Kurt Schuette, *Beweistheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1960

Este libro contiene una exposición actualizada de los resultados más importantes obtenidos en la investigación de fundamentos por la escuela de Hilbert. La formalización de las lógicas básicas subyacentes a los diversos sistemas lógico-matemáticos analizados reune gracias a una notación muy original, las ventajas del cálculo de secuencias de Gentzen con las de los cálculos tradicionales inspirados en Frege y Russell. Las nociones básicas son las de parte positiva y parte negativa de una fórmula, que se definen recursivamente. De la verdad (falsedad) de una parte positiva (negativa) se sigue la verdad de la fórmula correspondiente. Los axiomas y las reglas de inferencia del cálculo proposicional y cuantificacional poseen una gran simplicidad, que permite demostrar su consistencia y completitud semántica con un mínimo de aparato metalógico.

Como las demostraciones metalógicas de los sistemas lógico-matemáticos requieren la aplicación de inducciones transfinitas, el autor construye a tal efecto un modelo recursivo, constituido por números naturales, de un segmento de la segunda clase de ordinales. La demostración del buen orden de este modelo es impredicativa pues opera con la totalidad de las propiedades de números naturales y define luego, gracias a esta totalidad, una 'nueva' propiedad de números naturales.

El primer sistema lógico-matemático que estudia el autor corresponde aproximadamente a la aritmética de Peano; su consistencia es demostrada siguiendo la segunda demostración de Gentzen. Luego el autor analiza un sistema semi-formal de la aritmética, es decir, uno que posee una regla de inferencia con un número infinito de premisas. En un sistema formal toda demostración puede representarse mediante un árbol con un número finito de nódulos; en el sistema semi-formal en cuestión las demostraciones son árboles con un número infinito de nódulos y ramas, pero cada una de éstas sólo posee un número finito de nódulos. Mediante sistemas semi-formales es posible analizar satisfactoriamente la estructura de una teoría deductiva evitando a la vez la conocida ω-incompletitud de los sistemas formales suficientemente ricos.

Más tarde el autor construye sistemas —formales y semiformales— en los cuales es posible expresar conceptos de la teoría de los conjuntos. Algunos de ellos no contienen distinciones de tipo, otros una teoría ramificada de los tipos, que impide la formalización de definiciones o argumentaciones impredicativas. Con respecto a estos últimos el autor ha obtenido resultados muy importantes, que ha publicado en dos artículos ("Eine Grenze fuer die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in der verzweigten Typenlogik", *Archiv fuer mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 7, 1965 y "Predicative well-orderings", en *Formal systems and recursive functions*, Amsterdam 1965) y resumido en un tercero ("Logische Abgrenzung des Transfiniten" en *Logik und Logikkalkuel*, Muenchen 1962). A la luz de estas investigaciones cuya relevancia filosófica no se puede sobrestimar. resulta que existen límites precisos a toda concepción predicativa de la lógica y de la matemática. En efecto, es posible demostrar la inducción transfinita (o lo que es lo mismo, el buen orden) por debajo de un cierto número ordinal transfinito crítico usando medios predicativamente lícitos; pero no hasta ese mismo número crítico. Si se adopta pues una posición constructivista en filosofía de la matemática —una forma de kantismo según la cual los entes matemáticos no nos están dados de entrada. sino que son generados por la conciencia de acuerdo a ciertas reglas y en una sucesión determinada— es necesario renunciar a ciertos conceptos matemáticos, a pesar de su aparente solidez. Si recordamos la injustamente olvidada concepción de Oskar Becker (*cf.* "Mathematische Existenz", *Jahrbuch fuer Philosophie und phaenomenologische Forschung*, tomo VIII, pág. 536 *ss* y 792 *ss*) según la cual el proceso de generación de los ordinales transfinitos refleja las estructuras reflexivas de la conciencia, este resultado de Schuette no nos puede sorprender tanto (*cf.* especialmente obra cit. pág. 568, nota 3) pues vendría a expresar el hecho de que hay una cierta estructura complejísima, expresada mediante un ordinal transfinito crítico, que la conciencia reflexiva puede aproximar asimptóticamente, pero jamás puede realizar.

Por cierto que los constructivistas contaban ya con ciertos retaceos en el edificio de la matemática clásica, pero lo nuevo en la investigación de Schuette es la posibilidad de fijar exactamente un límite preciso al pensar matemático constructivo. Esta es otra prueba más del hecho fundamental de que las concepciones filosóficas, fuera de su valor heurístico, sólo conducen a resultados exactos cuando se las formaliza de manera adecuada.

Este libro —y los artículos citados— pueden ofrecer grandes dificultades al lector con formación filosófica, pero el rigor de su método, la elegancia de sus demostraciones y las consecuencias fundamentales para la teoría del conocimiento que de ellos se derivan pagan con creces el esfuerzo requerido.

ANDRES R. RAGGIO