UNA CRÍTICA INMANENTE DE LA LÓGICA DE LA RELEVANCIA

JOSÉ M. MÉNDEZ
Departamento de Lógica
y Filosofía de la Ciencia,
Universidad de Salamanca

La crítica de la lógica de la relevancia se ha centrado últimamente en la discusión del *silogismo disyuntivo* (s.d) que, como es sabido, no es un esquema de inferencia válido en la lógica de la relevancia de Anderson y Belnap (de ahora en adelante, A & B).[1] Dado que s.d es una regla de inferencia ampliamente establecida en el discurso técnico y ordinario, los críticos de A&B han concluido en contra de los autores de *Entailment*, que la lógica de la relevancia no es un análisis de la inferencia técnica y ordinaria preferible a la lógica clásica. Han concluido también que si salvaguardar las cuestiones de relevancia equivale a invalidar s.d y otras reglas de inferencia tan bien asentadas como ella, lo mejor es olvidar la lógica de la relevancia o relegarla al ámbito de lo meramente retórico.[2]

Denominamos este tipo de crítica "externa" o "exmanente", en el sentido de que su objetivo es mostrar la inadecuación de la lógica de la relevancia, a la aplicación extralógica, sobre todo en comparación con la lógica clásica. En

[1] *Cfr.* la reciente polémica desarrollada en las páginas del *Notre Dame Journal:* Burgess (1981), (1983), (1984); Read (1983); Mortensen (1983). *Cfr.* también Copeland (1979), Belnap (1980), y Belnap y Dunn (1981). Entre nosotros citamos a Orayen (1983a), (1983b), (1985) y Morado (1984). Por desgracia, no he podido, en el momento de escribir este trabajo, consultar Sánchez Pozos (1978), (1980), citados en Orayen (1985).

[2] Nos alejaría en exceso de los objetivos del presente trabajo el mero intento de reseñar los artículos citados en la nota anterior. Dejamos el tema para otra ocasión, pero anotamos que, en nuestra opinión, dichas críticas de la relevancia establecen ciertamente: a) El sistema R no es, en contra de las pretensiones de A&B, una formalización adecuada de la inferencia ordinaria. b) Como ya había conjeturado Lewis (*cfr.* § 1.1), la vindicación de la relevancia se hace a altos costos (intuitivos y formales).

cambio, el presente trabajo puede calificarse de crítica "interna" o "inmanente", en el sentido de que su propósito es examinar los criterios sintáctico y semántico que dirigen la construcción de la lógica de la relevancia y, en particular, la adecuación del sistema R a estos criterios.[3]

Los resultados de este trabajo se refieren al concepto "clásico" de relevancia de A&B bosquejado en 1962 y expuesta en 1975. Estos resultados pueden condensarse en los dos siguientes:

(a) A&B no proporcionan una caracterización semántica del concepto de relevancia; la única caracterización que ofrecen es meramente sintáctica.
(b) El sistema R no es el adecuado a esta caracterización.

1. El concepto de relevancia de Anderson y Belnap

1.1. *La implicación estricta de C. I. Lewis*

A&B saludan a W. Ackermann (1956) como solitario pionero de la empresa por ellos acometida. En nuestra opinión, Lewis y, subsidiariamente, Hacking (1963) son también acreedores a tal honor en virtud de las razones que a continuación se exponen.

A pesar de que C. I. Lewis es hoy reconocido como el fundador de la moderna lógica modal, el propósito de Lewis era construir un sistema que fuera una formalización adecuada del concepto ordinario de inferencia o deducción válida. A su juicio, dicho concepto no estaba representado formal-

[3] Para evitar posibles malentendidos subrayamos que los calificativos "externo" e "interno" no son en modo alguno sinónimos de lo que no debe ser y es, respectivamente, una crítica. Los utilizamos en estricto sentido que, aproximadamente, aclara el texto. Además, anotamos que la crítica "externa" es especialmente pertinente en el caso de la lógica de la relevancia puesto que A&B afirman explícitamente que ésta es una formalización de la inferencia ordinaria muy superior a la lógica clásica (cfr. Burgess (1983), (1984)).

mente en la lógica clásica, y prueba patente de ello eran, para él, las llamadas "paradojas del condicional material". Aunque su crítica a la lógica clásica de ningún modo se agota en la crítica de las paradojas del condicional material, Lewis intentó formular *un sistema totalmente libre de paradojas*, tomando la eliminación de éstas como índice de que se hallaba ante el sistema que buscaba. C. I. Lewis es, por tanto, el primer lógico que definió y abordó la elusiva tarea de construir una lógica no paradójica y, en este sentido, es punto de referencia ineludible tanto en la construcción como en la discusión de la lógica de la relevancia. (*Cfr.* sobre todo esto Méndez (1983).) Por su parte, I. Hacking (1963), al definir los fragmentos implicativos de S2-S5, dotó de precisa expresión formal a la noción de "implicación estricta" definida axiomáticamente en relación inextricada con la posibilidad y las funciones de verdad por Lewis, con la necesidad y la base de la lógica clásica por Lemmon (1956), (1957).

Pero nuestro propósito no es tanto reivindicar para Lewis (y Hacking) un honor que algunos podrían considerar dudoso, como examinar los resultados de sus investigaciones en pos de la lógica no paradójica. Pues bien, es sabido que, desde este punto de vista, los sistemas de Lewis son un rotundo fracaso porque en todos ellos son derivables paradojas (de la implicación estricta).[4] Ahora bien, lo que aquí nos

[4] Lewis resume las peculiaridades del condicional material con la metáfora circense que sigue

> *Let an equal number of* true *and* false *statements (chosen at random and regardless of their subject matter) be written on slips of paper and put in a hat. Let two of these then be drawn at random. The chance that the first will* materially *imply the second is* $\frac{3}{4}$. *The chance that the second will materially imply the first is* $\frac{3}{4}$. *The chance that each will* materially *imply the other is* $\frac{1}{2}$. *And the chance that neither will* materially *imply the other is 0.* (Lewis y Langford (1932), p. 145; los subrayados son nuestros.)

Sustitúyase ahora *true* por *necessary true*, *false* por *imposible* y *materially* por *strictly*; el resto déjese como está. Se tiene, entonces, un resumen metafórico equivalente de las peculiaridades de la implicación estricta.

importa sobre todo recalcar es la conclusión que Lewis extrajo de este hecho. Lewis concluyó (*cfr.* Curley (1975)) que debíamos olvidarnos de una lógica totalmente libre de paradojas porque eliminar las de la implicación estricta equivaldría con seguridad a desechar también ciertas tesis esenciales sobre el concepto de implicación. Y si esto fuera así, el remedio de la lógica de la relevancia (si se permite el anacronismo) sería peor que la enfermedad de la lógica paradójica (estricta). La pesimista conclusión de Lewis adquiere extraordinaria importancia en vista de los resultados de la crítica "externa" de la relevancia reseñados en la introducción a la presente investigación que, por su parte, aportará otros en favor de dicha conclusión.

En desacuerdo con ella, sin embargo, A&B en su famoso artículo de 1962 retoman el proyecto de Lewis con la seguridad de que es posible eliminar las paradojas de la implicación estricta sin que el sistema resultante sea indigno de consideración. A&B son, en consecuencia, herederos directos del proyecto inicial de Lewis sobre el que éste se pronunció finalmente con pesimismo. El optimismo de A&B es, en cambio, patente y matizado, y además de agresiva crítica contra la lógica clásica por cierto consonante con los escritos de Lewis. Comprobamos en lo que sigue en qué medida este optimismo está justificado.

1.2. *El concepto de relevancia de Anderson y Belnap*

A diferencia de Lewis, A&B (1962) parten de una caracterización suficientemente precisa del concepto de "paradoja":

(C1) $A \rightarrow B$ es una *paradoja de la relevancia* si el contenido (semántico) de A y B es, eventualmente, disjunto.

Esta caracterización puede reformularse en

(C2) $A \rightarrow B$ es una *paradoja de la relevancia* si A y B no tienen en común ninguna variable proposicional,

ya que "*commonality of meaning in propositional logic is carried by commonality of propositional variables*" (1962, p. 48). De acuerdo con (C2), (Σ) ha de ser necesariamente propiedad de todo sistema S de la relevancia:

(Σ) En toda tesis de S de la forma $A \rightarrow B$ A y B tienen en común al menos una variable proposicional.

La propiedad (Σ) es, entonces, *la caracterización semántica de la relevancia* (*cfr.* A&B (1962), (1975) y Belnap (1980)).

Nótese que ni (C2) es una *definición* de paradoja de la relevancia, ni (Σ) una *definición* del concepto semántico de relevancia: (C2) proporciona únicamente la suficiencia; (Σ) sólo la necesidad. Es precisamente esta razón la que explica que sea la caracterización sintáctica la que dé lugar al sistema R de la lógica de la relevancia.

El punto de partida en la construcción de la caracterización sintáctica es la siguiente caracterización de *premisa relevante* (*cfr.* 1962).

(C3) A es una *premisa relevante* para B si es posible *usar* A para demostrar B.

Formalmente, (C3) se traduce en la siguiente caracterización de *teorema de la lógica de la relevancia*:[5]

(C4) $A_1 \rightarrow (\ldots (A_n \rightarrow B) \ldots)$ es *teorema de la lógica de*

[5] A&B distinguen entre $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ y $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$. En el primer caso hay que usar cada A_i; en el segundo es, naturalmente, suficiente con usar *una* A_i. Las dos fórmulas no son, pues, equivalentes.

la relevancia si cada A_i $(1 \leq i \leq n)$ se *usa* para probar B.

En particular, $A \rightarrow B$ es teorema si A se usa para probar B. Y así, por ejemplo, la tesis de S4 $B \rightarrow (A \rightarrow A)$ no es teorema de la lógica de la relevancia porque B *no se usa* para derivar $A \rightarrow A$.

De acuerdo con (C4), (S) ha de ser necesariamente propiedad de todo sistema S de la relevancia.

(S) En toda tesis de S de la forma $A_1 \rightarrow (\ldots(A_n \rightarrow B)\ldots)$ cada A_i $(1 \leq i \leq n)$ se *usa* para probar B.

La propiedad (S) es, entonces, la *caracterización sintáctica de la relevancia* (*cfr.* A&B (1962), (1975) y Belnap (1980)).

De nuevo hay que señalar que (C2), (C4) y (S) no son *definiciones* sino sólo *caracterizaciones*: proporcionan meramente la condición de necesidad para los conceptos respectivos. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurría con la caracterización semántica, (C4) nos provee de la metodología adecuada para construir un sistema cuyas tesis sean todas teoremas de la lógica de la relevancia: basta restringir el cálculo de deducción natural clásico de acuerdo con el requisito formalizado en (C4).[6] Ésta es, desde luego, la estrategia seguida por A&B. El proceso de construcción del sistema R es a partir de aquí como sigue. En primer lugar, A&B (1962) demuestran que el sistema C.R (fragmento implicativo de R) es deductivamente equivalente a la restricción del sistema de deducción natural clásico mencionada más arriba. Más aún, prueban que C.R es completo respecto a la caracterización sintáctica de relevancia como uso: $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B)\ldots)$ es teorema de C.R ssi cada A_i

[6] El concepto de *uso* queda, entonces, claro: A se usa para probar B si A es una premisa en una *regla de inferencia* en una deducción de B.

$(1 \leq i \leq n)$ se usa para probar B. De modo que (C4) se convierte de hecho en una ***definición sintáctica*** de relevancia para el fragmento implicativo de R.

C.R se axiomatiza con

A1. $A \rightarrow A$
A2. $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
A3. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
A4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

y con *modus ponens* como única regla de inferencia.[7]

A&B (1962) prueban, además, que (Σ) es propiedad de C.R. Una vez disponible este sistema, A&B (1975) no se plantean excesivos problemas a la hora de considerar qué axiomas *funcionales de verdad* han de añadirse a C.R para construir el sistema R:

> *The idea for defining* [...] *R* [...] *is simple-minded: just add the truth-functional axioms of E* [*Entailment:* lógica de la implicación] *to the already discussed pure implicational system R* [C.R]... (1975, p. 339).

Y así, estos axiomas son:

A5. $(A \wedge B) \rightarrow A$
A6. $(A \wedge B) \rightarrow B$
A7. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
A8. $A \rightarrow (A \vee B)$
A9. $B \rightarrow (A \vee B)$
A10. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
A11. $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

[7] La presente formulación es nuestra. *Cfr.* Méndez (1982) para un conjunto de formulaciones equivalentes.

A12. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$
A13. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

con *adjunción* como nueva regla de inferencia.

Aunque R es claramente correcto, no es (a diferencia de C.R) adecuado respecto de la caracterización (sintáctica) de la relevancia como uso: la fórmula

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$$

en la que, obviamente, A y B se utilizan para probar $A \wedge B$ no es derivable en el fragmento positivo R_+ de R porque R_+ colapsa en un sistema paradójico si la añadimos como nuevo axioma. Sin embargo, A&B concluyen que R es *LA* lógica de la relevancia una vez que han mostrado que (Σ) es propiedad de R, y luego de que Routley y Meyer (1973) hayan proporcionado una semántica respecto de la que R es completo.

Para finalizar este apartado subrayamos algunos aspectos de este concepto de relevancia tan esquemáticamente bosquejado en las páginas precedentes. En primer lugar, anotamos que A&B (1975) y Belnap (1980) siguen considerando (S) y (Σ) como las caracterizaciones *sintáctica* y *semántica,* respectivamente, de la relevancia aunque la semántica de Routley y Meyer está ya disponible. (S) y (Σ) configuran, de hecho, el concepto de relevancia de A&B. En segundo lugar, observamos que el criterio (S) es el origen, tanto desde el punto de vista histórico como desde el punto de vista conceptual, del sistema. Por último, recordamos que (S) y (Σ) son sólo condiciones necesarias de relevancia sintática y semántica, respectivamente, a pesar de que establecen el único concepto de relevancia ofrecido por A&B.

2. La caracterización semántica de la relevancia

2.1 *La insuficiencia de (C2) en la definición de paradoja de la relevancia*

A&B (1962) prueban que C.R tiene, además de (Σ), la propiedad de que en ningún teorema una variable aparece *una sola vez*. Así, por ejemplo:

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$
(2) $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$
(3) $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$
(4) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$
(5) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

no son, entre otras interesantes fórmulas, tesis de R.

Este resultado parece alegrar a A&B que ven en él una confirmación de que R es realmente la lógica de la relevancia: en los teoremas de R no hay "*loose pieces*" (1962, p. 50). Pero fuera de esta soslayable interpretación, A&B (1962, 1975) no ofrecen justificación semántica de esta nueva propiedad. Sin embargo, la ausencia, en particular, de (1)-(5) de la clase de teoremas de R es fácil de explicar: basta añadir cualquiera de (1)-(4) a C.R para que el resultado sea precisamente el fragmento implicativo de la lógica intuicionista; basta añadir (5), y el resultado es exactamente el fragmento implicativo de la lógica clásica (*cfr.* Méndez (1983), cap. V, VI).

Pero el "carácter paradójico" de (1)-(5) puede patentizarse aún más. Sea de acuerdo con A&B (1975, § 8.11)

A1. $A \rightarrow A$
A2. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

junto con *modus ponens* el *sistema implicativo mínimo* SM. Entonces, si añadimos cualquiera de (1)-(5) a SM, este sistema colapsa en uno paradójico como mostramos a continuación.

Queda para el lector la comprobación de

(a) $SM \cup \{(1)\} \vdash X$
(b) $SM \cup \{(2)\} \vdash X$
(c) $SM \cup \{(5)\} \vdash X$
(d) $SM \cup \{(3)\} \vdash (1)$
(e) $SM \cup \{(4)\} \vdash (2)$
(f) $SM \cup \{X\} \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((Y \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow Y))$

donde X y Y resumen, respectivamente, las fórmulas

$$(B \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A))$$
$$(C \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow C)$$

Se sigue, entonces, de (a)-(f) que si añadimos cualquiera de (1)-(5) a SM podemos derivar

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((Y \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow Y))$$

Pero en esta fórmula antecedente y consecuente no tienen ninguna variable en común. Por consiguiente, de (a)-(f) se sigue que SM suplementado con cualquiera de (1)-(5) da como resultado un sistema paradójico. Con mayor generalidad, se sigue que no hay en el *espectro implicativo clásico* (*cfr.* Méndez (1986); cfr. también García Noriega y Méndez (1985)) ninguna extensión relevante de SM con cualquiera de (1)-(5) .

Ahora bien, se habrá observado que en (1)-(5) antecedente y consecuente comparten siempre una variable. Si hacemos de (C2) un bicondicional convirtiendo así a esta caracterización en una *definición semántica* de paradoja de la relevancia, la conclusión es inmediata: dado que R es relevante, (1)-(5) fórmulas relevantes según la modificación de (C2), y la unión de R con cualquiera de (1)-(5) no relevante, el conjunto de las fórmulas no paradójicas no es derivable en uno y el mismo sistema relevante S.

La conversión de (C2) en definición lleva aparejado inevitablemente el *relativismo esencial* de la relevancia, y es, entonces, comprensible que A&B declaren que (C2) no es condición necesaria y asuman que (1)-(5) son fórmulas paradójicas. Pero ¿en virtud de qué criterio son (1)-(5) paradójicas? La solución de A&B no es impecable, es incluso confusa, pero es ciertamente audaz: *en virtud del criterio sintáctico de relevancia.* A&B están de hecho utilizando una caracterización suplementaria de (C2) que podría rezar:

(C5) Si C.R $\cup$ {A} $\vdash$ B, y B es según (C2) una paradoja de la relevancia, entonces A es una paradoja de la relevancia.

2.2. *La insuficiencia de (Σ) en la definición semántica de relevancia*

Hemos visto en el subapartado anterior que hay fórmulas de forma condicional con comunidad de contenido entre antecedente y consecuente que son paradójicas. Sin embargo, mostramos a continuación con dos ejemplos que el carácter paradójico de estas fórmulas es, como cabe esperar, sólo relativo.

Sea I.A el *sistema de la implicación analítica* de Parry (*cfr.* Parry (1933), Urqhart (1973), A&B (1975), Loptson (1980) y Méndez (1984)). Parry demostró que si A$\rightarrow$B es tesis de I.A, todas las variables proposicionales de B aparecen también en A. Es inmediato que (Σ) es predicable de I.A, y, no obstante,

(6) $F(A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ ($F(A)$ es cualquier f.b.f en la que aparece A)

es tesis de I.A y, por consiguiente,

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$
(2) $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$

también, ya que son instancias de (6).

Obviamente, I.A no incluye a SM, pero observamos que tampoco está incluido en R. I.A es un sistema no trivial [8] que contiene a (1) y (2) sin consecuencias paradójicas porque (Σ) es propiedad del sistema.

Tomamos nuestro segundo ejemplo de Méndez (1985b). Allí hemos demostrado que incluso la *Ley de Peirce*

(5) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

es subsumible en un sistema ciertamente peculiar pero no trivial sin que ocasione consecuencias paradójicas pues el sistema cuenta con (Σ). De nuevo, este sistema no incluye a SM, pero, naturalmente, ni siquiera está incluido en la lógica intuicionista.

Estos dos ejemplos muestran, por un lado, que (1)-(5) y otras tesis semejantes no ocasionan *necesariamente* paradojas sino sólo relativamente a determinados sistemas; por otro lado, que hay (posiblemente infinitos)[9] sistemas de los que (Σ) es predicable y que ni incluyen a R ni están incluidos en él.

Si (Σ) es ahora condición suficiente para la relevancia (semántica), entonces cualquier sistema relevante S es in-

[8] Loptson (1980) ha llegado incluso a proponer I.A como la verdadera lógica de la implicación *(entailment)*, preferible al sistema E de A&B.

[9] Quizá bastaría, por ejemplo, construir una serie infinita de restricciones sobre $F(A) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (tomando, por ejemplo, el grado lógico de $F(A)$ para mostrar que hay infinitos subsistemas diferentes de I.A todos ellos no incluidos, por supuesto, en R.

completo o, mejor, *esencialmente incompleto* pues, por una parte, el conjunto de todas las tesis no paradójicas no es derivable en un mismo sistema S; por otra, hay (posiblemente infinitas) selecciones de ese conjunto de tesis. Entonces, el concepto de relevancia (semántica) caracterizado por (Σ) es *esencialmente relativo*. Por nuestra parte, nada malo, en principio, vemos en ello. Del mismo modo que no hay una lógica modal, sino infinitos sistemas de lógica modal que formalizan otras tantas concepciones de las nociones modales, no parece descabellado postular la relatividad de la lógica de la relevancia a las potencialmente infinitas concepciones que pueden proponerse siempre que todas ellas cuenten con el requisito mínimo (Σ). Pero esta postura relativista no está, por supuesto, de acuerdo con los deseos de A&B para quienes (Σ) es, por consiguiente, insuficiente.

Pero si (Σ) es insuficiente, es preciso seleccionar del conjunto de lógicas con la propiedad (Σ) *el* sistema de la relevancia. El criterio de selección es, como ya adelantamos en el subapartado anterior, la *caracterización sintáctica* de relevancia (S): R es *LA* lógica de la relevancia no porque cuente con (Σ) sino porque (S) es predicable de él. Pero dado que C.R es completo respecto de la caracterización sintáctica; es decir, dado que en el conjunto de las lógicas con la propiedad (Σ) C.R es la única con la propiedad (S), la caracterización sintáctica deviene la *única caracterización de la relevancia*, la *definición de la relevancia.*

De este modo, (Σ) se convierte en una propiedad meramente adicional y tan circunstancial como la propiedad de que en los teoremas de C.R ninguna variable aparezca una sola vez; porque, además, ambas propiedades son consecuencias de (S): obviamente, entre (S) y (Σ) no hay adecuación, pero todo sistema implicativo que cuente con (S) cuenta también con las otras dos propiedades.[10]

[10] Nos estamos refiriendo a sistemas *implicativos:* sistemas con $\rightarrow$ como única conectiva. Este resultado se sigue fácilmente de § 3.1.

Esta conclusión que, en el caso del fragmento implicativo de la lógica de la relevancia, equivale únicamente a establecer que se carece de una interpretación semántica intuitiva del concepto sintáctico de relevancia como uso, en el caso del sistema R equivale a algo peor. Dado que R_+ no es, como vimos, completo respecto de la caracterización sintáctica, no sólo el concepto de relevancia es puramente sintáctico, sino que es una mera *caracterización:* R_+ es un sistema de la relevancia, pero no *EL* sistema de la relevancia, como mostramos a continuación.

Sea R'_+ en todo igual a R_+ salvo que los axiomas para la conjunción (A5, A6 y A7) han sido sustituidos por

A14. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

y la regla de derivación *(simplificación):*

Si $\vdash A \wedge B$, entonces $\vdash A$ y $\vdash B$.

Se recordará que A14 añadida a R_+ hacía colapsar al sistema en uno paradójico (cfr. § 1.2). Pues bien, R'_+ se diferencia de R_+ en que A5 y A6 sólo valen como reglas de inferencia y en que A7 se sustituye por la fórmula A14, más potente.

Es claro que R'_+ es un sistema con la propiedad (S), y a continuación probamos que R'_+ también cuenta con (Σ).

El conjunto de matrices (1, 2 y 3 son *valores designados)*

$\rightarrow$	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	0	1	2	3
2	0	0	2	3
3	0	0	2	3

$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	2
3	0	3	2	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

verifica R'_+.[11] Sea ahora $A \rightarrow B$ una f.b.f en la que A y B no comparten ninguna variable proposicional. Asígnese a todas las variables de A el valor 2, a todas las de B el valor 1. Entonces, dado que $V(2 \rightarrow 2) = V(2 \wedge 2) = V(2 \vee 2) = 2$, tenemos $V(A) = 2$; como $V(1 \rightarrow 1) = V(1 \wedge 1) = V(1 \vee 1) = 1$, tenemos $V(B) = 1$. Pero $V(2 \rightarrow 1) = 0$, y, en consecuencia, $V(A \rightarrow B) = 0$. Por tanto, si A y B no comparten ninguna variable, $A \rightarrow B$ no es tesis de R'_+. Es decir, R'_+ cuenta con la propiedad (Σ). R'_+ es, en conclusión, un candidato para el fragmento positivo de la lógica de la relevancia tan legítimo como R_+.

Antes de terminar este apartado hacemos una última observación: si restringimos (Σ) a

(Σ') En toda tesis de S de la forma $A \rightarrow B$ no aparece ninguna variable una sola vez y, además, A y B comparten al menos una variable,

todas las conclusiones de este apartado permanecen inalteradas.[12]

Considérese la fórmula

(7) $A \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow A)$

En ella, antecedente y consecuente comparten una variable y ninguna variable aparece una sola vez. Y sin embargo, es evidente que añadida a SM convierte al sistema resultante en uno paradójico porque

(8) $(B \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$

es un teorema inmediato.

[11] Es decir, los axiomas de R'_+ toman *valores designados* para cualquier combinación de valores asignada a sus variables proposicionales, y las reglas de derivación preservan esta propiedad.

[12] Obsérvese que (Σ) y (Σ') son propiedades *diferentes*.

3. La caracterización sintáctica de la relevancia

3.1 *Una suposición contra-intuitiva en (C4)*[12b]

En § 2.1 hemos estado considerando fórmulas que no son, según (C2), paradojas de la relevancia pero que añadidas a C.R ocasionan sistemas paradójicos. Hemos convenido en que aunque carecemos de argumentos semánticos para ello, estas fórmulas pueden rechazarse porque no son relevantes en el sentido sintáctico de (C4). Pero ¿en qué podemos fundamentar el rechazo de

(9) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$

que no es tesis de R? ¿Por qué (9) no es tesis de R? El presente subapartado se dedica a responder a esta pregunta.

A diferencia de (1)-(5) de § 2.1, es conocido *(cfr.* A&B (1975) § 8.15) que la adición de (9) a C.R no ocasiona un sistema paradójico. Si C.R en unión de (9) es un sistema con la propiedad (Σ), es, entonces, claro que (9) no es sintácticamente aceptable. ¿Por qué?

Volvamos de nuevo a la caracterización sintáctica (C4). Supóngase que concordamos con A&B en que el uso de la premisa en la derivación de la conclusión determina la relevancia de aquélla para ésta. En este caso, parece ser (C4) el exacto reflejo formal de tal concepto intuitivo. Sin embargo, en (C4) se presupone una violentación tal del concepto intuitivo de "uso" que, a la postre, hace de (C4) una caracterización contradictoria con el propio concepto intuitivo de relevancia formalizado en (C4).

La presuposición a la que nos referimos puede expresarse de manera general como sigue. Sean $A_1, \ldots, A_n$ cualesquiera f.b.f; sea $A_i = A_k$. Entonces, $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ no

[12b] La argumentación de esta sección y la siguiente es un desarrollo de Méndez (1986).

es demostrable en R si todas las premisas salvo A_k se usan para probar B. Dicho con otras palabras, en (C4) se exige no meramente que se usen *todas* las premisas sino *cada* aparición de *cada* premisa.

Ésta es la razón de que (9) no sea demostrable: en la derivación de la conclusión sólo se utiliza *una* de las dos apariciones de A, no ambas. Pero (9) es sólo un caso especial; con mayor generalidad, lo que ocurre en R es que la *reiteración de premisas* no es universalmente válida, y así por ejemplo,

(10) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B))$
(11) $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$

que son fórmulas equivalentes a (9) respecto de SM *(cfr.* Méndez (1986a)) tampoco son derivables.

Ahora bien, concedemos que la reiteración de premisas es siempre un procedimiento inelegantemente redundante; también que las más de las veces es una maniobra inútil, pero poco es preciso insistir en que desde el punto de vista de la relevancia (y sobre todo si entendemos "relevancia" en el sentido de A&B) es una estrategia inobjetable. Además, no podemos negar su validez sin originar una contradicción con el propio concepto de relevancia formalizado en (C4). Veámoslo. Si $A \rightarrow B$ es teorema de C.R, entonces A se *usa* para probar B *(A es relevante para B)*, pues C.R es sintácticamente completo. Pero si $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ no es teorema, y dado que $A \rightarrow B$ lo es, entonces A no es relevante para $A \rightarrow B$, de donde *A no es relevante para B*. Por consiguiente, A es y no es relevante para B. No obstante, hay un modo de disolver la contradicción. El argumento dice que cuando una misma premisa A es y no es relevante para una conclusión B estamos en realidad hablando de dos premisas diferentes. Por ejemplo,en $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ del párrafo anterior la primera aparición de A no se usa para probar B y no es relevante para B, la segunda sí. Pero argumentar así es defender que, a efectos de deducción, las distintas apariciones de A son otras tantas premisas *diferentes* en una misma derivación dada. Y esto, a su vez, equivale a que el significado de una premisa A es función de la posición de A en la secuencia de premisas que preceden implicativamente a una conclusión B: en $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ la segunda aparición de A tiene contenido semántico común con B, la primera no.

La disolución de la contradicción es, pues, intuitivamente inaceptable: si exigimos que se use *cada* aparición de *cada* premisa, entonces o bien admitimos que una misma premisa A se usa y no se usa en una derivación o bien asumimos que A designa diferentes premisas en esa misma derivación. Se sigue, por consiguiente, que si concebimos la relevancia (sintáctica) como uso, no es (C4) el criterio que refleja formalmente tal concepción; se sigue también que la reiteración de premisas ha de ser universalmente válida según el nuevo criterio. Pues bien, este criterio es la modificación de (C4) que sigue.

(C4′) Sea $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un conjunto de f.b.f. Entonces, $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ es teorema de la lógica de la relevancia si para toda $A_i \varepsilon \Gamma$ $(1 \leq i \leq n)$, A_i se usa para probar B.

En (C4′) exigimos que se usen *todas* las premisas, pero no necesariamente *cada* aparición de *cada* premisa, tal y como se requería. De acuerdo con (C4′), es claro que (9), (10) y (11) son teoremas y que, en general, la reiteración de premisas

(12) $A \rightarrow (\ldots \rightarrow (A \rightarrow A) \ldots)$

es válida. Es, por tanto (C4′) (y no (C4)) la traducción formal adecuada de la concepción de la relevancia como uso. Es, entonces, (S′) (y no (S)) la condición necesaria de relevancia sintáctica: Para cualquier sistema de la relevancia S se cumple

(S′) En toda tesis de S de la forma $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ cada $A_i \varepsilon \Gamma$ $(1 \leq i \leq n)$ se usa para probar B, donde $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$.

El sistema axiomático[13] $C.R^+$ deductivamente equivalente a la restricción del sistema de deducción natural clásico que surge de (C4′) se formula añadiendo (9), (10) u (11)) a C.R como el lector puede probar fácilmente utilizando los métodos de A&B (1962) para demostrar la equivalencia de C.R con el sistema que proviene de (C4). Más aún, $C.R^+$ es completo respecto de la modificación formalizada en (S′): $A_1 \rightarrow (\ldots \rightarrow (A_n \rightarrow B) \ldots)$ es teorema SSI cada $A_i \varepsilon \Gamma$ $(1 \leq i \leq n)$, $(\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\})$ se usa para probar B, como se comprueba utilizando los mismos métodos.

Estamos ahora en condiciones de establecer la conclusión objeto principal del presente apartado. En § 2.2 hemos comprobado que el concepto de relevancia de A&B es estrictamente sintáctico y, además, una mera caracterización. Podemos ahora afirmar que dicha caracterización ni siquiera traduce adecuadamente sus propias ideas intuitivas sobre la relevancia como uso. De acuerdo con ellas, es $C.R^+$ (y no C.R) el verdadero fragmento implicativo de la lógica de la relevancia.

3.2 *La semántica de la relevancia*

La semántica de la relevancia es, en esencia, atribuible a Urqhart (1972) y Routley y Meyer (1973). En su indis-

[13] El subíndice + indica referencia al *fragmento positivo* (fragmento sin negación) Méndez (1986) de un sistema dado; el superíndice + indica referencia a una extensión de ese sistema. Así por ejemplo, R_+ es el fragmento positivo de R; $C.R^+$ una extensión de C.R.

pensable artículo de 1972, Urqhart demuestra que C.R es completo respecto de lo que aquí llamaremos *estructuras Urqhart.* Pero argumenta, a nuestro entender, que el concepto de negación formalizado en R es incoherente, por lo que renuncia a dar una semántica para el sistema R completo.[14] Routley y Meyer, en cambio, proporcionan una semántica respecto de la que R es completo. La semántica de Routley y Meyer es poco accesible intuitivamente, pero éste no es su peor defecto. Copeland (1979) ha demostrado, desarrollando los argumentos de Urqhart (1972) que dicha semántica no es digna de tal nombre y es una mera "modelización". En particular ha mostrado que la negación de R carece, en la semántica de Routley y Meyer, de significado. Suscribimos totalmente tanto los argumentos como las conclusiones de Copeland, pero nosotros iríamos más lejos. Si $C.R^+$ (y no C.R) es el verdadero fragmento de la lógica de la relevancia, entonces no sólo la negación de R carece de significado, sino también el mismo condicional de R. En este sentido, mostramos en el presente subapartado que la semántica para C.R es sólo una modelización de (S) y, en consecuencia, tan incoherente intuitivamente como esta caracterización. Para ello, vamos a utilizar la semántica de Urqhart (1972) isomórfica con la de Routley y Meyer en cuanto concierne al fragmento implicativo C.R de R.

Decimos que

$$U = \langle C, \emptyset, \oplus, V \rangle$$

es una *estructura Urqhart* si: $\emptyset \in C$; $\oplus$ es una operación binaria definida en C que es asociativa, conmutativa e idem-

[14] Urqhart (1984) reniega ahora de su argumentación: "*I confess here to and old antipathy* (now abandoned) *to the Routley-Meyer semantics*" (p. 436, el subrayado es nuestro). El motivo de su cambio de postura son los modelos de R por él descubiertos en la geometría proyectiva: Urqhart (1984) sucumbe sin remisión a Urqhart (1972).

potente con $\emptyset$ como elemento neutro; por último, V es una función tal que

a) Para toda variable proposicional P_i y $X \varepsilon C$, $V(P_i, X) = 1$ o bien $V(P_i, X) = 0$, pero no ambas.

b) Para cualesquiera f.b.f A, B y $X \varepsilon C$, $V(A \rightarrow B, X) = 1$ ssi para todo $Y \varepsilon C$, $V(A, Y) = 0$ o bien $V(B, X \oplus Y) = 1$.

Una fórmula A es válida si $V(A, \emptyset) = 1$.

Desde el punto de vista intuitivo, C es un conjunto de *unidades de información (pieces of information)* donde por "unidad de información" entendemos un conjunto de enunciados "básicos" sobre un tema o temas cualesquiera; $\emptyset$ es la unidad de información vacía; $\oplus$ es la suma o unión de unidades de información, y V es una función de verdad que asigna el valor 1 o el valor 0 a cada f.b.f según cada unidad de información y cada suma de ellas.

Hacemos notar que en la semántica de Urqhart puede darse $V(A, X) = 1$ y $V(A, X \oplus Y) = 0$. En este caso, se debe entender que Y no es una unidad de información relevante para A (*cfr.* Urqhart (1972, p. 160)); por tanto, $X \oplus Y$ tampoco lo es, y entonces, $V(A, X \oplus Y) = 0$.

Como ya adelantamos, Urqhart demuestra que C.R es completo respecto de esta semántica. Es, por consiguiente, inmediato que (9), (10) y (11) son falsas. Veamos por qué. Tomemos la fórmula (9) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$. El lector puede fácilmente comprobar que (9) es falsa sólo si $V(A, X) = 1$, $V(A, Y) = 1$ y $V(A, X \oplus Y) = 0$ para algunos $X, Y \varepsilon C$. Pero esta situación es compatible con la semántica de Urqhart, y en consecuencia (9) es falsa. Situaciones equivalentes demuestran la falsedad de (10) y (11), y, en general, del principio de reiteración de premisas.

Ahora bien, como hacíamos notar más arriba, si A es verdadera según una unidad de información dada X, A sólo puede ser falsa según la suma de X y otra unidad cualquiera Y cuando ésta no es relevante para A; porque si Y es relevante para A y $V(A, Y) = 0$, cualquier concepto intuitivo de "suma de unidades de información" al que podamos apelar nos obliga a aceptar $V(A, X \oplus Y) = 1$. De esto se sigue que si X y Y son relevantes para A y $V(A, X) = 1$ o bien $V(A, Y) = 1$, necesariamente hemos de concluir $V(A, X \oplus Y) = 1$.

Examinada a esta luz, la situación que falsaba (9) es injustificable. Si $V(A, X) = V(A, Y) = 1$, entonces X y Y son relevantes para A y, en consecuencia, $X \oplus Y$ también, de donde $V(A, X \oplus Y) = 1$, dado que $V(A, X) = V(A, Y) = 1$. Por otro lado, si $V(A, X) = 1$ y $V(A, X \oplus Y) = 0$, entonces Y no es relevante para A, de donde $V(A, Y) = 0$. Es, en conclusión, imposible intuitivamente una situación en la que $V(A, X) = V(A, Y) = 1$ y $V(A, X \oplus Y) = 0$.

Vemos, pues, que igual que (C4) era contradictorio con el concepto intuitivo de relevancia como uso, la semántica de Urqhart también lo es respecto al concepto intuitivo de relevancia como información pertinente. Era, además, inevitable que lo fuera. Si C.R es completo respecto del concepto de uso formalizado en (C4) y también completo respecto de la semántica de Urqhart, ésta ha de ser una modelización de aquél. Si una misma premisa A se usa y no se usa para probar B, la explicación semántica de hecho tan peculiar ha de ser necesariamente que A es verdadera y no lo es respecto de la misma unidad de información X como efectivamente se sigue de la situación que falsa (9): si $V(A, X \oplus Y) = 0$ y $V(A, X) = 1$, entonces $V(A, Y) = 0$. Pero en dicha situación $V(A, Y) = 1$.

Paralelamente a lo que ocurría con (S), se impone obviamente una modificación de la semántica anterior que haga imposibles situaciones como la que hemos venido comentando. La modificación requerida consiste en añadir la cláusula

c) Para cualesquiera X, YεC y f.b.f A, si V(A, X) = 1 y V(A, Y) = 1, entonces V(A, X$\oplus$Y) = 1.

a la semántica de Urqhart. Es obvio que ahora (9), (10) y (11) son válidas así como el principio general de reiteración de premisas (12). Pero lo más interesante es que C.R$^+$ es completo respecto de esta extensión de la semántica de Urqhart como el lector puede comprobar modificando trivialmente la prueba de completud para C.R de Urqhart (1972).

Así como C.R$^+$ es la adecuada formalización del concepto de relevancia como uso, la extensión de la semántica de Urqhart nos proporciona una semántica intuitivamente aceptable que interpreta "uso" como información pertinente.

4. La crítica de Anderson y Belnap a *R-Mingle*

4.1 *La crítica de Anderson y Belnap a* R-Mingle

Como se sabe, *R-Mingle*[15] es el resultado de añadir A5-A13 y *adjunción* a C.R$^+$ (*cfr.* A&B (1975)). Dado que C.R$^+$ es un sistema relevante, y visto que optar por C.R como fragmento implicativo de la lógica de la relevancia equivale a entrar en contradicción con el propio concepto intuitivo de relevancia, A&B han de tener poderosas razones para negar que C.R$^+$, en lugar de C.R, sea dicho fragmento. A&B, en efecto, las tienen: *R-Mingle* es un sistema paradójico porque una de sus tesis es

$$\neg(A\rightarrow A)\rightarrow(B\rightarrow B)$$

[15] C.R$^+$ no es, sin embargo, el fragmento implicativo de *R-Mingle*. *Cfr.* A&B (1975, p. 98)

y en ella antecedente y consecuente no tienen ninguna variable en común (*cfr.* A&B (1975) § 29.5). Por consiguiente si $C.R^+$ es el fragmento implicativo de la lógica de la relevancia, ésta, en realidad, *no existe* porque $C.R^+$ no puede extenderse relevantemente con las funciones de verdad.

Es en este marco donde hay que encuadrar el hecho de que A&B entren en contradicción con sus propios principios eligiendo C.R. Al igual que rechazan (Σ) como condición suficiente de relevancia porque, de hacerlo, habría que asumir el relativismo de la relevancia, y optan así por construir C.R de acuerdo con (C4); del mismo modo que se deciden por R_+ como fragmento positivo de la lógica de la relevancia (a pesar de que sólo es un fragmento más) y sin otras razones que su mayor intuitividad o el hecho de que haya sido modalizado por Routley y Meyer, así también A&B, puesto que $C.R^+$ no puede extenderse con las funciones de verdad, escogen un subsistema de él que sí lo sea. Este subsistema es C.R.

El éxito de C.R (y de R) en la literatura es ya historia, y, por cierto, difícilmente cuestionable: C.R y R son sistemas considerablemente potentes, matemáticamente muy accesibles y formalmente muy interesantes.[16] Y, en este sentido, quizá no sea impertinente recordar que ya Church (1951) definió C.R cinco años antes del nacimiento oficial de la lógica de la relevancia, y por puras razones formales muy alejadas de las que impulsaron después el redescubrimiento del sistema. No es, pues, extraño que R haya atraído el interés de los investigadores, pero hay, creemos, que replantear los motivos: el sistema merece, indudablemente, atención pero no en calidad de lógica de la relevancia; no, ni siquiera, como subsistema de la lógica de la relevancia, pues no lo es, como veremos inmediatamente.

[16] *Cfr.* a este respecto los últimos modelos en geometría proyectiva proporcionados por Urqhart (1984).

4.2. *Una réplica a la crítica de Anderson y Belnap a* R-Mingle

Comenzamos con una observación. Si la crítica de A&B a *R-Mingle* no admite réplica, se sigue una conclusión poco halagüeña para la empresa de la relevancia. En pocas palabras, la conclusión es que la lógica de la relevancia no existe porque, de hecho, C.R$^+$ es *el* fragmento implicativo de la lógica de la relevancia, y C.R$^+$ no puede extenderse con las funciones de verdad. Afortunadamente para A&B hay respuestas adecuadas a su propia crítica como comprobamos de inmediato.

El argumento de A&B descansa claramente en el supuesto de que es *ineludible suplementar C.R$^+$ con A5-A13 y adjunción como axiomas funcionales de verdad.* ¿Es esto así? En nuestra opinión, no. De acuerdo con la propia declaración programática de A&B (1975, p. 3)

> *we take the heart of logic to lie in the notion "if. . ., then"*

primero se construye el "condicional" del caso, después se estudia con qué conceptos (axiomas) de conjunción, disyunción y negación es compatible dicho condicional. Es decir, una vez definido el condicional, se comprueba qué conceptos de conjunción, disyunción y negación determina. Trasladar a C.R$^+$ los axiomas funcionales de verdad de R es tan injustificable como añadir a C.R los axiomas funcionales de verdad de, por ejemplo, S3. En ambos casos, se originan paradojas de la relevancia, lo cual no es sorprendente porque un sistema implicativo dado no es necesariamente compatible con los axiomas funcionales de verdad de otro. Es, entonces, el sistema implicativo el que determina los axiomas funcionales de verdad, no a la inversa. Pero es así sobre todo en el caso de sistemas con los que se pretende formalizar un determinado concepto de condicional: el condicional relevante, la implicación (*entailment*), etcétera.

A diferencia de Lewis o Parry que definieron la implicación estricta y la implicación analítica respectivamente en relación inextricada con las funciones de verdad, hoy contamos con las técnicas adecuadas para partir del fragmento implicativo en la definición de un sistema formal que pretende representar un determinado concepto de condicional.

Pero, además, la suposición de que $C.R^+$ ha de suplementarse necesariamente con los axiomas funcionales de verdad de R se hace más intolerable cuando éstos se justifican porque son los de E (lógica de la implicación (*entailment*)):

> *The idea for defining* [. . .] *R* [. . .] *is simple-minded: just add the truth-functional axioms of E to the already discussed pure implicational system* $R\rightarrow$ [*C.R*] . . . (1975, p. 339).

Por último, no se entiende por qué A5-A13 y *adjunción* son necesariamente los axiomas funcionales de verdad para $C.R^+$ cuando ni siquiera son necesariamente los de C.R, pues como vimos en § 2.2, el fragmento positivo de la lógica de la relevancia no es completo respecto del concepto de relevancia como uso.[17]

En conclusión, puesto que $C.R^+$ es completo respecto del concepto de relevancia como uso, lo que hay que preguntarse inmediatamente es ¿puede $C.R^+$ extenderse con axiomas funcionales de verdad sin que el resultado sea paradójico?

[17] En relación con la incompletud de R señalamos que en la semántica de Urqhart (1972), la fórmula $((A\rightarrow(B\vee C))\wedge(B\rightarrow D))\rightarrow(A\rightarrow((D\vee C))$ es válida aunque no es tesis de R. Consecuentemente, Urqhart sólo da una semántica para el fragmento implicativo de R (1972, p. 163).

4.3 *Hacia los sistemas R^+ de la lógica de la relevancia*

La respuesta a la pregunta con la que finalizábamos el apartado anterior es afirmativa. La estrategia para demostrar que lo es, es doble. Puesto que *R-Mingle* es paradójico, pero su fragmento positivo y en $\rightarrow$, $\neg$ no (*cfr.* A&B (1975) § 8.15, § 29.3), o bien podemos estudiar qué concepto de negación es compatible con el fragmento positivo de *R-Mingle,* o bien qué conceptos de conjunción y disyunción con el fragmento en $\rightarrow, \neg$. Obsérvese que, en todo caso, el resultado no será *LA* lógica de la relevancia, sino tales o cuales lógicas de la relevancia. Y esto no debe sorprender porque aunque C.R^+ no es completo respecto del concepto de relevancia como uso, *no hay sistema completo respecto de este concepto* porque ya el conjunto de tesis en $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ no es axiomatizable relevantemente como vimos en § 1.2, 2.2. Pues bien, la segunda opción ha sido desarrollada brillantemente por Arnon Avron (1984). Avron demuestra que el fragmento en $\rightarrow, \neg$ (con $\vee$ definida) puede explicarse con una semántica polivalente perfectamente acorde con nuestras ideas intuitivas sobre la relevancia. Demuestra también que si al sistema se le añaden A5 y A6 (A7 sólo vale como regla de inferencia), el resultado es todavía relevante y explicable con la misma semántica.

La segunda opción ha sido desarrollada por nosotros (*cfr.* Méndez (1983)). En nuestro trabajo hemos mostrado que el fragmento positivo de *R-Mingle* es compatible con conceptos de negación equivalentes o similares al del sistema de Parry (*cfr.* Parry (1933), Urqhart (1973), Loptson (1980) y Méndez (1984)). Por ejemplo, se pueden añadir relevantemente los axiomas

A15. $A \rightarrow \neg\neg A$
A16. $\neg\neg A \rightarrow A$
A17. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$

A18. $(\neg A \to A) \to A$

La prueba es como sigue. El conjunto de matrices (1, 2 y 3 son valores designados)

$\to$	0	1	2	3	$\wedge$	0	1	2	3	$\vee$	0	1	2	3		$\neg$
0	3	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	3
1	0	1	2	3	1	0	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1
2	0	0	2	3	2	0	1	2	2	2	2	2	2	3	2	2
3	0	0	2	3	3	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0

verifica el fragmento positivo de *R-Mingle* y A15-A18. Observando que $V(1 \to 1) = V(1 \wedge 1) = V(1 \vee 1) = V(\neg 1) = 1$, y $V(2 \to 2) = V(2 \wedge 2) = V(2 \vee 2) = V(\neg 2) = 2$, si $A \to B$ es una fórmula en la que A y B no tienen variables en común, basta asignar 2 a todas las variables de A y 1 a todas las de B para tener $V(A \to B) = 0$. El sistema no es, pues, paradójico.

Antes de concluir este trabajo con una conjetura, recapitulamos brevemente los resultados a los que hemos llegado en él. En primer lugar, hacemos notar que no hemos discutido si los conceptos intuitivos de relevancia como uso, y como comunidad de contenido semántico son o no plausibles. Nuestros propósitos han sido, como se recordará, darlos por supuestos, discutir sus respectivas traducciones formales y la adecuación del sistema R a ellos. En este sentido nos parece que hemos establecido suficientemente los siguientes hechos. En primer lugar, el concepto de relevancia de A&B es meramente sintáctico; la caracterización semántica de la relevancia es sólo una consecuencia. En segundo lugar, este concepto es una mera caracterización, no una definición: en contra de los profundos deseos de A&B la relevancia entendida como uso es un concepto *esencialmente relativo*. En tercer lugar, C.R (y R) no es el sistema que traduce formalmente esta caracterización; la semántica de la relevancia es una prueba más a favor de este aserto. En cuarto lugar, la verdadera traducción formal del concepto de relevancia de A&B es, en su parte implicativa, C.R^+. Este sistema puede extenderse relevantemente con axiomas funcionales de verdad de manera diversa: el concepto de relevancia como uso es relativo y diversos sistemas son conformes a él. En todo caso, todos estos sistemas R^+ son *las lógicas de la relevancia,* no el sistema R si entendemos relevancia como uso. Todas estas lógicas y R son sistemas independientes: ni incluyen a R ni están incluidas en él.[18]

Por último, agregamos que si con base en que el concepto de relevancia como uso sólo es relativamente axiomatizable, alguien quiere concluir la irrelevancia de la lógica de la relevancia, confesamos que en principio no tenemos nada que objetar.

Proponemos ya nuestra conjetura. Algún lector que no haya derivado la irrelevancia de la relevancia en vista de su relatividad puede ahora hacerlo en razón de la debilidad de la $\wedge$, $\vee$ en el sistema de Avron y de la $\neg$ en el nuestro. Puede incluso concluir que la maniobra de A&B en favor de R está justificada: al fin y al cabo R es un sistema relevante más, con la ventaja de su nítida estructura formal. A la segunda conclusión hemos respondido ya a lo largo del presente trabajo, pero recordamos que, aunque no hay ninguna lógica con las conectivas $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ completa respecto de "relevancia como uso", *sí la hay cuando la única conectiva es* $\rightarrow$.[19] A la primera conclusión poco podemos replicar si no es aduciendo el ilustre ejemplo del sistema de Parry (tantas veces citado en este trabajo) en el que la $\wedge$, $\vee$ son tan débiles como en el sistema de Avron y la $\neg$ tan débil como en el nuestro. Pero una respuesta definitiva sería la

[18] R no los incluye porque $A\rightarrow(A\rightarrow A)$ no es teorema de R; los sistemas R^+ no incluyen a R porque hay que restringir los axiomas funcionales de verdad de R.

[19] R no es un subsistema de la lógica de la relevancia.

verificación de la conjetura que sigue.[20] En Méndez (1985a) hemos demostrado que, salvo ciertas excepciones, los *sistemas con la conversa de la Propiedad Ackermann* no son compatibles con los axiomas en negación de R, pero sí con cualquiera de los dos conjuntos siguientes:

(a) A19. $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$
    A20. $A \to \neg\neg A$
(b) A21. $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
    A22. $(A \to \neg A) \to \neg A$

Pues bien, si añadimos A19 y A20 al fragmento positivo de *R-Mingle* el resultado es ciertamente paradójico porque

$$\neg(A \to A) \to (B \to B)$$

es, como el lector puede comprobar, derivable con el fragmento positivo y

$$(\neg A \to \neg A) \to (A \to A), (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$

y estas dos fórmulas son derivables con el fragmento positivo y A19-A20 como también puede comprobar el lector. La conjetura es, entonces, que si añadimos A21 y A22 el resultado no es paradójico. Tomamos como índice de su verdad el hecho de que, a pesar de que

$$(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$

sería derivable,

$$(\neg A \to \neg A) \to (A \to A), \ \neg(A \to A) \to (B \to B)$$

[20] El concepto de negación sería tan potente como en los sistemas con la conversa de la propiedad Ackermann.

no lo serían. La prueba es como sigue. Si en el conjunto de matrices de este mismo apartado cambiamos la matriz de la $\neg$ por

$$\begin{array}{c|cccc} \neg & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

se verifica el fragmento positivo de *R-Mingle* y A21, A22 pero las dos fórmulas arriba mencionadas se falsan.

REFERENCIAS

Ackermann, W. (1956) "Begründung einer Strengen Implication", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 21, pp. 113-128.

Anderson, A. R. y Belnap, N. D., Jr. (1962) "The pure calculus of entailment", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 27, pp. 19-52. (1975) *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. 1. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

Avron, A. (1984) "Relevant Entailment-Semantics and formal systems", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 49, pp. 334-342.

Belnap, N. D., Jr. (1980) "Modal and Relevance Logics: 1977", en E. Agazzi (ed.): *Modern Logic: A survey*, pp. 131-151. D. Reidel, Boston.

———, y Dunn, J. M. (1981) "Entailment and the disjunctive syllogism", en *Contemporary Philosophy. A New Survey*, vol. 1, pp. 337-66. G. Floistad, M. Nijhoff eds., The Hague.

Burgess, J. P. (1981) "Relevance: A Fallacy?", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 22, pp. 97-104. (1983) "Common sense and Relevance", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 24, pp. 41-53. (1984) "Read on Relevance: A Rejoinder", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 25, pp. 217-23.

Church, A. (1951) "The weak theory of implication", *Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und der Logik der Einzelwissenschaften*, Menne, Wilhelmy, Angsil (ed.), München, pp. 22-37.

Copeland, B. J. (1979) "On when a semantics is not a semantics: some reasons for disliking the Routley-Meyer semantics for Relevance Logics", *The Journal of Philosophical Logic*, vol. 8, pp. 399-413.

Curley, E. M. (1975) "The development of Lewis' theory of strict implication", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 8, pp. 517-27.

García Noriega, B. y Méndez, J. M. (1985) "Cálculo automático de matrices para sistemas implicativos", *Actas del I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía* (de próxima aparición).

Hacking, I. (1963) "What is strict implication", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 28, pp. 51-71.

Lemmon, E. J. (1956) "Alternative postulate sets for Lewis' S5", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 22, pp. 347-9. (1957) "New Foundations for Lewis Modal Systems", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 22, pp. 186-96.

Lewis, C. I. y Langford, C. H. (1932) *Symbolic Logic,* Dover, N. Y. (2a. edic. 1959).

Loptson, P. J. (1980) "Q, entailment and the Parry property", *Logique et Analyse,* vol. 90-91, pp. 305-17.

Méndez, J. M. (1982) "Un teorema sobre la axiomatización de C.W.", en *Estudios de Lógica y Filosofía de la Ciencia,* compilado por M. A. Quintanilla, ediciones de la Univ. de Salamanca, Salamanca. (1983) *Restricciones implicativas de la Lógica clásica,* Tesis doctoral, Salamanca. (1984) "El sistema de la implicación analítica de Parry y un nuevo sistema de la implicación", en *Análisis y Síntesis,* editado por J. P. Ballestar, ediciones de la Univ. de Salamanca, Salamanca. (1985a) "Systems with the Converse Ackermann Property", *Theoria-Segunda Época,* vol. 1, pp. 253-8. (1985b) "La Ley de Peirce y el espectro implicativo clásico: tres observaciones y dos problemas", en *Actas del I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía* (de próxima aparición). (1986a) "El espectro implicativo clásico: primera aproximación", *Actas del IV Congrés Catalá de Lógica* (Barcelona, 23 y 24 de febrero de 1985). (1986b) "Una suposición contraintuitiva en la lógica de la relevancia de Anderson y Belnap", en *Actas del III Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias* (Gijón, 23-28 septiembre de 1985).

Morado, R. (1984) *¿Hay rivales para la Lógica clásica? El caso de las Lógicas Relevantes y las Lógicas Libres,* Tesis, UNAM, México, D. F.

Mortensen, C. (1983) "The validity of Disjunctive Syllogism is not so easily proved", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 24, pp. 35-40.

Orayen, R. (1983a) "Deducibility implies Relevance? A Negative Answer (I)", *Crítica,* vol. 15, nº 43, pp. 3-25. (1983b) "Deducibility implies Relevance? A Negative Answer (II)", *Crítica,* vol. 15, nº 44, pp. 3-25. (1985) "Una evaluación de las críticas relevantistas a la lógica clásica", *Actas del I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía* (de próxima aparición).

Parry, W. T. (1933) "Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (Analytische implication)", *Ergebnisse eines mathematisches Kolloquiums,* vol. IV, pp. 5-6.

Read, S. (1983) "Burgess on Relevance: A fallacy indeed", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* vol. 24, pp. 473-81.

Routley, R. y Meyer, R. K. (1973) "The Semantics of Entailment

(I)", en *Truth, Syntax and Modality, H. Leblanc* (ed.) Amsterdam, pp. 199-243.
Sánchez Pozos, J. (1978) "Deducción lógica, contenido semántico y formas normales relevantes", Comunicación Interna nº 60 Depto. de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM, México. (1980) "Semánticas Intuitivas", Reporte 18 del Depto. de Filosofía de la Univ. Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.
Urqhart, A. (1972) "Semantics for relevant logics", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 357, pp. 159-69. (1973) "A semantical theory of Analytic Implication", *The Journal of Philosophical Logic*, vol. 2, pp. 212-9. (1984) "Relevant implication and Projective Geometry", *Logique et Analyse*, Junio 1984, pp. 345-57.

S U M M A R Y

In this paper we propose a so-called "immanent criticism" of classical relevance logic R. We label this criticism "immanent" in the sense that Anderson and Belnap's syntactical and semantical intuitive concepts of relevance are not put under question. Instead, we examine the formal translations of these intuitive concepts and, in particular, the adequacy of system R to them. We prove that Anderson and Belnap's concept of relevance is merely syntactic; further, we show that this concept is only a *characterization*, not a *definition:* relevance logic is *essentially* a *relative* matter. Finally, it is shown that system R is not adequate to this syntactical characterization and some other systems (*adequate*) are delineated.

[*J. M.*]