DOS PROBLEMAS EN LA DOCTRINA DE FREGE

THOMAS M. SIMPSON
Consejo Investigación Científica
Buenos Aires

Los problemas que se examinan a continuación pertenecen a las dos vertientes de la obra de Frege: el de la lógica matemática y el del análisis semántico. En I se señalan las dificultades que se oponen a una interpretación unívoca del concepto de "rango de valores" (*Wertverlauf*) de una función, concepto que desempeña un papel básico en la definición fregeana de Número natural. El examen de algunas propuestas de interpretación, y en particular el análisis de la función $\cap$, permiten poner de relieve el carácter peculiar de las nociones fregeanas. II se ocupa de la teoría de las oraciones declarativas como nombres propios de los valores de verdad, y muestra que infinitas entidades satisfacen los requerimientos formales impuestos por Frege a los *denotata* de las oraciones.

I

El concepto de "rango de valores" de una función (*Wertverlauf*, en el original alemán; *value range* o *course of values*, según una u otra versión inglesa) está lejos de ser claro en los textos de Frege, a pesar del papel fundamental que desempeña en su sistema. Conviene advertir desde ya que la expresión misma "rango de valores", que adoptaremos aquí, es en realidad algo infortunada (al menos en relación con la actual terminología sobre funciones) porque sugiere engañosamente la identificación del *Wertverlauf* con el codomonio de la función, integrado por los valores que ésta hace corresponder a sus argumentos.

En el tomo I de *Grundgesetze der Arithmetik* (§3) estas entidades son introducidas de manera escueta: "Uso de las palabras 'la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo rango de valores que la función $\Psi(\xi)$' para denotar lo mismo que con las palabras 'las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen los mismos valores para los mismos argumentos'".[1] De este modo establece Frege el criterio de identidad que deben satisfacer los recién presentados *Wertverläufe*. Simbolizando con $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ y $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ respectivamente (de acuerdo con la notación fregeana) los rangos de valores de $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$, esta condición de identidad queda expresada por la fórmula:

$$(1)\quad (x)\,(\Phi(x) = \Psi(x)) \equiv (\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha))$$

que constituye la Ley Básica V del sistema del *Grundgesetze*.

En rigor, la Ley Básica V contiene el signo de identidad y no el de equivalencia proposicional. Este hecho se debe a la particular concepción fregeana según la cual las oraciones declarativas son nombres de la Verdad y de la Falsedad, objetos lógicos denotados respectivamente por las oraciones verdaderas y las falsas. Con la identidad en lugar de la equivalencia, la Ley Básica V establece que "$(x)\ (\Phi(x) = \Psi(x))$" denota el mismo valor de verdad que "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$", ya sea éste la Verdad o la Falsedad. Pero esto mismo es lo establecido en términos más familiares por la equivalencia (1), que dice simplemente: los rangos de valores de $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ son idénticos si y sólo si estas funciones tienen los mismos valores para los mismos argumentos. En homenaje a estas formas más habituales de expresión, seguiremos identificando la Ley Básica V con la equivalencia (1), mientras ello no afecte la inteligibilidad de nuestro tema.

¿Qué es un rango de valores? B. V. Birjukov[2] sostiene que, si bien Frege no ofrece una definición directa de *Wert-*

[1] La cita corresponde a la versión inglesa de Montgomery Furth, *The Basic Laws of Arithmetic*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles California, 1964, p. 36.

[2] R. V. Birjukov, *Two Soviet Studies on Frege* (Translated and edited by Ignacio Angelelli), Dordrecht, Holland, D. Reidel Publishing Company, 1964.

verlauf, "es evidente [...] que es lo que usualmente se denomina la gráfica de la función, o sea cierto conjunto de cuplas cuyo primer miembro es un posible argumento y cuyo segundo miembro es el valor de la función para ese argumento" (p. 19); y agrega que tal interpretación "se sigue, por ejemplo, de las explicaciones dadas por Frege en su artículo 'Function und Begriff' " (p. 19). Esta afirmación constituye el blanco de un comentario negativo de Angelelli, quien observa que en "Funktion und Begriff" la representación gráfica es considerada una mera imagen intuitiva.[3] Frege, en efecto, habla allí de la representación gráfica como de "un medio de representar intuitivamente los valores de una función para diferentes argumentos".[4] Después de esta referencia a la gráfica, Frege establece la equivalencia de las dos formas de expresión (i) "Las funciones $x(x-4)$ y x^2-4x tienen la misma curva", y (ii) "Las funciones $x(x-4)$ y x^2-4x tienen el mismo rango de valores" (p. 26); pero como la curva es una mera representación intuitiva de la *distribución* de valores y argumentos, no es "evidente" que pueda concluirse de aquí la interpretación de Birjukov. Lo único evidente es que tener la misma curva (o sea la misma correspondencia entre argumentos y valores de la función) es una condición necesaria y suficiente para la identidad de los *Wertverläufe*. Pero en ningún momento pasa Frege de la distribución de argumentos y valores —cuya representación intuitiva es la gráfica— a la *clase* de cuplas integradas por ellos. Aquí nuestra familiaridad con el pensamiento conjuntista puede cegarnos para ciertas distinciones.[5]

[3] *Ibid*, Introduction, p. xv

[4] "Function and Concept", en *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, edited by P. Geach and Max Black, Oxford, Basil Blackwell, 1960, p. 25. Las citas que siguen corresponden también a la paginación inglesa.

[5] Cf. esta oportuna observación de Montgomery Furth: "It must be borne in mind, however, that for Frege the smooth-breathing abstraction operator that forms course-of-values-names is *primitive*, and is not defined in terms of class abstraction or in any course-of values" (*Grundgesetze*, Introduction, p. xxxvii).

Sin embargo es justo consignar en apoyo de Birjukov que otras interpretaciones, quizás más tentadoras a primera vista, son en realidad más objetables, por más que alguna de ellas se halle sugerida por otros textos del mismo Frege. Es cierto, por ejemplo, que al hablar de *conceptos* (o sea de funciones cuyo codominio está integrado exclusivamente por valores de verdad) Frege sugiere reiteradamente la identificación del rango de valores con la extensión en el sentido usual. Ya en *Grundlagen der Arithmetik* Frege define Número natural sobre la base del concepto tradicional de extensión, cuyo contenido da enteramente por supuesto. En "Funktion und Begriff" (p. 30) dice que lo que él denomina identidad de rangos de valores "in logic [. . .] is called identity of the extension of the concepts". En el *Grundgesetze* (I, § 3) adopta para ciertos casos la terminología tradicional: "With such functions, whose value is always a true value, one may accordingly say, insted of 'course of value', rather 'extension of the concept' "; y también, en relación con la definición de Número: "I define Number itself as the extension of a concept; and extensions of concepts are by my definitions courses of values" (*Grundgesetze*, p. 6). Pero sería erróneo basarse en estos textos para interpretar el rango de valores, *en general*, como el conjunto de argumentos que satisfacen la función. Al margen de otras consideraciones, esta interpetación global debe rechazarse por ser inaplicable a las funciones no proposicionales, como x^2, capital de x, sen x, etc.

En el contexto de la doctrina fregeana, los términos "concepto", "función proposicional monádica" y "propiedad" son intercambiables, al igual que las expresiones "x satisface la función proposional monádica $\Phi(\xi)$", "x cae bajo el concepto $\Phi(\xi)$" y "x posee la propiedad $\Phi(\xi)$". En el caso de este tipo de funciones (los conceptos) puede hablarse del conjunto de objetos que las satisfacen, pero es obviamente un sin sentido decir que un objeto satisface la función x^2, pues el resultado de aplicar esta función no es un valor de verdad. Y como el concepto de *Wertverlauf* es completamente general y se aplica a todas las funciones (sean proposicionales o no) esta alternativa queda invalidada.[6] Tiene sentido, en cambio, hablar del conjunto de cuplas cuyo primer miembro es un posible argumento y cuyo segundo miembro es el resultado de la función x^2 para ese valor de x. La interpretación del *Wertverlauf* como conjunto de cuplas posee al menos la ventaja de una mayor generalidad, y coincide con el concepto matemático usual de función en extensión.

Otras alternativas obvias son también fácilmente eliminables. El *Wertverlauf* no puede ser el conjunto de todos los argumentos, ya que en tal caso todas las funciones de nivel 1 (o sea funciones aplicables solamente a "objetos", que en la concepción de Frege se distinguen drásticamente de las funciones mismas) tendrían el mismo *Wertverlauf*, en virtud de que el dominio de argumentos de cualquier función (monádica) de nivel 1 es universal, en el sentido de que se halla integrado por la totalidad de los "objetos". En consecuencia, esta interpretación no satisface siquiera la equivalencia (1), pues de la verdad de $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ no se seguiría necesariamente que $(x)(\Phi(x) = \Psi(x))$. Y el *Wertverlauf* no puede ser tampoco el codominio de la función, como lo sugiere engañosamente la expresión "rango de valores", porque todos los conceptos poseen el mismo codomonio (integrado sólo por la Verdad y la Falsedad), lo que constituye una dificultad análoga a la anterior.

[6] Interesa observar que en el § 10 del *Grundgesetze* Frege identifica los *Wertverlauf* de las funciones $-\xi$ y $\xi = \sim (x)\ (x = x)$ respectivamente con la Verdad y la Falsedad, y que éstos son los únicos objetos que satisfacen tales funciones. La Falsedad, por ejemplo, es el único objeto que satisface la función $\xi = \sim (x)\ (x = x)$, pues "$\sim (x)\ (x = x)$" denota la Falsedad. Como las respectivas clases unitarias {Verdad} y {Falsedad} resultan ser por consiguiente, las extensiones usuales de los conceptos $-\xi$ y $\xi = \sim (x)\ (x = x)$, es fácil explicar la curiosa identificación de los *Wertverlauf* con los valores de verdad como una concesión verbal a la identificación (en boga entonces pero rechazada por Frege) entre la clase unitaria y su único elemento. De este modo tendríamos un ejemplo a favor de la interpretación que impugnamos. Pero ello no suprime el hecho de que tal interpretación no puede tener alcance *general*, debido a la existencia de funciones no proposicionales.

Pero si bien la interpretación sostenida por Birjukov satisface el criterio de identidad (1), y posee además la ventaja de su aplicabilidad a todas las funciones, queda en pie el problema de establecer una relación inteligible entre el rango de valores y la extensión en sentido tradicional, que tanto preocupa a Frege cuando habla de conceptos. Frege no aclara este punto capital, y acerca de él solo pueden tejerse conjeturas.

Para remediar esta omisión, Birjukov intenta mostrar (p. 23) que en el caso de los conceptos es posible construir una correspondencia biunívoca entre los rangos de valores (como conjuntos de cuplas) y las extensiones en sentido tradicional (conjuntos de objetos que poseen una propiedad común). La correspondencia establecida por Birjukov es simple: (i) a cada rango de valores le corresponde el conjunto de aquellos primeros elementos de sus cuplas para los cuales el segundo elemento es el valor Verdad; (ii) recíprocamente, a cada conjunto de objetos del dominio objetivo (incluyendo los conjuntos vacíos) le corresponde un conjunto de cuplas del tipo en cuestión, construido del siguiente modo: pertenecen a él todas las cuplas cuyos primeros elementos son objetos del conjunto dado, y cuyo segundo miembro es el valor Verdad; y también todas las cuplas cuyo primer miembro es un objeto del dominio objetivo que no pertenece al conjunto inicial, y cuyo segundo miembro es el valor Falsedad.

La construcción de esta correspondencia biunívoca se basa en el supuesto de que todos los conceptos tienen el mismo dominio de argumentos, pues de otro modo la relación conversa establecida en (ii) deja de ser unívoca. Pero este supuesto sólo es válido para conceptos de nivel 1: conceptos de diferentes niveles, como $(x)\underset{\sim}{\Phi}(x)$[7] y $\xi>3$, poseen diferentes dominios de argumentos; el primero es un concepto de nivel 2, y sólo es aplicable a conceptos de nivel 1; el segundo, en cambio, sólo es aplicable a "objetos".

[7] Aquí "$\underset{\sim}{\Phi}$" debe entenderse como variable funcional libre.

Pese a esta dificultad, la correspondencia biunívoca podría mantenerse en general si se repitiera en todos los niveles, en forma análoga a lo probado para el nivel 1. Pero esto es por lo menos dudoso, debido a la niebla que envuelve ciertos aspectos de la jerarquía fregeana de funciones.

El carácter peculiar de los rangos de valores manifiesta claramente en relación con el signo funcional "$\frown$", cuyo significado podría confundirse a primera vista con el del signo usual de pertenencia a una clase. Frege introduce la función $\frown$ mediante la identidad

$$(2)\quad \Psi\ (x) = x \frown \grave{\alpha}\Psi(\alpha),$$

que no parece sino un disfraz de la fórmula

$$(3)\quad \Psi\ (x) \cdot \equiv x \varepsilon \hat{z}(\Psi(z))$$

con que Russell introduce la relación ε de pertenencia; "$z(\Psi z)$" designa la extensión de Ψ (la clase de todos los z que la satisfacen, así como $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ designa su rango de valores.

Pero es esencial advertir que en (2) la identidad no es reemplazable por la equivalencia, pues, contrariamente a lo que ocure en (3), Ψ puede no ser una función proposicional. Si Ψ es un concepto, entonces (2) establece que el valor de verdad $\Psi(x)$ es el mismo que el valor de verdad $x \frown \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$, lo que puede expresarse de otro modo diciendo que se cumple $\Psi(x)$ si sólo si se cumple $x \frown \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$; en este caso particular, es tentador identificar $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ con $\hat{z}(\Psi z)$. Pero cuando Ψ no es un concepto el bicondicional "si y sólo si", simbolizado por "$\equiv$", carece de sentido, pues en tal caso ni $\Psi(x)$ ni $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ son valores de verdad. En la hipótesis de que Ψ es la función aritmética *Cuadrado de*, tanto "$\Psi(3)$ como "$3 \frown \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$' son nombres del número 9; esto se sigue de la definición de Frege, según la cual "$x \frown u$" es una abreviatura de la expresión: "El único objeto z tal que: existe una función g, de la que u es el rango de valores, y z es el valor de g para el argumento x" (*Grundgesetze*, §34). Obsérvese que cuando Ψ es una función proposicional (por ejemplo *Mayor que cero*) la expresión "$3 \frown \grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" se convierte en el nombre de un valor de verdad, pues sólo un valor de verdad puede ser el objeto z tal que $z = \Psi(z)$.

II

El rasgo más desconcertante de la semántica fregeana se halla sin duda en su concepción de las oraciones como nombres propios de los valores de verdad. Aquí deben distinguirse dos aspectos: (i) que las oraciones son nombres; (ii) que los objetos nombrados por ellas son exactamente la Verdad y la Falsedad, según que la oración sea verdadera o falsa. Frege da por supuesta la posibilidad de (i) y presenta (ii) como un resultado inevitable de esta hipótesis, lo que concuerda con la opinión de Birjukov: "One thing is beyond question: if the fregean theory of the sense of names is accepted and one wishes to extended it to sentences, then, whether one likes it or not, one arrives at the description of truth and falsity as their reference" (p. 94, n. 31).

Para establecer (ii) Frege debe probar dos cosas: (a) que la relación de las oraciones declarativas con los valores de verdad se rige por los mismos principios que gobiernan la relación de los nombres propios con sus denotaciones, y (b) que no existen otras entidades que guarden con las oraciones declarativas este tipo de relación. A su vez, esta prueba debe conferir plausibilidad al supuesto inicial (i), que sería insostenible, naturalmente, si a posteriori se mostrara que los principios que gobiernan los nombres propios no son aplicables también a las oraciones. Los principios usados por Frege en esta parte de su argumentación son los siguientes:

(1) Cuando un nombre constituyente de un nombre compuesto no tiene denotación, el nombre compuesto

tampoco tiene denotación (ejemplo: "(predecesor de 0) + 1").

(2) Cuando un nombre constituyente de un nombre compuesto es reemplazado por otro que tiene la misma denotación, la denotación del nombre compuesto no cambia (aunque puede cambiar el sentido).

Dando por supuestos estos principios (que Frege usa como verdades obvias en el curso de su argumentación, sin formularlos de manera explícita) Frege se pregunta cuál puede ser el objeto denotado por una oración declarativa. Ese objeto debe ser tal que se satisfagan los principios (1) y (2), y por consiguiente una oración completa debe carecer de denotación si uno de sus nombres componentes carece de ella (principio 1) y su denotación total debe permanecer invariable cuando un nombre componente es reemplazado por otro de la misma denotación (principio 2).

Lo esencial del argumento de Frege consiste en mostrar que

(1′) Cuando un nombre constituyente de una oración no tiene denotación, la oración no tiene valor de verdad (no es verdadera ni falsa).

(2′) Cuando un nombre constituyente de una oración es reemplazado por otro que tiene la misma denotación, el valor de verdad de la oración no cambia (aunque puede cambiar el sentido).

La primera observación se apoya en ejemplos como "Odiseo fue arrojado a las playas de Ítaca mientras dormía profundamente", que son propios de la ficción o de la mitología. Conviene señalar de paso que este tipo de ejemplos no basta para establecer (1′), pues los enunciados existenciales negativos de la forma "El tal y tal no existe" (por ejemplo, "El rey de la Argentina no existe") son verdaderos si y sólo si el sujeto gramatical carece de denotación; pero Frege no examina esta clase de oraciones, que a primera vista refutan la observación (1′), y no parece obvio que puedan explicarse con su teoría de la denotación indirecta.

En cuanto a (2′), no es otra que el principio leibniziano de intercambiabilidad *salva veritate*, al que Frege recurre en apoyo de su tesis: *Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt salva veritate.*

El paralelismo entre (1)-(2) y (1′)-(2′) es tan completo que (1′) y (2′) parecen simples reformulaciones de los principios sobre nombres propios para el caso especial de las oraciones declarativas.

Con la anotada reserva respecto de (1′), este paralelismo prueba que los valores de verdad satisfacen los requerimientos impuestos a cualquier tipo de objeto que se desee postular como denotación de las oraciones. Pero Frege cree haber probado algo más: "We are therefore driven into accepting the truth value of a sentence as constituting its reference" (p. 63). Y luego: "What else but the truth value could be found, that belongs quite generally to every sentence if the reference of its components is relevant, and remains unchanged by substitutions of the kind in question?" (p. 64).

Como ya hemos visto, Birjukov cree que se trata de una consecuencia necesaria. Podría decirse, naturalmente, que la dificultad de imaginar otro candidato factible no prueba nada, y que por lo tanto la conclusión es *non sequitur*. Pero es fácil mostrar que la relación entre las denotaciones de las partes y la denotación del todo que establecen los principios (1) y (2) se cumplen también si consideramos como *denotata* de las oraciones sus respectivas clases de equivalencia.

Comenzaremos con el principio (2). Como la clase de equivalencia de una oración A es simplemente la clase de todas las oraciones que tienen el mismo valor de verdad que A, la ley de Leibniz asegura que esta clase permanece invariable bajo las sustituciones de términos de igual denotación. En cuanto al principio (1), la cuestión puede formularse así: para que exista la clase de equivalencia de una oración *A* es condición necesaria y suficiente que *A* sea verdadera o falsa; por lo tanto, si un nombre constituyente de *A* no tiene denotación, entonces (en virtud de 1′) no existe su clase de equivalencia. Esto resulta natural dentro de la teoría de Frege, pues si *A* no es verdadera ni falsa entonces la descripción "El valor de verdad de *A*" no denota, y por consiguiente (de acuerdo con el principio 2) tampoco tiene denotación el nombre compuesto "La clase de todas las oraciones cuyo valor de verdad es el mismo que el valor de verdad de *A*". En consecuencia tal clase no existe, así como no existe el número que resulta de sumar 1 al predecesor de 0.

Partiendo de aquí, los posibles *denotata* de *A* son ya infinitos: también satisface los principios (1) y (2) la clase unitaria cuyo único elemento es la clase de equivalencia de *A*, y, en general, cualquier miembro de la sucesión infinita $\{C_A\}$, $\{\{C_A\}\}$, $\{\{\{C_A\}\}\}$ . . . , donde "C" simboliza la clase de equivalencia de *A*.

SUMMARY

The problems discussed pertain to the two channels of the work of Frege: that of mathematical logic and that of semantic analysis. Part I points out difficulties standing in the way of a univocal interpretation of the concept of "range of values" (*Wertverlauf*) of a function, a basic concept in Frege's definition of natural number. The examination of some interpretations and in particular the analysis of the function $\frown$ permits displaying the peculiar character of Frege's notions. Part II is concerned with the theory of declarative sentences as proper names of truth values and shows that infinitely many entities satisfy the formal requirements adduced by Frege for the *denotata* of sentences.

I

Notwithstanding its importance, the concept "range of values" is not clear in the texts of Frege. The expression "range of values" adopted here is unfortunate, for it suggests the identification of *Wertverlauf* with the domain (*codominio*) of the function, constituted by the values that this latter puts into correspondence with its arguments. In volume I of *Grundgesetze der Arithmetik*, (§3), Frege establishes the criterion of identity that the *Wertverläufe* must satisfy. Symbolizing, in Frege's notation, the value-ranges of $\Phi(\xi)$ and $\Psi(\xi)$, respectively, by $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ and $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$, this condition of identity stands expressed by the formula:

$$(1) \quad (x)(\Phi(x) = \Psi(x)) \equiv (\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\alpha))$$

which exprsesses the basic law V of the system of the *Grundgesetze*. That the basic law V contains the sign of identity and not that of propositional equivalence is owing to that, according to Frege, declarative sentences are names of the *True* and the *False*. With identity in place of equivalence, the basic law V establishes that "$(x)\ (\Phi(x) = \Psi(x))$" denotes the same truth value as "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) = \grave{\alpha}\Psi(\grave{\alpha})$", whether this be the True or the False. But this is what (1) establishes, namely: the value-ranges of $\Phi(\xi)$ and $\Psi(\xi)$ are identical if and only if these functions have the same values for the same arguments. As long as the intelligibility of our subject is not affected, the basic law V will be identified with (1). The view of Birjukov, according to which a range of values in Frege is what "usually is called the graph of the function...", is examined, and the opposing view of Angelelli, who observes that in *Funktion und Begriff* the graphic representation is considered to be a mere intuitive image, is commented.

But it is only fair to point out, in support of Birjukov, that other interpretations are more objectionable notwithstanding that they are suggested by texts of Frege's. For example: in speaking of concepts, Frege suggests the identification of value-ranges with extension in the ordinary sense. (See *Grundlagen der Arithmetik* —the Definition of Natural Number—, *Funktion und Begriff*, (p. 30); and *Grundgesetze*, (I, §3.) Still, it would be a mistake to base oneself on these texts to interpret the range of values as, *in general*, the set of arguments that satisfies the function. Among other reasons, his interpretation ought to be rejected as being inapplicable to non-propositional functions such as x^2, *capital x*, sen *x*, etc.

In Frege, the terms "concept", "monadic propositional function" and "property" are interchangeable, as are likewise the expressions "x satisfies the monadic propositional function $\Phi(\xi)$", 'x comes under the concept $\Phi(\xi)$" and "x possesses the property $\Phi(\xi)$". In the case of this type of functions (concepts), one may speak of the set of objects that satisfy them, but it is meaningless to say that an object satisfies the function x^2, for the result of applying this function is not a truth value. And since the concept of *Wertverlauf* is general and applies to all functions (propositional or not), this alternative is invalid. On the other hand, it does make sense to speak of the set of couples whose first member is a possible argument and whose second member is the result of the function x^2 for this value of x. This interpretation has the advantage of greater generality and coincides with the ordinary mathematical concept of a function in extensión.

Other alternatives can be eliminated. Thus the *Wertverlauf* cannot be the set of all the arguments, for in this case all the functions of level 1 (that is, those applicable only to "objects" which in Frege are distinguished from functions themselves), would have the same *Wertverlauf*, since the domain of the arguments of any function (monadic) of level 1 is universal. Therefore, this interpretation does not even satisfy the equivalence (1). Nor can the *Wertverlauf* be the domain of the function because all concepts possess the same domain.

Although Birjukov's interpretation satisfies the criterion of identity (1) and can be applied to all functions, there remains the problem of establishing a relation between the range of values and the extensión in the traditional sense. Frege does not clarify the point and one can only conjecture.

In order to rectify the omission, Birjukov attempts to show (p. 23) that in the case of concepts it is possible to construct a one-to-one correspondence between the value-ranges (as a set of couples) and the extensions in the traditional sense (a set of objects that possess a common property). The construction of this correspondence is based on the supossition that all concepts have the same domain of arguments; but it is only valid for concepts of level 1. Nevertheless, the correspondence could be maintained if it were repeated on all the levels in a way analogous to that proved for level 1.

The peculiar character of value-ranges is manifested in relation to the functional sign "$\frown$", whose meaning could be confused with the usual sign for membership in a class. Frege introduces the function by means of the identity,

$$(2)\ \Psi\ (x)\ =\ x \frown \grave{\alpha}\Psi\,(\alpha),$$

that seems to be no more than a disguise for the formula

$$(3)\ \Psi\ (x)\ .\equiv.\ x\varepsilon\hat{z}\ (\Psi)\ (x)),$$

with which Russell introduces the relation of membership ε; "$\hat{z}(\Psi)$" designates the extensión of Ψ, just as as "$\grave{\alpha}\Psi\,(\alpha)$" designates its range of value. But in (2) the identity cannot be substituted by the equivalence, for, un likes what happens in (3), Ψ may be a nonpropositional function. Cases in which Ψ is a concept and in which it is not are examined.

II

The most disconcerting feature of Frege's semantics is found in his conception of sentences as proper names of truth values. Two aspects ought to be distinguished: (i) that the sentences are names; (ii) that the objects named by them are the True and the False. Frege assumes (i) and presents (ii) as the result of that hypothesis —which is in agreement with Birjukov's interpretation (p. 94, n. 31).

In order to establish (ii), Frege ought to prove (a) that the relation of declarative sentences with truth values is governed by the same principles that govern the relation of proper names with their *denotata* and (b) that there are no other entities that have this type of relation with declarative sentences. In its turn, this proof ought to make (i) plausible.

The principles used by Frege are:
(1) When a name constitutive of a compound name has no denotation, neither has the compound name: "(predecessor of O) + 1".
(2) When a name constitutive of a compound name is substituted by

another that has the same denotation, the denotation of the compound name does not change (although the sense may change). Admiting (1) and (2), Frege asks himself what the object denoted by a declarative sentence can be. This object ought to satisfy principles (1) and (2). The crux of Frege's argument consists in showing that:

(1′) When a name constitutive of a sentence has no denotation, the sentence has no truth value.

(2′) When a name constitutive of a sentence is substituted by another that has the same denotation, the truth value of the sentence does not change (although the sense may change). (1′) is supported by examples like "Odysseus was thrown onto the beach of Ithaca while he slept". But this type of example is not sufficient to establish (1′), for the negative existentials of the form "The such and such does not exist" are true if and only if the grammatical subject lacks a denotation. As for (2′), it is a matter of the principle of interchangeability *salva veritate*.

The parallelism between (1)-(2) and (1′)(2′) is so complete that (1′) and (2′) seem like reformulations of the principles for the special case of declarative sentences. This parallelism proves —with the reservation noted with respect to (1′)— that truth values satisfy the requirements imposed for any type of objects that one may desire to postulate as the denotation of sentences. But Frege believes he has proved something more: that the truth value constitutes the reference of a sentence. (pp. 63-4)

Birjukov believes that this is a necessary consequence. It might be said that the difficulty of finding another candidate proves nothing. But it can be shown that the relations between the *denotata* of the parts and of the whole that principles (1) and (2) put down, are also fulfilled if we consider as *denotata* of the sentences their respective equivalence classes.

We will begin with principle (2). Since the equivalence class of a sentence A is simply the class of all sentences that have the same truth value as A, Leibniz' law assures that this class remains invariant under substitutions of terms having the same denotation. As for principle (1), the question can be formulated in this way: for the equivalence class of a sentence A to exist, it is a necessary and sufficient condition that A be true or false: therefore, if a name constitutive of A has no denotation, then (by virtue of 1′) its equivalence class does not exist. This turns out to be natural in the context of Frege's theory, for if A is neither true nor false, then de description "The truth value of A" does not denote, and consequently (in accordance with principle 2) neither does the compound name, "The class of all sentences whose truth value is the same as the truth value of A", have denotation. It follows that such a class does not exist, just as the number that results from adding 1 to the predecessor of 0 does not exist.

Starting from this, the possible *denotata* of A are now infinite: the unit class whose only element is the equivalence class of A also satisfies principles (1) and (2), and, in general, so does any member of the infinite succession $\{C_A\}$, $\{\{C_A\}\}$, $\{\{\{C_A\}\}\}$, . . . , where "C_A" symbolizes the equivalence class of A.

[*Traducción de J. Schönberg*]