente que Steiner tampoco separó claramente los problemas ontológico y epistemológico involucrados en la filosofía logicista. El tratamiento de tal aspecto crítico puede realizarse, más adecuadamente, analizando ciertas tesis centrales del logicismo de Quine, así como ciertas críticas que Steiner hizo al mismo.

II

Puntualizaremos a continuación aquellos rasgos de la filosofía de la matemática de Quine que es necesario aclarar para poder luego evaluar las críticas de Steiner a los mismos. Consideraremos al respecto, brevemente, los siguientes tópicos: (1) La concepción de Quine de la reducción de teorías. (2) La noción quineana de explicación. (3) El alcance real del intento de Quine de reducir la matemática a la teoría de conjuntos.

(1) Economía óntica, preservación de estructura y explicación conceptual, son los tres rasgos principales de toda reducción, *à la* Quine, de teorías.

Así, toda reducción involucra el reemplazo de elementos de una cierta teoría por elementos de otra teoría; esto no significa, por ejemplo, basar la estructura de la aritmética en la lógica (en el sentido russelliano), sino reemplazar nú-

[9] Véase, Nino Cochiarella, "Mathematical Knowledge", *Philosophia*, vol. 8, 2-3 (Nov. 1978), pp. 471-484.

meros por conjuntos. Por lo tanto, lo filosóficamente relevante es que tal reducción significa poder operar sin determinadas entidades; para lograr ello rigurosamente, es necesario efectuar un peculiar mapeo como resultado del cual las oraciones cerradas de una teoría son transformadas, *salva veritate*, en las oraciones cerradas de la otra teoría. Tal tarea requiere la especificación de una función 'f' (que Quine llama '*proxy-function*') que admita como argumentos todos los objetos en el universo de una de las teorías (T), y tome, como valores, objetos en el universo de la otra teoría (T'); así, a cada predicado n-ádico de T se asocia una oración abierta de T' con n variables libres, de modo tal que todo predicado sea satisfecho por un n-tuplo de argumentos de la función 'f', siempre y cuando la oración abierta de T' sea satisfecha por el correspondiente n-tuplo de valores.

Quine ha aplicado tal método a la reducción fregeana de los números a la teoría de conjuntos; de modo análogo, puede definirse explícitamente una función f(*proxy-function*) en las reducciones de Zermelo y de Von Neumann de la aritmética a la Teoría de Conjuntos y en las reducciones de la teoría de los números reales efectuadas por Dedekind. Todas estas reducciones deben satisfacer un requisito básico: la eliminación de las entidades básicas de la teoría a reducir (es decir, de la teoría cuyo universo es el dominio de la función 'f'). Por añadidura, la correspondencia definida por la función 'f' permite preservar la estructura de la teoría a reducir. Cuando se logra la reducción de una teoría T a una teoría T', puede proveerse una explicación de los conceptos de T en base a los conceptos de T'; la eliminación de los objetos del universo de T resulta la condición *sine qua non* para llevar a cabo tal explicación.

(2) Quine piensa que las expresiones oscuras de un lenguaje natural pueden ser clasificadas en dos categorías disjuntas: aquella constituída por las expresiones que requieren ser elucidadas y aquella formada por las expresiones que deben ser evitadas. 'Número' es una expresión oscura (contra la

poco plausible opinión de Steiner y fiel a toda la tradición histórica que desde Platón a Russell intentó aclarar tal concepto). Las expresiones lingüísticas merecedoras de elucidación son aquéllas que, a pesar de ser oscuras, aparecen en contextos tales que, considerados como totalidades, parecen ser claros y precisos; justamente 'número' es una expresión de tal tipo. Por todo ello, 'número' requiere ser explicado.[10]

Toda explicación es eliminación; el principal propósito de toda eliminación es encontrar otra expresión que preserve el uso de la original en todo contexto donde esta última es útil (obviamente, no tienen que eliminarse los contextos porque éstos son claros y precisos) pero que, a la vez, pueda ser usada en los otros contextos que resultan oscuros cuando la expresión original aparece en ellos.[11]

Por lo tanto, a través de la explicación de una expresión, no se intenta explicar su significado o lo que la comunidad tiene en mente cuando la utiliza; lo que realmente se procura es determinar las funciones particulares de la expresión poco clara que merecen tenerse en cuenta, y proponer un sustituto claro que cumpla tales funciones.

Una consecuencia filosófica de tal punto de vista acerca de la explicación es que, a través de la eliminación de expresiones problemáticas, puede mostrarse el carácter meramente verbal de los problemas generados por tales expresiones; así, problemas supuestamente profundos se revelan como cuestiones verbales fácilmente resolubles.

10 Nos parece que Steiner no ha tenido en cuenta esta sutil diferencia quineana entre claridad de expresiones en un contexto y claridad de expresiones aisladas. Así, Steiner enfatiza continuamente que la aritmética es suficientemente clara y acusa a Quine de no percatarse de ello. Sin embargo, Quine no niega la claridad de las locuciones aritméticas; lo que ha enfatizado, en cambio, es la oscuridad del concepto (aislado) de número; por otra parte, Steiner no ha propuesto ningún argumento mostrando que el concepto (aislado) de número no requiere ser explicado.

11 Debe recordarse, sin embargo, que Quine mismo ha señalado que no toda eliminación es explicación. Para serlo, debe lograrse un cierto "paralelismo de función entre la vieja y problemática forma de expresión y alguna nueva forma de expresión. En este caso, nos sentimos dispuestos a concebir a la última como un *explicans* de la vieja." Véase W. Quine, *Word and Object* (Cambridge, Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology, 1960), p. 261.

Veamos ahora cómo Quine ha concebido la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos y los alcances de la explicación correspondiente de los números naturales en términos de conjuntos.

(3) Frege había ya dado una respuesta peculiar a la pregunta "¿Qué es un número?" Él identificó cada número natural '*n*' con una cierta clase de clases, de modo tal que '*n*' se define como la clase de todas las clases de *n* miembros. Según Quine, lo que hizo Frege, fue mostrar cómo la tarea efectuada por los números puede ser realizada por otros objetos; en verdad, Quine piensa —como más tarde Von Neuman y Zermelo— que lo que Frege hizo fue definir una progresión que podía ser considerada como perteneciendo al universo quineano de los valores de las variables de la teoría; cualquiera de tales progresiones podría funcionar como *explicans* de la progresión de los números naturales; más precisamente, toda serie infinita en la que cada uno de sus elementos tuviera sólo un número finito de elementos que le anteceden, podría cumplir tal función; en todos estos casos, los números naturales "no necesitan ser mantenidos en nuestro universo".[12] La conveniencia de tal reducción se pone de relieve en el hecho de que la aritmética deviene un subcapítulo de una teoría más amplia; la reducción permite alcanzar, pues, unidad y comprehensividad.

Por lo tanto, conviene enfatizar que: (*i*) hay muchas posibles explicaciones de los números naturales; todas ellas son mutuamente incompatibles pero correctas (por ejemplo, las reducciones de Frege, Zermelo, Von Neumann, Quine); (*ii*) cada una de ellas nos indica, en un sentido muy espe-

[12] *Ibid.*, p. 263. Quine llevó a cabo tal deducción de la aritmética desde la teoría de conjuntos de tres modos diversos (pero consistentes con la idea arriba señalada): *Mathematical Logic, New Foundations*, y *Set Theory and Its Logic*. En esta última versión, adopta las definiciones de Zermelo para cero y sucesor: $O =df \bigwedge$, y, $Sx =df \{x\}$. Su definición de número natural es una versión modificada de la definición de Frege, para evitar la utilización de clases infinitas; podemos expresarla brevemente como sigue: $N =df.\ \{x : \bigwedge \leq x\}$. A continuación, Quine demuestra los axiomas de Peano desde los axiomas de *Set Theory and Its Logic*. Como es sabido, tal reducción requiere una teoría de clases reales, *i.e.* clases como valores de las variables de cuantificación.

cial, cómo pueden ser concebidos los números naturales porque "los números son conocidos sólo a través de sus leyes, las leyes de la aritmética, de modo que cualesquiera objetos que obedezcan tales leyes, por ejemplo los conjuntos, son elegibles como explicaciones del número".[13] Por supuesto, no estamos diciendo en sentido absoluto qué son los números, sino cómo caracterizarlos en relación a una determinada teoría (*background theory*); esto es inevitable porque, de acuerdo a Quine, toda discusión acerca de la ontología de una teoría, puede solamente hacerse en otra teoría (funcionando como *background theory*). (*iii*) Tales reducciones no lo son de una teoría a otra con conceptos más claros o familiares; en tal sentido, hubiera sido deseable reducir la teoría de conjuntos a la aritmética; pero esto es imposible, y dejaría aún abierta la explicación del concepto de número. (*iv*) A través de la reducción conversa (de la aritmética a la teoría de conjuntos) se obtienen otras ventajas: economía óntica, unidad y capacidad comprehensiva.

Ahora creemos haber provisto los elementos teóricos para evaluar las críticas de Steiner a Quine.

III

Vamos a organizar nuestra respuesta a Steiner mediante la sistematización de sus observaciones críticas a Quine como sigue:

1. *Reduccionismo de la aritmética a la teoría de conjuntos*

Steiner afirma que tal reducción (*a*) no provee una prueba relativa de consistencia de la aritmética, porque la misma teoría de conjuntos tiene problemas de consistencia; (*b*) no agrega nuevas verdades aritméticas que no pudiesen ser obtenidas sin efectuar tal reducción; (*c*) genera nuevas preguntas, como "¿es 3 un elemento de 259?"

[13] W. Quine, "Ontological Relativity", en *Ontological Relativity and Other Essays*. Columbia. N. York: Columbia University Press, 1969, p. 44.

Las tres observaciones críticas equivocan el objetivo, pues surgen de malentender los principales propósitos del reduccionismo de Quine. Así, podemos responder a las mismas como sigue: (*a*) Toda reducción a una teoría más potente involucra mayores riesgos de devenir contradictoria; ello es obvio y Quine es consciente de ello. Sin embargo, la búsqueda de nuevas teorías fundacionales no involucra, para filósofos como Quine, la búsqueda de fundamentos más evidentes o más sólidos. No es una cuestión de seguridad: es una cuestión de mayor capacidad comprehensiva y mayor economía (y en este caso podría decirse que, por añadidura, la seguridad podría concebirse incrementada, en tanto hay menos entidades acerca de las cuales es posibles equivocarse).

(*b*) Una reducción no involucra necesariamente mayor cantidad de resultados fructíferos, sino mayor economía de medios para encontrar los resultados ya alcanzados. Sin embargo, también aumenta nuestro conocimiento, al menos por una parte, en tanto nos descubre nuevos principios matemáticos y, por otra parte, en tanto nos muestra que, desde tales principios, se puede deducir todo el cuerpo anterior de nuestro conocimiento. Por último, toda reducción nos permite reconocer nuevas conexiones entre la teoría reducida y el resto del edificio matemático, y, como sabemos, cuanto más amplias y más explícitas sean las interrelaciones en un sistema deductivo, mayor es el grado de sistematicidad de la ciencia misma.

(*c*) ¿Hay en verdad nuevas preguntas tales como "¿pertenece 3 a 259?" Rotundamente, no; tal pregunta no es más que una equívoca formulación en teoría de conjuntos de la pregunta "¿denota el símbolo '3' un número menor que 259?" Por supuesto, dentro del contexto de la teoría de conjuntos, pueden plantearse preguntas que antes no se formulaban, pero tales preguntas no surgen como resultados de la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos, sino porque la teoría de conjuntos abarca otros dominios matemáticos además del de los números.

2. *El carácter económico del reduccionismo de Quine*

Al respecto, Steiner critica a Quine afirmando que:

(*a*) Esta economía se logra pagando un precio demasiado alto: la situación de la teoría de conjuntos es peor que la de la aritmética porque el teorema de Gödel es aplicable también a la teoría de conjuntos y ésta tiene, además, problemas específicos que no aparecen en la aritmética. Sin embargo, Steiner mismo cita un párrafo de Quine en el que éste afirma que "una construcción de los conjuntos y de la teoría de conjuntos a partir de los números y de la aritmética sería mucho más deseable que su opuesta conocida".[14] Por lo tanto, Quine es consciente de la dificultad, pero opta por enfrentarla porque, en última instancia, él valora a la economía óntica, como criterio supremo, por encima de la claridad y evidencia, que parecen ser los criterios de preferencia según Steiner; como Quine no puede obtener la economía óntica reduciendo la teoría de conjuntos a la aritmética, opta por adoptar la reducción opuesta. Steiner, al exigir fundamentos más claros y seguros, se ve conminado a no aceptar tal reducción.

El carácter de mayor problematicidad de la teoría de conjuntos se debe a su mayor amplitud comprehensiva; ello sucede con toda teoría que es más potente que otras; lo que hay que evaluar es si tal aumento en el número de problemas no se ve compensado, con creces, por la mayor cantidad de verdades que permite abarcar; pero esto no es lo que Steiner hace.

Además, desde el surgimiento de las geometrías no-euclidianas, se ha hecho patente que nuevos e importantes resultados matemáticos son obtenibles abandonando principios supuestamente seguros y evidentes; sorprende, por ello, hacer —como Steiner— de la evidencia y de la credibilidad criterios para la aceptación de principios matemáticos.

(*b*) Steiner acusa a Quine de que su reduccionismo implica una errónea separación de cuestiones ontológicas y epistemo-

[14] *Ibid.*, p. 43.

lógicas. Pero esto no es así; Quine ha reconocido repetidamente que ambas están íntimamente conectadas, aunque ha sido claro en explicitar cuál es el tipo de cuestiones a caracterizar como ontológicas y cuál como epistemológicas. Además, en el caso de la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos es legítimo tener clara tal distinción, porque una reducción ontológica tiene otras ventajas más allá de las meramente epistemológicas; por ejemplo, permite obtener una teoría totalizadora más simple.

(*c*) Steiner parece suponer que la reducción *à la* Quine significa pretender prescindir de la aritmética. Para ilustrar su argumento, Steiner imagina el caso de dos computadoras IBM (como un análogo de la teoría de conjuntos) y CDC (como un análogo de la aritmética), tales que la primera pueda hacer el trabajo de la segunda, aunque esto, aclara Steiner, no supone que debamos abandonar la segunda (por razones de costo, posibilidades de rotura de la IBM, etc.). Como Steiner mismo reconoce, Quine no sostiene que ante la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos, aquélla deba ser abandonada. Un matemático nunca abandona la aritmética en sus actividades prácticas y Quine está lejos de sugerirlo; no es el caso, como Steiner supone, que toda vez que haya problemas con la IBM la CDC (análogo de la aritmética) puede usarse otra vez; en verdad la CDC (aritmética) nunca es operativamente abandonada. El error de Steiner es proponer un símil en términos operativos, cuando la reducción de la aritmética a la teoría de conjuntos no es visualizable de tal modo porque la misma no pretende obtener una mayor simplicidad operativa.[15]

3. *El problema de la consistencia*

Como Steiner señala, este problema no se plantea para la

[15] Steiner mismo cita párrafos de *Word and Object* (pp. 186-190), donde Quine anticipa una respuesta al símil de las dos máquinas en términos consistentes con la nuestra; sin embargo, el propósito central de tal cita está relacionado con cuestiones relativas al problema de la consistencia de la teoría de conjuntos que consideramos en '3'.

parte de la teoría de conjuntos que consiste en la interpretación conjuntística de los axiomas de Peano y todas sus consecuencias, utilizando las reglas de inferencia del sistema; obviamente, tal parte es tan consistente como lo es la aritmética de Peano. A pesar de ello, Steiner formula las siguientes preguntas: ¿Cómo sabemos de ello si no disponemos de conocimiento aritmético? Si éste no es el caso, ¿cómo podemos asegurar que la teoría de conjuntos es capaz de llevar a cabo la totalidad de la tarea de la aritmética? Aquí tenemos otro notable ejemplo de supuestos básicos erróneos subyacentes a la interpretación que Steiner hace del logicismo. Él asume que Quine piensa que existe una precedencia epistemológica de la teoría de conjuntos; pero no fue nunca la intención de Quine afirmar que tenemos un conocimiento independiente de la parte de la teoría de conjuntos que funciona como un modelo de la aritmética al interpretar los axiomas de Peano en términos conjuntísticos. Quine sabe que tenemos un conocimiento previo de la aritmética; lo que realmente importa es que, cuando disponemos de tal conocimiento, es válido afirmar su reducibilidad a una parte de la teoría de conjuntos; esto es todo lo que un logicista *à la* Quine exige. Además, la precedencia ontológica no necesariamente involucra precedencia epistemológica alguna, como Steiner parecería estar asumiendo. Ningún logicista ha exigido conocer primeramente la teoría de conjuntos para ser capaz, luego, de alcanzar conocimiento aritmético.

4. *La construcción finitista de Quine a la aritmética*

Steiner hace una crítica específica a uno de los aspectos relevantes de tal construcción: Para probar el principio de inducción, Quine utiliza la noción de intervalo $[O, x]$ como el conjunto I_x de números z menores o iguales que x; por ende, z pertenece a I_x si toda clase hereditaria retrospectiva (*backwards hereditary class*) que contiene a x, también contiene a z; esta definición es impredicable porque I_x misma es una clase hereditaria retrospectiva. Steiner cree que ello plantea un grave problema porque "para decidir si z pertenece a I_x debemos saber si z pertenece a I_x".[16] Sin embargo, no hay en ello problema alguno; nosotros podemos efectivamente decidir si z pertenece o no a I_x; esto no sólo muestra que Steiner cree descubrir, en ciertas ocasiones, problemas donde no los hay, sino también que la impredicadibilidad no es, de por sí, una propiedad perjudicial.

5. *Los axiomas de Peano como axiomas de clase*

Es posible concebir los axiomas de Peano, en términos conjuntísticos, como axiomas de clase; surgiría así una aritmética cuyo universo estaría constituido por ϕ, $\{\phi\}$, $\{\{\phi\}\}$,... Steiner ha señalado correctamente que Quine nunca tomó en consideración tal posibilidad; sin embargo, Steiner ha acotado que, aunque tal reducción haría muy felices a los filósofos, generaría, en cambio, algunos problemas opuestos a los matemáticos. Es cierto; pero, ¿contra quién está dirigida a modo de crítica tal observación? Por el contexto parece tener como blanco al logicismo; sin embargo, habría que reiterar, entonces, que una teoría fundacional, de acuerdo a la concepción logicista, no intenta obtener ventajas operativas. Por otra parte, Steiner afirma que si el matemático adoptase el programa logicista no dispondría de las ventajas de una definición explícita de número. Es cierto que existe tal imposibilidad de definir explícitamente 'número' dentro de las reconstrucciones de Russell o de Quine; pero también es cierto que ellos han dado las razones de tal imposibilidad y han propuesto, en cambio, otros tipos de definición que, por una parte, presentan ventajas propias y, por otra parte, proporcionan una explicación peculiar del concepto de número; ésto es siempre mejor que no disponer de explicación alguna.[17]

16 Steiner, *op. cit.*, p. 79.

17 Quine ha comentado acerca del progreso conceptual que se obtiene al pasar de definiciones explícitas a nuevos tipos de definición no-explícita; en su opinión, ello nos ha permitido percatarnos, al menos, de que las unidades de significación del discurso no son ni los términos ni las oraciones del discurso sino el discurso mismo. Véase W. Quine, "Epistemology Naturalized", en *Ontological Relativity and Other Essays*, ed. cit., pp. 69-90.

IV

Para cerrar nuestra discusión debemos ahora referirnos brevemente a la propuesta que Steiner hace como sustituto tentativo de la teoría logicista. Su propósito principal es conservar tanto la teoría de conjuntos como la aritmética (sin reducción) como básicas. De este modo, "no incrementamos la certeza en las áreas de la matemática o de la ciencia que dependen de la utilización de la teoría de conjuntos; pero sí incrementamos la certeza donde la aritmética es la única teoría matemática que se necesita".[18]

Creemos que es necesario enfatizar al respecto que: (*a*) la propuesta de Steiner se opone a toda teoría fundacional rigurosa de la aritmética porque no intenta responder a la pregunta clave de toda teoría de tal tipo, desde Platón en adelante: ¿qué es un número?; (*b*) pone otra vez de relieve el mito epistemológico, de la certeza del cual Steiner parece ser devoto creyente; (*c*) no es suficiente ni adecuado justificar la adopción de dos dominios teóricos matemáticos como básicos, afirmando meramente que "no soy yo quien fragmenta la empresa del conocimiento matemático, sino que la encontramos ya así".[19] Por el contrario, toda teoría fundacional debe intentar, al menos, descubrir que tal fragmentación es sólo exterior, o meramente operativa, y debe procurar exhibir una base plausible de unificación. Quine cree, justamente, que tal base es de naturaleza ontológica e involucra la reducibilidad ontológica de la teoría de los números a la teoría de los conjuntos.

A modo de conclusión: Steiner ha efectuado una revisión poco acertada del logicismo. Por una parte, ha dado una caracterización equívoca de sus problemas y tesis centrales, dando como resultado una crítica a posturas que, en verdad, los logicistas nunca pretendieron defender. Por otra parte, ha criticado erróneamente el intento quineano de reducir la aritmética a la teoría de conjuntos. Su crítica está basada en

[18] Steiner, *op. cit.*, p. 85.
[19] *Ibid.*, p. 85.

una inadecuada concepción de aspectos centrales de la filosofía de la matemática de Quine. Así, Steiner malentendió la teoría quineana de la reducción de teorías, pues supuso que ella habría de satisfacer los requisitos de claridad, certeza y ventaja operativa. Finalmente, acerca de la reducción específica de la teoría de conjuntos a la aritmética efectuada por Quine, acusó a éste de que la misma genera problemas que, en verdad, no surgen en tal presentación.

El logicismo parece haber salido indemne, al menos de este ataque crítico.[20]

[20] No ha sido nuestra intención afirmar que el logicismo es una filosofía de la matemática carente de problemas; por el contrario, creemos que no hay modo de evitar la conclusión que tal posición ha fracasado en llevar a cabo su programa original (introducir todos los conceptos matemáticos a partir de conceptos lógicos y probar todas las verdades matemáticas desde principios lógicos); sólo hemos pretendido criticar la revisión, supuestamente crítica, que Steiner hace del mismo. Es extraño que en tal revisión no se haya tenido en cuenta una versión más debilitada del logicismo, ya presente en Russell y que es, quizá, la única versión con visos de plausibilidad para rescatar al logicismo de la dificultad planteada por la presencia de principios extralógicos; tal forma de logicismo, bautiza como "condicionalismo" (*if-thenism*), puede ser expresada a través de las dos tesis siguientes: (*i*) una oración matemática es una oración de condicional que tiene, como antecedente, la conjunción de los axiomas matemáticos y, como consecuente, un teorema matemático: (*ii*) todas las oraciones matemáticas verdaderas pueden ser deducidas de axiomas lógicos. Tampoco afirmamos que tal versión no presente problemas importantes, pero nos parece que no puede haber revisión crítica del logicismo que no la tome en cuenta. Steiner sólo la menciona, y se limita a decir, sin argumentación alguna, que es falsa (*op. cit.*, pp. 90-91). Para una discusión del condicionalismo, véase A. Musgrave, "Logicism Revisited", *British Journal For The Philosophy of Science*, 28 (1977), pp. 99-127.

SUMMARY

In *Mathematical Knowledge*, Mark Steiner discusses several schools in the philosophy of mathematics; in the first two chapters he attempts to criticize what he believes is a correct reconstruction of several epistemic aspects of logicism and what he assumes are serious difficulties of Quine's philosophy of mathematics.

Our main claim is that his critical revision of logicism in incorrect. On the one hand, he gave an equivocal characterization of its central problems and theses; as a result, he actually has criticized claims which were never supported by the logicist philosophers. On the other hand, he wrongly evaluated Quine's reduction of Arithemtic into Theory of Sets. In fact, his criticism is based in an inadequate conception of some features of Quine's philosophy of mathematics. Thus, Steiner wrongly understood Quine's view about the reduction of theories by assuming that such a reduction should satisfy such requirements as clarity, certainty and an improvement in operativity. Finally, he blamed Quine's reduction for raising problems that, truly, do not emerge.

As a consequence, logicism seems to stay beyond Steiner's criticism.

[*R.J.G.*]