LA OBJECION DE RIEGER Y EL HORIZONTE DE LA ONTOLOGIA MATEMATICA

FRANCISCO MIRÓ QUESADA
Universidad de San Marcos,
Lima

La objeción de Rieger es la siguiente. Toda la demostración del primer teorema de Gödel (la incompleción de la aritmética formalizada) se funda en el supuesto de que existe una correspondencia biunívoca entre los números naturales y las cifras que se utilizan en el sistema formalizado de la aritmética. Es sobre la base de esta correspondencia que se establece que todas las funciones recursivas (primitivas y generales) se pueden representar en el sistema de la aritmética formalizada, que gracias a esta representación el razonamiento metateórico se puede reducir a un análisis de funciones recursivas formalmente representadas en el sistema. Y es esta posibilidad de reducción lo que permite, a la vez, conferir rigor absoluto (constructivo) a la demostración.

Pero, como dice Rieger, sabemos que el conjunto de los números naturales no es el único modelo que satisface los postulados de Peano (que son los postulados que Gödel formaliza para utilizar como axiomas del sistema de la aritmética formalizada). Hay muchos modelos (a saber, infinitos) que satisfacen dichos postulados (en caso de que los satisfaga el conjunto de los números naturales) y que no son isomorfos con el modelo clásico. En consecuencia, podemos utilizar un determinado conjunto, por ejemplo un modelo no clásico, para la aritmética intuitiva y otro, por ejemplo el mismo conjunto de los números naturales, para efectuar la correspondencia biunívoca con las cifras del sistema formal. Pero si se hace esto, los resultados podrían ser distintos. En consecuencia, lo que ha hecho Gödel no es sino algo parcial. Sus resultados valen sólo si se supone que el sistema formal se interpreta mediante el conjunto de los números naturales y que existe una correspondencia biunívoca entre las cifras de dicho sistema y los números naturales. No pueden por eso sostenerse las pretensiones filosóficas de Gödel.[1]

Mostowski no dice cuáles son estas pretensiones. Las pretensiones filosóficas de Gödel son muchas. La más importante, desde el punto de vista filosófico, creemos nosotros, es su posición platónica. Pensamos que Mostowski hace referencia a esta posición, porque es la que se deriva de manera más directa de su primer teorema de incompleción. En efecto, de dicho teorema se desprende que la disciplina comúnmente llamada aritmética intuitiva (que no es sino la aritmética tal cual la han entendido los matemáticos de todos los tiempos) rebasa la disciplina constituida por la aritmética formalizada. Si la rebasa quiere decir que el concepto de número no se agota en la definición implícita determinada por el conjunto formalizado de postulados (los postulados de Peano o cualesquiera otros equivalentes) o sea, el concepto de número no se agota en el uso de ningún simbolismo. No existe ningún sistema de símbolos, por más perfecto que sea, que pueda expresar por completo las propiedades de los números naturales, de esos entes conocidos de manera tan simple, directa y luminosa por el espíritu humano. Pero si esos entes trascienden el simbolismo que los expresa, entonces pertenecen a un mundo objetivo,

[1] Hemos encontrado esta objeción en Mostowski, *Thirty Years of Foundational Studies*, págs. 22, 23, Blackwell, Oxford, 1966. Mostowski no indica la referencia bibliográfica, limitándose a decir que hace poco tiempo que Rieger hizo la objeción. En la bibliografía que pone al final del libro, cita el siguiente trabajo de Rieger: "On free complete Boolean Algebras (with an Application to Logic)." Este trabajo es de 1951. El hecho de que Mostowski diga que no hace mucho tiempo que Rieger hizo su objeción, desconcierta, pues, en relación a la rapidez del avance en la investigación metateórica, 1951 es fecha bastante lejana. Desgraciadamente aún no hemos podido conseguir el trabajo de Rieger, ni tampoco su otro trabajo sobre una nueva prueba del teorema de Gödel. Aunque este trabajo también es de 1951, parecería, por el título, que es allí en donde formula la objeción. De todas maneras, la claridad con que la expone Mostowski permite comprenderla perfectamente y utilizarla en consecuencia.

independiente de la conciencia que los conoce. Y como no pueden ser empíricos, pues entonces la matemática se reduciría a una ciencia probabilística, deben ser supraempíricos, ideales. Esta argumentación fue tan convincente para Gödel, que llegó a la conclusión de que no sólo los números naturales pertenecían al mundo ideal, no empírico, sino también los conjuntos de órdenes superiores, es decir, los entes estudiados por la matemática clásica.[2]

Como vemos, la objeción de Rieger incide de manera directa sobre el problema fundamental de la ontología matemática: la objetividad del ente matemático. Se trata de un problema de la más alta significación para el pensamiento filosófico, no sólo actual sino de todo los tiempos. Se trata, además, de un problema demasiado complicado para tratarlo en unas cuantas líneas. Tendremos que contentarnos con pergeñar los rasgos esenciales. Esperamos que esta primera aproximación nos permita mostrar el enorme desconcierto que existe hoy en el campo de la filosofía de las matemáticas e indicar algunas vetas posibles de exploración. En cuanto a la objeción de Rieger nos limitaremos a analizar el aspecto principal, a saber: si el hecho de la existencia de modelos no clásicos relativiza el concepto de número natural. No creemos que esta consecuencia se derive de ese hecho. Porque la posibilidad de interpretar un sistema formal mediante modelos no isomorfos significa una limitación de dicho sistema, pero no la dependencia de las propiedades de los modelos de factores ajenos a ellos. Si se demuestra que los postulados de Peano pueden ser satisfechos por modelos diferentes del conjunto de los números naturales, esto sólo quiere decir dos cosas: 1) ningún sistema agota el concepto de número natural, 2) el conjunto de los números naturales es independiente del sistema simbólico que los expresa. Pero esto remite precisamente

[2] Gödel desarrolla estos puntos de vista (la afirmación de la existencia objetiva de los conjuntos transfinitos) en su famoso ensayo: "What is Cantor Continuum Problem?", reproducido en *Philosophy of Mathematics (selected readings)*, editado por Benacerraf y Putnam, Blackwell, Oxford, 1964.

a lo contrario de la tesis relativista que pretende que el concepto de número natural es en todo equivalente al concepto de los otros entes que satisfacen el mismo conjunto de postulados. Al revés, si el sistema simbólico no agota el contenido del concepto de número natural, no hay ningún criterio para saber si son o no son equivalentes. Para saber si dos conjuntos de entes son equivalentes hay que compararlos en todas sus propiedades. Pero si el sistema simbólico no agota todas las propiedades, ¿cómo podemos saber si son equivalentes? Precisamente, el hecho de ser dos sistemas diferentes demuestra que no son equivalentes. Lo interesante es que, siendo distintos, satisfacen el mismo sistema formal. Luego, si son distintos, no son equivalentes. No hay pues ninguna relatividad.

La relatividad se deriva más bien de la categoricidad. Si la aritmética formalizada fuera categórica, entonces cualquier conjunto que la satisficiera sería estrictamente equivalente. En consecuencia, no habría la posibilidad de conferir al conjunto de los números naturales ningún carácter privilegiado. Esta situación puede aclararse utilizando el concepto de grupo. Hasta hace poco, se distinguían en matemáticas dos tipos de teorías: las categóricas y las no categóricas. Las categóricas eran las que daban la impresión de definir de manera completa (de manera implícita a través de sus postulados) los conjuntos que las satisfacían. Las dos teorías principales de este tipo eran la aritmética y la teoría de los conjuntos. Las segundas eran aquellas, que como la teoría de los grupos (anillos, campos, látices, etc.), habían sido creadas, no para estudiar las propiedades de un solo conjunto de objetos, sino las propiedades comunes a muchos conjuntos, muy diferentes entre ellos. La teoría de los grupos era un ejemplo clásico de teoría no categórica, pues puede ser interpretada por conjuntos finitos, enumerables (números naturales) y transfinitos (conjuntos clásicos). En la actualidad, empero, esta dicotomía se ha abandonado. Todo sistema formal suficientemente poderoso para ser interpretado por el conjunto de los números naturales puede ser interpretado por otros conjuntos no isomorfos.

Pero esto no significa ninguna relativización. La teoría de los grupos es útil para comprender lo que decimos. El hecho de que pueda ser interpretada por conjuntos tan diferentes como el conjunto de los números reales y el conjunto de las rotaciones del cuadrado, no significa de ninguna manera que se haya relativizado el concepto de ambos conjuntos. Significa solamente que ni el concepto de número real ni el concepto de cuadrado pueden ser plenamente definidos por el concepto de grupo. Lo mismo sucede con el concepto de número natural. Hasta hace poco se creyó que el sistema de la aritmética formalizada de Peano permitía definir plenamente el concepto de número natural. Hoy se sabe que no es así. ¿Qué tiene esto que ver con la relativización del concepto de número natural?

La objeción de Rieger en lugar de ir contra las pretensiones filosóficas de Gödel, redunda, como vemos, en su favor. Sin embargo no hay que creer que permite justificarlas plenamente. Porque, desgraciadamente, existen otros resultados de la investigación metateórica que las invalidan en parte. El principal de ellos es el famoso teorema de Löwenheim-Skolen: la demostración de que la teoría de los conjuntos, en caso de ser consistente, puede ser interpretada mediante un conjunto enumerable. Este resultado impide, a nuestro entender, tener la seguridad de que los conjuntos transfinitos sean objetivos. Porque si la teoría de los conjuntos puede ser interpretada mediante un conjunto enumerable de elementos, ello quiere decir que el conjunto de los números reales puede ser enumerado. Desde luego esta enumeración sólo puede ser hecha desde fuera del sistema, por una teoría más poderosa. Pero aquí sí se puede hablar de relativización. El concepto de conjunto no enumerable es relativo al sistema simbólico que se utiliza. Los famosos resultados de Cantor, que se consideraron absolutos, dependen de la limitación de la teoría simbólica que él empleó de manera puramente intuitiva y que ha sido satisfactoriamente formalizada por Zermelo, Frankel, von Neuman, etc. En consecuencia no puede decirse que los resultados de la teoría de los conjuntos o de la investigación metateórica obliguen a pensar que los conjuntos transfinitos existen en un mundo platónico. El carácter de "transcendentalidad" (no enumerabilidad) depende de la estructura del sistema simbólico que describe los objetos. No parece por eso objetivo.

En cambio el concepto de número natural sí parece corresponder a algo objetivo. Y esto por una razón fundamental: que no hay ninguna interpretación que permita pensar que las propiedades de los números naturales, tal como se determinan mediante la aritmética de Peano, sean relativas al sistema simbólico. El hecho de que el sistema formalizado de Peano puede interpretarse de manera no regular, no significa que las propiedades de los números naturales sean relativas. De la interpretación no clásica se desprende que existen otros conjuntos de entes que, además de tener las mismas propiedades de los números naturales, tienen propiedades diferentes. La aritmética de Peano, como la teoría de los grupos, permite conocer las propiedades comunes a una infinidad de conjuntos de entes diferentes. Y estas propiedades han bastado, hasta el momento, para utilizar los números naturales en todo lo que ha sido necesario. Y es importante observar que, en el caso de la teoría de los conjuntos, el hecho de que existan interpretaciones enumerables, no cambia en nada los resultados de la teoría referentes a las propiedades de los números naturales. En relación a los sistemas matemáticos formalizados, no hay, pues, ningún resultado que obligue a cambiar los conceptos clásicos sobre el número natural.

Todo esto nos lleva a la conclusión de que, de un lado, el platonismo clásico ha quedado reforzado, puesto que todos los resultados de la investigación metateórica nos conducen a considerar la condición de los hechos aritméticos como objetiva; pero que, de otro lado, ha quedado debilitado, debido a la relativización del concepto de conjunto transfinito que introduce el teorema de Löwenheim - Skolem. Consideramos de interés observar que se trata de una situación similar a la que encontramos en la epistemología del conocimiento matemático. De un lado, los resultados de la investigación metateórica permiten considerar la evidencia de ciertos principios, por ejemplo del principio de contradicción, como auténtica y definitivamente establecida, mientras que del otro, la evidencia de principios como el del tercio excluido ha sido limitada o puesta en tela de juicio.[3]

Naturalmente mientras no aclaremos estas aparentes anomalías, será imposible formarnos una idea clara de lo que sucede. Por ahora lo único que podemos decir es que las posiciones clásicas respecto de la ontología del ente matemático no permiten comprender los resultados obtenidos. Ni el platonismo, ni el empirismo, ni el nominalismo, ni el formalismo, ni el intuicionismo.

Ya hemos visto lo que sucede con el platonismo. Parece reducirse a la región de los números naturales. La región del ente matemático queda escindida en una región clara y evidente y en otra nebulosa que no puede considerarse como verdaderamente objetiva. En cuanto al empirismo, ya ha sido demostrado hasta la saciedad que el ente matemático no puede ser empírico, pues no podría explicarse las modalidades mediante las cuales se le conoce. No puede tampoco derivarse de la experiencia mediante la abstracción en el sentido de Mill. Los ensayos de crear un neoempirismo, como por ejemplo el de Kalmar, nos parecen destinados al fracaso.[4] Por más esfuerzos que hacen sus partidarios no logran contestar una pregunta tan simple como la siguiente: si las matemáticas son empíricas ¿por qué los teoremas matemáticos no necesitan ser verificados mediante la observación empírica?

[3] Sobre este punto ver: Francisco Miró Quesada, *Apuntes para una teoría de la razón*, Universidad de San Marcos, Lima, 1963.

[4] Ver Kalmar, "On the Relevance of post-gödelian Mathematics to Philosophy", en *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1967.

El nominalismo es una filosofía ambigua. Lo único inequívoco que hay en ella es el reduccionismo. Todo tipo de nominalismo es un reduccionismo, o sea, un monismo. Si el último término de la reducción es empírico, entonces el nominalismo es un tipo muy elaborado de empirismo y, en consecuencia, es falso. Pero si los términos de la reducción no son empíricos, entonces caemos en el platonismo o en alguna de las otras posiciones clásicas. En cuanto al formalismo, ya hemos visto que los resultados de Gödel y de Löwenheim-Skolem no permiten reducir el ente matemático al simbolismo que lo expresa.

Queda el intuicionismo. El intuicionismo primitivo es difícil de entender. Hablar de una ciencia más allá del lenguaje, que no puede expresarse sino de manera aproximada mediante símbolos lógicos y matemáticos, no tiene sentido. La única interpretación que satisface las exigencias de rigor es la constructivista.[5] Y el constructivismo remite al platonismo. La tesis oficial es, desde luego, la contraria. Mientras no se construye una propiedad no puede hablarse de ella. Esta tesis parece, a primera vista, ser antiplatónica, pues de acuerdo con el platonismo clásico, las propiedades existen con independencia de su descubrimiento. Pero si analizamos el concepto de construcción, observamos algo muy sencillo, que, hasta donde llega nuestra información, nunca ha sido suficientemente analizado. El concepto de construcción remite necesariamente a los elementos de la construcción. Construir es llegar a algún resultado mediante un número finito de operaciones. Pero las operaciones se realizan con elementos que existen de antemano. Construir una propiedad es operar con entes que tienen propiedades que no han sido construidas. Pues si no fuera así, se caería en un "*regressus*". Los elementos que han servido para la construcción deberían a su vez ser construidos, y así sucesivamente, *in infinitum*. De todas

[5] Kleene ha demostrado que la matemática recursiva corresponde exactamente a la disciplina matemática que han creado los intuicionistas. Ver Kleene y Vesley, *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

maneras, debe haber un momento en que, descendiendo por el camino recorrido, de construcción en construcción, se llega a los elementos que no han sido construidos porque han servido de base para todas las construcciones realizadas.

Es evidente que los elementos de la construcción aritmética no pueden ser empíricos. Pues si lo fueran, todas las afirmaciones sobre propiedades de números sólo valdrían para objetos concretos. Si se tratara de generalizarlos, tendrían entonces valor probabilístico. Pero el hecho es que valen para todos los palotes habidos y por haber y para todo ente que pueda considerarse como un individuo separado de los restantes y que forme con ellos un conjunto enumerable. O sea, valen para algo común a todo ente separable que pertenece a un conjunto enumerable. Y este algo común no es otra cosa que el número natural. Esta argumentación puede mantenerse en caso de que el modelo escogido sea irregular. El hecho es que, por más que hagamos, no podemos salir del horizonte platónico.[6]

Vayamos por donde vayamos, el resultado es inescapable. En los actuales momentos no vemos claro cuál es el *status* ontológico del ente matemático. Más aún, los planteamientos que llamamos clásicos, parecen ingenuos. Sorprenden por su simplismo y por la manera esquemática y unilateral de considerar el problema. De manera resumida hacemos, para terminar, algunas consideraciones sobre posibles líneas de acción en el tratamiento del problema. El punto de partida es la situación de desconcierto en la cual se halla actualmente la filosofía matemática. Todas las tesis clásicas han fracasado de manera irremediable. De manera aún no muy precisa puede decirse que los resultados de la investigación conducen hacia una especie de platonismo limitado. Tal vez podría utilizarse la expresión

[6] La posición de la escuela de epistemología genética, cuyos principales representantes son Piaget y Beth, nos parece un caso particular del intuicionismo. Si se considera que la lógica y la aritmética estudian las leyes de la manera como ordenamos los objetos, es evidente que, en el punto de partida (que es necesariamente finito), nos encontramos con construcciones.

—siguiendo una sugerencia de Quine— de *platonismo pitagórico*, puesto que la región de los números naturales es la única que se presenta, de manera indudable, como una región totalmente independiente del sujeto. Este hecho no significa ni que toda la matemática pueda reducirse a la aritmética, ni que las proposiciones sobre conjuntos transfinitos carezcan de sentido. Significa simplemente dos cosas: 1) la ontología matemática es completamente diferente de las demás ontologías y constituye un campo virgen para la investigación; 2) existe una relación *sui generis* entre el ente matemático y el lenguaje que lo expresa, también completamente distinta de la relación entre los entes no matemáticos y el lenguaje que los expresa. La extrañeza de esta relación se releva claramente en el teorema de Löwenheim-Skolem, pues sus resultados refuerzan y debilitan a la vez la convicción de que el ente matemático es independiente del lenguaje que lo describe. Ya hemos visto por qué. La situación anotada nos induce a pensar que mientras no se aclare la relación específica entre el ente matemático y el lenguaje que lo expresa, no podrá aclararse (por lo menos avanzar más de lo que se ha hecho hasta ahora) el problema del ente matemático. Así como los resultados de la investigación metateórica muestran que es necesario un criterio que permita separar las evidencias auténticas de las inauténticas, así, los mismos resultados obligan a buscar un criterio que permita deslindar el ente matemático verdaderamente independiente del lenguaje que lo expresa de aquel que depende de dicho lenguaje total o parcialmente.

SUMMARY

Rieger has made an objection against the results obtained by Gödel in his first theorem (the incompleteness of formalized arithmetic). They can only be valid if we suppose that the formal system is interpreted in terms of the set of natural numbers and that there is a one-to-one correspondence between the figures of the system and the natural numbers. But we know that there are many models that satisfy Peano's postulates (which Gödel uses as axioms) and which are not isomorphic with the classical model. Therefore the results might be different if a set were used, a non-classical model, for example, for intuitive arithmetic, and another, that of natural numbers, for example, to effect the one-to-one correspondence with the figures of the formal system. The result obtained by Gödel would thus be partial and not able to maintain his philophical claims.

Gödel's most important philosophical claim is the platonic position derived from his theorem of incompleteness. It follows from this theorem that while intuitive arithmetic goes beyond formalized arithmetic, the concept of number is not exhausted in the implicit definition established by the set of postulates: thus there cannot be a system of symbols which expresses completely the properties of natural numbers. But if the numbers transcend the symbolism which expresses them, they must belong to an objective world, ideal and independent of the consciousness that expresses them. Gödel came to the conclusion that not only the natural numbers but also the higher order's sets belong to a world of ideal entities. Thus, Rieger's objection is relevant to the fundamental problem of mathematical ontology: the objectiveness of the mathematical entity.

The principal point of Rieger's disagreement is whether the existence of non-classical models makes the concept of a natural number relative. We do not think that we could reach such a conclusion. For, if it is demonstrated that Peano's postulates can be satisfied by models which are different from the set of natural numbers, it only implies that: 1) no system can exhaust the concept of natural number; 2) the set of natural numbers is independent of the symbolic system which expresses them. If the relativistic thesis claims that the concept of natural number is equivalent to the concept of other entities which satisfy the same set of postulates, then those consequences are contrary to the relativistic thesis. In fact, in order to know whether two sets of entities are equiva-

lent, they must be compared in all their characteristics. Therefore, if the symbolic system does not exhaust all the properties of the concept of the natural number, we have no criterion for knowing whether or not they are equivalent. On the contrary, the fact that they are two different systems demonstrates that they are not equivalent. There is, then, no relativity.

The relativity is derived, rather, from the categoricity. If formalized arithmetic were categorical, any set which satisfied it would be strictly equivalent. But in fact, the distinction between categorical and non-categorical theories has been abandoned. Any formal system sufficiently powerful to be interpreted by the set of natural numbers can be interpreted by other non-isomorphic sets. This does not imply any relativization. For instance, the fact that the group theory can be interpreted by such different sets as that of real numbers and that of the rotations of the square, does not imply that the concept of both sets has been relativized. It only means that neither the concept of real number nor the concept of square can be fully defined by the concept of group. The same applies to the concept of natural number. The fact that the system of formalized arithmetic does not permit us to define the concept of the natural number has nothing to do with the relativization of that concept.

Thus, Rieger's objection, instead of going against Gödel's philosophical claim, actually works in his favour. Other results do, however, partially invalidate it. The main one is the Löwenheim-Skolem theorem; the demonstration that the set theory, if it were consistent, could be interpreted by means of a numerable set. Here we can certainly talk of relativization. The concept of a non-numerable set is relative to the symbolic system which is used. Cantor's results depend upon the limitation of the symbolic theory that he chose to use. Consequently, the results of the set theory or the metatheoretical investigation do not compel one to think that transfinite sets exist in a platonic world. The character of "transcendentality" (non-numerability) depends on the structure of the symbolic system which describes the object. For this reason it does not seem to be objective.

On the other hand, it seems that the concept of natural number corresponds to something objective, for the fundamental reason that no interpretation allows that the properties of the natural numbers as they are expressed in Peano's arithmetic can be relative to the symbolic system. By means of Peano's arithmetic as well as the group theory we may know the properties which are common to an infinite number of sets of different entities. These properties have been sufficient up to now to make complete use of the natural numbers.

We come to the following conclusion. Classical Platonism has been, on the one hand, reinforced, since the results of the metatheoretical investigation lead one to think of the arithmetical facts as objective. On the other hand, it has been weakened, due to the relativization of the concept of a transfinite set. Not one of the classical positions on the ontology of the mathematical entity can explain these results. Platonism seems to be reduced to the region of the natural numbers, while there is another vague area that cannot be considered as truly objective. As for empiricism it has been demonstrated many a time that the mathematical entity cannot be empirical nor based on experience. The essays on neo-empiricism, like Kalmar's, seem destined to failure. Nominalism is an ambiguous philosophy; its only unequivocal property is its reductionism. If the end of the reductions is empirical, then we are dealing with an empiricism, and it is therefore false. If the end of the reduction is not empirical, then we are falling into Platonism or other classical positions. As for formalism, we have already seen that the results of Gödel and of Löwenheim-Skolem do not allow for the reduction of the mathematical entity to the symbolism which expresses it.

Finnally there is intituitionism. The official thesis appears to be antiplatonic, for one cannot speak of a property when it has not been constructed. The concept of construction, however, send us to the elements of construction. To construct is to arrive at a result after a finite number of operations with elements which existed beforehand. To construct a property is to operate with entities which have properties that have not been constructed. The contrary would lead to a *regressus*. The elements on which the arithmetical construction is based cannot be empirical, for if they were the statements upon the propierties of numbers would only be valid for concrete objects, or if generalized, they would only have a probabilistical value. So, whatever we do, we cannot avoid the platonic horizon.

The result cannot be avoid. At the moment we do not see clearly what is the ontological status of the mathematical entity. The classical positions seem too ingenuous. One could say that the results of the investigation suggest a kind of limited platonism, in which the region of the natural numbers is the only one which presents itself in an undeniable manner as totally independent of the subject. This does not imply that all mathematics can be reduced to arithmetic, nor that the propositions upon transfinite sets are untenable. It only implies that: 1) mathematical ontology is completely different from other ontologies; 2) between the mathematical entity and the language that expresses it there is a *sui generis* relation which is completely different from the relation between non-mathematical entities and the language which expresses them. The oddness of this relation is indicated in the Löwenheim-Skolem theorem, for its results both strengthen and weaken the conviction that the mathematical entity is independent of the language that describes it. While the specific relation between the mathematical entity and the language is not made quite clear, the problem of the mathematical entity will not be clear either. The results of the metatheoretical investigation compel us to look for a criterion in order to distinguish the mathematical entity which is truly independent from the language that expresses it, from that which depends either partially or totally upon the language.