CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 46, No. 137 (agosto 2014): 129–137

W.D. Hart, *The Evolution of Logic*, Cambridge University Press, Nueva York, 2010, 299 pp.

The Evolution of Logic pertenece a la serie de Cambridge University Press titulada *The Evolution of Modern Philosophy*, que trata de ofrecer un panorama completo de la filosofía contemporánea y de cómo ha sido su desarrollo durante los últimos ciento cincuenta años. Se espera que dicha colección sirva como una enciclopedia que contenga los conceptos filosóficos más básicos utilizados en la filosofía contemporánea. Así, como parte de la serie, el libro tiene como objetivo ofrecer a un filósofo sin formación especializada en el área una visión panorámica y completa del desarrollo de la lógica en el último siglo y medio.

William Hart, el autor del libro, intenta proporcionar una herramienta que ayude a cerrar un poco la brecha que se creó entre filósofos y lógicos matemáticos a partir del final de la Segunda Guerra Mundial, cuando se reconoció a la lógica matemática como una subdisciplina de la matemática y los lógicos empezaron a tener presencia casi exclusivamente en los departamentos de matemáticas. Según el autor, esto ocasionó que los lógicos que tradicionalmente tenían un contacto directo y profundo con la filosofía, poco a poco se fuesen alejando de esta disciplina, lo que a su vez provocó que los filósofos, en general, tuviesen un menor conocimiento de los resultados contemporáneos de la lógica matemática. Para alcanzar su objetivo, a lo largo del texto el autor muestra algunos de los resultados más destacados de la lógica matemática que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XX, en particular en la teoría de conjuntos, en la teoría de la recursión y en la teoría de modelos.

El libro se compone de diez capítulos. En los primeros cinco se introducen las técnicas y los temas más básicos de la lógica matemática y su relación con las posturas de filósofos prominentes como Frege, Russell, Tarski, Quine, Kripke, etc., y además incluyen una gran cantidad de conceptos y resultados. Prácticamente cada hoja contiene una definición y durante toda la lectura se establecen relaciones de dichos conceptos con distintas posturas filosóficas. Del capítulo 6 al capítulo 9 hay una serie de importantes resultados y de sus respectivos esbozos de prueba. Estos capítulos son casi completamente técnicos, pues en concreto, encontramos la prueba de consistencia relativa de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel sin axioma de elección (ZF) con la hipótesis del continuo (HC), la hipótesis generalizada del continuo (HGC), el axioma de elección (AE), el axioma de constructibilidad (V=L) y sus negaciones. Aparecen también el teorema de Post y el teorema de Morley. El último capítulo contiene una serie de reflexiones en torno a estos resultados y su relevancia filosófica. A continuación, presento una serie de comentarios sobre el contenido de cada capítulo.

El primer capítulo, "Cantor's Paradise", está pensado como una introducción filosófica a la teoría de conjuntos donde se presenta una serie de conceptos básicos de esta disciplina, la cual, los filósofos no especializados en lógica, pueden seguir fácilmente, además se da una explicación intuitiva de la noción de conjunto y se contrasta con otras nociones como las de propiedad y las de clase. Asimismo, se definen los números ordinales y los números cardinales, se reconstruye la hipótesis del continuo y se explica el significado de indecidible en la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel más axioma de elección (ZFC) (el resultado se debe a Gödel (1939) y a Cohen (1963)). Por último, se presentan algunas paradojas famosas como la de Cantor y la de Burali-Forti.

El capítulo 2 explica la influencia de Kant en la filosofía de las matemáticas y la lógica contemporáneas. En particular, la distinción que hace entre conocimiento *a priori* y conocimiento *a posteriori* es de gran relevancia para estas ramas de la filosofía, pues el conocimiento lógico y el matemático son los dos ejemplos paradigmáticos de conocimiento *a priori*. Una vez presentada la postura de Kant, el texto se centra en la postura de Frege. Este último estaba de acuerdo con Kant en que la geometría es sintética *a priori*, pero apoyó la tesis de que la aritmética es analítica. La estrategia argumentativa de Frege consiste en aceptar la postura kantiana respecto a que la lógica es analítica y *a priori* y mostrar que las verdades de la aritmética se derivan de ella; ésa es la razón por la que el proyecto recibe el nombre de "logicismo". A continuación, el autor ofrece una reconstrucción más o menos detallada del proyecto logicista de Frege en relación con su filosofía del lenguaje y su ontología, y además demuestra que el sistema es inconsistente.

El capítulo 3 comienza mencionando las tres paradojas que afectaron a la teoría de conjuntos y al logicismo, a saber, la paradoja de Cantor, la paradoja de Burali-Forti y la paradoja de Russell. Estas paradojas representaron un serio reto a superar para dichas teorías, pues muestran, respectivamente, que no puede haber un conjunto que tenga como elementos a todos los conjuntos, ni un conjunto que contenga a todos y sólo los ordinales, ni un conjunto que contenga a todos y sólo los conjuntos que no se pertenecen así mismos (so pena de generar una contradicción). Sin embargo, la teoría de conjuntos en la presentación de Cantor y la teoría logicista de Frege permiten la existencia de dichos conjuntos (o cursos de valores en el caso de la teoría de Frege). A pesar de estas paradojas y los problemas que generaban, las teorías logicistas y de conjuntos no fueron abandonadas, en buena medida por el enorme potencial que ambas mostraban para los filósofos y los matemáticos. En este capítulo se hace un recuento de las soluciones propuestas a las paradojas y las teorías que se obtuvieron como resultado. Se pone énfasis en las ideas centrales detrás de cada teoría y en las desventajas que cada una de ellas tiene. Las teorías analizadas son la teoría de tipos de Russell, la teoría de conjuntos de Zermelo, la teoría de clases de Bernays, von Neuman y Gödel (NBG) y la teoría de conjuntos NF de Quine. Se explican algunas de las principales diferencias entre ellas y cómo es que en la mayoría de los sistemas no se puede demostrar la existencia del universo conjuntista (y cómo aquellas que lo pueden hacer, como NF, tienen menor poder expresivo y deductivo).

El capítulo titulado "The Universe and Everything" se centra en la noción de verdad y en cuál ha sido el tratamiento que la lógica le ha dado en el último siglo. Se presenta la teoría de la verdad de Tarski para lenguajes de primer orden y algunas ampliaciones posibles. Se presenta también la teoría de la verdad de Kripke, así como los teoremas de Löwenheim-Skolem y el de compleción-corrección para la lógica de primer orden. En la parte final del capítulo se presenta la paradoja de Orayen, la cual pretende mostrar que es filosóficamente inadecuado elegir a la teoría de conjuntos para interpretar a todas las teorías expresadas en el lenguaje de la lógica de primer orden.[1]

El capítulo quinto comienza con el planteamineto del dilema de Benacerraf y una posible solución, la solución formalista. Este dilema sostiene, *grosso modo*, que debemos elegir entre aceptar que las oraciones de las matemáticas se analicen mediante una semántica tarskiana (que supone la existencia de los objetos matemáticos) o aceptar una teoría del conocimiento que requiera tener acceso causal a los objetos a los que se refiere la matemática (el problema es que tradicionalmente se cree que los objetos matemáticos son objetos abstractos y no tenemos contacto causal con ellos).[2] Para que la solución

[1] Para una presentación detallada de esta supuesta paradoja véase Hurtado y Moretti 2003. No hay un acuerdo general en que la paradoja de Orayen realmente sea una paradoja; véanse, por ejemplo, Gómez Torrente 2003 y Rayo 2005.

[2] Para tener una perspectiva completa de este problema véase Benacerraf 1983, y para una visión completa de Hart sobre este punto véase Hart 1991.

formalista funcione es necesario que la extensión de las proposiciones demostrables sea la misma que la extensión de las proposiciones verdaderas. Se da un esbozo claro de los teoremas de incompleción de la aritmética demostrados por Gödel en 1931. El primer teorema de incompleción muestra que la solución formalista no es apropiada, pues la verdad y la demostrabilidad no son coextensivas en sistemas consistentes, recursivamente axiomatizables y en los que se pueda expresar la aritmética básica.

Se presenta la noción de computabilidad y la tesis de Church-Turing, que si bien es posterior a la demostración original de los teoremas, ayuda a clarificar el contenido intuitivo de los teoremas de Gödel.

En el sexto capítulo, "Accommodating Cantor", se hace una nueva exposición de la hipótesis del continuo y de la hipótesis generalizada del continuo. Se presenta la prueba de la consistencia relativa de ZFC + HGC respecto a ZF dada por Gödel. Para lo cual se construye la jerarquía acumulativa de conjuntos y se ofrece la definición de definibilidad de un conjunto respecto a otro usando lógica de primer orden. Con eso se puede construir una nueva jerarquía más delgada, la jerarquía de los conjuntos definibles, *L*.

Un mapa de los resultados de este capítulo es el siguiente. Se utilizan los siguientes resultados (de los cuales se da un esbozo de prueba): el teorema de Löwenheim-Skolem, el teorema de Shepherdson y un resultado de Gödel que garantiza que los subconjuntos constructibles de un nivel $M(\omega(\alpha))$ son miembros del nivel $M(\omega(\alpha+1))$. Usando estos resultados se puede mostrar que L es modelo de HGC, AE y V=L. El desarrollo se da en tres pasos. 1) Mostrar que los conjuntos constructibles pueden ser ordenados usando la definición de L. Esto muestra que L cumple con el teorema del buen orden (equivalente al axioma de elección). 2) Probar que la operación de potencia (relativizada a subconjuntos constructibles) sólo escala un nivel en cardinalidad. Esto implica a su vez que no se tiene que subir más que un nivel (en cardinalidad) para construir los subconjuntos de un cardinal dado, es decir, todos los subconjuntos constructibles de $\omega(\alpha)$ están en $M(\omega(\alpha+1))$ y entonces su cardinal es $\omega(\alpha+1)$. Esto hace a la HGC verdadera en L. 3) Mostrar que ser un conjunto constructible es invariante (absoluto) para L. Esto sirve para probar que todo lo demostrado vale desde el punto de vista de L y no sólo desde el universo entero.

En el séptimo capítulo podemos ver los resultados de Cohen que completan la prueba de independencia de la HC respecto de ZF, usando la bien conocida técnica de *forcing*. También se prueba la independencia del axioma de elección y de V=L respecto a ZF. La técnica consiste en construir un modelo de ZF que contiene un conjunto de reales no constructible, lo que implicará que V no es L y que la HC es falsa en este modelo. Además, se muestra que existe un conjunto de números naturales que no es bien ordenable en este modelo, lo que implica la negación del axioma de elección.

Se describe con exactitud la técnica de *forcing* como aquella que se apoya en la teoría de la verdad. La idea fundamental es que en los modelos generados mediante *forcing* todos los objetos tengan nombre. Así, la verdad de oraciones cuantificadas universalmente se simplifica a que la fórmula cuantificada sea satisfecha por todos los términos.

El octavo capítulo se centra en la prueba del teorema de Post.

> En 1944 muchas teorías axiomáticas habían mostrado ser indecidibles (si eran consistentes). Emil Post notó que cualesquiera dos de ellas eran de la misma dificultad, en el sentido recién observado, y se preguntó si todas las teorías axiomáticas indecidibles eran de la misma dificultad. Esta pregunta es el problema de Post. (p. 206; la traducción es mía.)

Que dos axiomatizaciones tengan el mismo grado de dificultad quiere decir que el procedimiento que decida uno de los dos decide también el otro. Este capítulo es complejo e incluye el material necesario para entender la demostración del teorema de Post (que afirma que existen teorías con diferentes grados de dificultad), el cual incluye una gran cantidad de conceptos de la teoría de la recursión.

En el penúltimo capítulo se analiza la noción de categoricidad de teorías formales. Una teoría es categórica cuando todos sus modelos son isomorfos. Se habla sobre las versiones de teorías matemáticas presentadas en el lenguaje de la lógica de segundo orden, en particular se habla de la aritmética de Peano y de su categoricidad. No obstante, se opta por hablar de teorías que se expresan en el lenguaje de la lógica de primer orden, pues se cree que la teoría de modelos de la lógica de segundo orden no ha sido desarrollada adecuadamente por la comunidad matemática (esto no es del todo cierto; pueden verse desarrollos sobre la categoricidad de las teorías de segundo orden en Shapiro 1991, McGee 1997 y Uzquiano 2002).

Las teorías que se expresan en el lenguaje de la lógica de primer orden no pueden ser categóricas, excepto aquellas teorías que sólo tienen modelos finitos.[3] Es por ello que se introduce la noción de κ-categoricidad en primer orden: dado un cardinal infinito κ, la teoría es κ-categórica sii todos los modelos de la teoría cuyo dominio tiene cardinalidad κ son isomorfos. Se prueba que la aritmética de Peano es ω-categórica. Se ofrece una clasificación de las teorías categóricas y se plantea una pregunta central: ¿si una teoría es κ-categórica para algún cardinal κ no numerable, lo será para todos los cardinales no numerables? La respuesta, afirmativa, la proporciona el teorema de Morley, que afirma que si una teoría es κ-categórica para un cardinal κ no numerable, entonces es categórica para todos los cardinales no numerables.

En el último capítulo, "The Zoology of Reality", aparece una serie de reflexiones sobre las pruebas presentadas del capítulo 6 al capítulo 9. Estas reflexiones no sólo son filosóficas, también incluyen clarificaciones sobre lo que realmente se demuestra en cada prueba y cómo estos resultados se relacionan entre sí. Además, se esboza una defensa del realismo que se apoya en estos resultados. Este capítulo es interesante, aunque sólo es comprensible para aquellos que han podido seguir la exposición de los cuatro capítulos anteriores o si ya conocen los resultados.

Una vez descritos los temas contenidos en el libro, me parece importante señalar que no cumplen del todo con el objetivo del libro como parte de la serie *The Evolution of Modern Philosophy*, pues, más que una historia del desarrollo de la lógica de los últimos ciento cincuenta años, es más bien un panorama de una rama de la lógica, la lógica matemática clásica. No se tratan en absoluto temas relacionados con el desarrollo de las lógicas no clásicas, sean extensiones o rivales de la lógica clásica. También es importante subrayar que no se examinan los análisis de los resultados de los últimos treinta años, lo cual en realidad no es un defecto mayor. Debido a su complejidad, los resultados obtenidos en los últimos años en estas ramas de la lógica son casi inaccesibles para los filósofos sin una formación especializada en matemáticas (algunos resultados son incluso inaccesibles para matemáticos sin formación especializada en lógica y en teoría de conjuntos, por ejemplo, para comprender los tratados que aparecen en Woodin 1999 o en los últimos capítulos de Jech 2003).

También es importante mencionar que el objetivo de Hart sólo se cumple parcialmente, pues después de la mitad del libro un filósofo

[3] Esto es una consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem, pues toda teoría con un modelo cuyo universo es infinito tiene modelos con dominios de cualquier cardinalidad infinita.

sin una buena competencia en lógica matemática se ve imposibilitado para seguir y entender las pruebas. La razón es que sólo se presentan los esbozos de prueba, y hace falta una explicación detallada de la estructura de las mismas y los temas no son nada sencillos. De hecho, desde mi punto de vista, la segunda parte del libro es conveniente sólo para aquellos que ya tienen un interés desarrollado por estos temas y una formación fuerte en el área. Sin embargo, es claro que para alguien con esas características, este libro no es la mejor opción. Existen otros textos más claros con presentaciones más detalladas de estos resultados, p.ej., Enderton 2001, Smullyan 1992, Kunen 1980, Bell 1997, Smullyan 1993, y Boolos *et al.* 2007. Algo relacionado con esto es que la presentación de las pruebas no es la estándar. Esto es, las pruebas de los teoremas de los capítulos 6 y 7 siguen el estilo de prueba de un curso dado por Hilary Putnam en Harvard al que Hart asistió. Las pruebas son casi impecables, pero difieren de las presentaciones más comunes de estos resultados como Kunen 1980, Bell 1977 y Jech 2003 (algunos de los libros de texto más usuales para pruebas de independencia). Usar pruebas menos comunes podría estar justificado si se obtuviera un beneficio en la presentación, por ejemplo, la clarificación de algún punto con influencia en la discusión filosófica o bien una presentación técnicamente más sencilla de los resultados. Lamentablemente esto no sucede, o no es claro que suceda.

Otro problema es la presentación del libro. Pues está escrito sin división en secciones o apartados (únicamente hay división por capítulos); además, no incluye notación especial para presentar definiciones técnicas, ni teoremas (por ejemplo, las definiciones se dan en párrafos que incluyen mucha más información). Esto provoca que la lectura sea difícil, especialmente a partir del capítulo 5. Así, en el capítulo 5 se definen conceptos formales que se requieren en la discusión del capítulo 8 (conceptos de la teoría de la recursión), hay por lo menos dos problemas relacionados con la presentación de estos conceptos. El primero es que no se presentan de nuevo en el capítulo 8 y el segundo es que la falta de notación pertinente hace muy complicado regresar al capítulo 5 y encontrar las definiciones necesarias.

Con todo debo aclarar que sí recomiendo el libro, con las siguientes sugerencias. Si el lector no es especialista en lógica, es prudente sólo leer los primeros cinco capítulos y posiblemente el capítulo 10. Si el lector conoce ya los temas, puede leer todo el libro para ver otro punto de vista sobre los teoremas en cuestión. Creo que lo que más vale la pena son las discusiones filosóficas que se plantean en su primera parte, aunque también creo que no es la mejor opción para tener un primer acercamiento a la lógica de la segunda mitad del siglo XX.

CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ
Universidad Nacional Autónoma de México
cristian.mate@gmail.com

BIBLIOGRAFÍA

Bell, J.L., 1977, *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Clarendon Press, Oxford.

Benacerraf, P., 1983, "Mathematical Truth", en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Boolos, G., J. Burgess y R. Jeffrey, 2007, *Computability and Logic*, 5a. ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Cohen, P., 1963, "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, vol. 50, no. 6, pp. 1143–1148.

Enderton, H., 2001, *A Mathematical Introduction to Logic*, 2a. ed., Harcourt Academic Press, San Diego.

Gödel, K., 1939, "Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, vol. 25, no. 4, pp. 220–224.

Gómez Torrente, M., 2003, "Notas sobre la paradoja de Orayen", en Hurtado y Moretti 2003, pp. 83–94.

Hart, W.D., 2010, *The Evolution of Logic*, Cambridge University Press, Nueva York.

———, 1991, "Benacerraf's Dilemma", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. 23, no. 68, pp. 87–103.

Hurtado, G., y A. Moretti (comps.), 2003, *La paradoja de Orayen*, EUDEBA, Buenos Aires.

Jech, T., 2003, *Set Theory. The Third Millennium Edition, Revised and Expanded,* Springer-Verlag, Berlín.

Kunen, K., 1980, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Ámsterdam.

McGee, V., 1997, "How We Learn Mathematical Language", *Philosophical Review*, vol. 106, no. 1, pp. 35–68.

*Quiero agradecer a los proyectos CONACyT CCB 2011 166502 y PIFFYL 2013 012 su apoyo durante la elaboración de este texto. Mi agradecimiento también al doctor Mario Gómez Torrente por sus valiosos comentarios y al árbitro anónimo asignado por la revista.

Mendelson, E., 2010, *Introduction to Mathematical Logic*, 5a. ed., CRC Press, Boca Ratón.

Rayo, A., 2005, "Nota Crítica sobre *La paradoja de Orayen*", *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, vol. 37, no. 109, pp. 99–115.

Shapiro, S., 1991, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Clarendon Press, Oxford.

Smullyan, R., 1993, *Recursion Theory for Metamathematics*, Oxford University Press, Nueva York.

———, 1992, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Nueva York.

Uzquiano, G., 2002, "Categoricity Theorems and Conceptions of Set", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 31, no. 2, pp. 181–196.

Woodin, W.H., 1999, *The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal*, De Gruyter, Berlín.