CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XIX, No. 57 (diciembre 1987): 109–136

DISCUSIONES

LA NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. Crítica a un libro de Philip Kitcher

FRANCISCO MIRÓ QUESADA
Universidad de Lima

En 1984 Philip Kitcher escribió un libro en el que sostiene que la matemática es una ciencia empírica.[1] El rigor con que está escrito, el conocimiento de la historia de la matemática que revela el autor y, sobre todo, el hecho de que por primera vez se haya presentado un desarrollo verdaderamente sistemático de la posición empirista en la filosofía matemática, ha llamado la atención en los círculos especializados y ha provocado múltiples críticas y discusiones. Sin embargo, hasta donde llega nuestra información, no se ha hecho, aún, una crítica del libro de Kitcher en el mundo de habla castellana. Creemos que la importancia del libro merece un comentario en nuestro idioma pues es conveniente que se conozca en nuestros círculos especializados. Quienes, como nosotros, tienen una posición filosófico-matemática no empirista, serán motivados por la agudeza y profundidad de sus planteamientos, para revisar y reajustar sus propios puntos de vista. Los que son de tendencia contraria en-

[1] Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Nueva York-Oxford, 1984.

contrarán en el libro un intento de fundamentación empirista superior, de lejos, a los anteriormente existentes. En las líneas que siguen, haciendo justicia a los méritos de una obra verdaderamente importante, tratamos de mostrar que el intento de Kitcher es insostenible.

Kitcher inicia su libro con la exposición de lo que, según él, constituye el conocimiento *a priori*. Para describir con precisión este conocimiento parte de una concepción psicologista del conocimiento, basada en la noción de *garantía*. El conocimiento de un sujeto X de un hecho p, se constituye si, efectivamente, p se da y X cree que se da y la creencia de X en p ha sido producida por *un proceso que garantiza* esta creencia (K, 84, 17). Kitcher nos dice con acierto que para el subsiguiente desarrollo de sus tesis no necesita analizar mayormente el concepto de *garantía*. Partiendo de esta premisa nos presenta el siguiente análisis del conocimiento *a priori* con la intención de mostrar, luego, que el conocimiento matemático no es *a priori*.

(1) X sabe *a priori* que p si y sólo si X sabe que p y la creencia de X de que p ha sido producida por un proceso que es una garantía *a priori* para dicha creencia.

(2) α es una garantía *a priori* para la creencia de X de que p, si y sólo si α es un proceso tal que, dada una vida e, suficiente para que X llegue a la creencia de que p:

a) algún proceso del mismo tipo pudo producir en X una creencia de que p;

b) si un proceso del mismo tipo fuera capaz de producir en X una creencia de que p, entonces sería una garantía para que X creyera en p;

c) si un proceso del mismo tipo hubiera de producir en X una creencia de que p, entonces p (K, 24).

Partiendo de este análisis, Kitcher arremete contra los argumentos de los aprioristas en matemáticas. Para ello Kitcher considera que la concepción apriorista de la matemática supone que todos los conocimientos matemáticos pueden ser conocidos *a priori* mediante su demostración o prueba. Para defender esta tesis hay que suponer lo siguiente:

(3) Hay una clase de enunciados *A* y una clase de reglas de inferencia *R* tales que:

a) cada miembro de *A* es un enunciado *a priori* básico;

b) cada miembro de *R* es una regla que preserva la aprioridad;

c) cada enunciado estándar de matemáticas se presenta como el último miembro de una sucesión, cuyos miembros pertenecen todos o bien a *A* o se derivan de miembros previos de acuerdo con alguna regla de *R* (K, 39).

Una primera objeción a esta concepción del *a priori* matemático es que cuando una demostración matemática es muy larga (aunque Kitcher no da ningún ejemplo, pensemos, en este caso, en la demostración del teorema de los cuatro colores para la cual se han tenido que utilizar computadoras), con frecuencia quien la hace, o quien trata de seguirla, tiene dudas sobre su corrección (K, 84, 40). Esto puede hacernos pensar que en la demostración hay errores, lo que significa que nuestro conocimiento del teorema es inevitablemente incierto y, en consecuencia, no es *a priori* (K, 40).

Esta objeción no nos parece sostenible. En efecto, el hecho de no estar seguro de que el teorema esté bien demostrado, no contradice ninguna de las condiciones que el propio Kitcher propone para que un conocimiento sea *a priori*, porque cuando pensamos que un teorema puede no estar bien demostrado es porque creemos que pudo haber habido algún error en su demostración. Y este error puede producirse, también, como sucede a menudo con los principiantes, en una demostración corta. El hecho de que esto suceda en una demostración larga en nada cambia la naturaleza de la demostración. Si quien demuestra el teorema no comete errores, entonces, de acuerdo al análisis de Kitcher de la manera como se produce el conocimiento *a priori*, ofrece siempre una garantía de la creencia en la verdad del teorema. Supongamos que hay un teorema largo y difícil cuya demostración se intentó varias veces y se descubrió que había errores en ella. La demostración no vale porque se han violado ciertos principios o reglas que son parte de la garantía de la creencia en su verdad. Supongamos que llega un momento en que todos están de acuerdo en que la demostración es válida. Esto se debe a que todo aquel que comprende la demostración del teorema encuentra todas las garantías necesarias para creer en su verdad. Así ha sucedido innumerables veces en la historia de la matemática. El hecho de que el conocimiento de un teorema sea incierto porque pudimos haber cometido errores en su demostración no le resta absolutamente nada de su apriorismo. Cuando se corrige la demostración de un teorema no se hace la corrección observando hechos sino recurriendo a principios y reglas que no tienen nada que ver con la experiencia. El conocimiento *a priori* no es un conocimiento que se establezca sin errores. Si así fuera no habría, por supuesto, ningún conocimiento posible *a priori*. Pero el propio análisis del concepto de conocimiento *a priori* que hace Kitcher permite, perfectamente, concebir que se cometen errores en las demostraciones matemáticas. En efecto, el proceso mediante el cual un sujeto llega a creer que un determinado conocimiento (expresado en forma de teorema) es verdadero, pudo haberse desviado del proceso que debió seguir. Dicho sujeto puede creer que el proceso es correcto, pero al revisarlo se da cuenta de que en cierta parte del mismo, en lugar de haber empleado el principio lógico *X*, como lo exigía la demostración, empleó el *Y*, que fue el que lo condujo al resultado falso. La posibilidad de que una demostración pueda ser falsa no impide, por eso, su carácter apriorístico.

El hecho de que cuando los demás, sobre todo los maestros en quienes confiamos, aceptan nuestra demostración, haga que sintamos reforzada nuestra creencia en su validez, no tiene nada que ver con el apriorismo de la prueba (Kitcher menciona este hecho como argumento en contra del apriorismo). La sugestión puede engañarnos durante algún tiempo; pero es perfectamente posible encontrar errores en los maestros y llegar a la certeza de que la demostración que hemos hecho es buena a pesar de la opinión contraria de los primeros. Lo que sí es cierto es que cuando una demostración es correcta y es universalmente aceptada, la verdad *a priori* de la lógica y de las matemáticas es necesaria y, si es necesaria, es universal. Kitcher sostiene que la necesidad de un conocimiento no tiene nada que ver con su apriorismo, sin entrar en mayores detalles. Y esto es grave. Una tesis filosófica que da la impresión de ser definitiva, es la que dice que un conocimiento empírico no puede ser necesario. Desde Platón hasta nuestros días, esta tesis se ha mantenido incólume y nadie ha podido demostrar lo contrario.[2] Afirmar, por eso, que

[2] Alguien podría pensar que la tesis de Kripke de que hay conocimientos *a posteriori* y necesarios, permite justificar la afirmación de Kitcher. Pero en primer lugar, esta tesis no tiene nada que ver con las verdades matemáticas y, en segundo lugar, en nuestra opinión las dos famosas tesis de Kripke, a saber, que hay verdades contingentes *a priori* y verdades necesarias *a posteriori*, son falsas de toda falsedad.

el conocimiento matemático es necesario y empírico, es una enormidad que exige la más rigurosa prueba.

Un segundo argumento de Kitcher contra el apriorismo es que esta posición supone la existencia de una intuición especial y que es imposible fundar el conocimiento matemático en una intuición diferente de la empírica (K, 49 y ss.). No analizamos la refutación que hace el autor de la tesis kantiana que afirma que la matemática se basa en una construcción referida a las formas puras de la intuición sensible, porque creemos que la tesis kantiana es falsa. Pero en lo que sí tiene razón Kitcher es que toda tesis apriorista supone, de una manera u otra, la existencia de una intuición que puede llamarse *intuición intelectual*.

Kitcher dedica largos párrafos a atacar la intuición intelectual. Su argumentación se basa en su concepto del *a priori*: si hay una intuición intelectual *a priori* debe ser indubitable, pero como hay muchas personas que dudan de los conocimientos supuestamente adquiridos mediante esta intuición, no puede sostenerse que ella conduce a conocimientos fundados. Pero se olvida de hacer referencias a ciertas intuiciones que sí parecen infalibles como las de la aritmética elemental y de ciertos aspectos de la geometría y de la teoría de los conjuntos. Así, una proposición como $x' = y' \supset x = y$ funda su verdad en una evidencia intuitiva que no puede de ninguna manera ponerse en duda. Lo mismo puede decirse de la infinitud potencial de la sucesión de los números naturales: dado un número natural N es *absolutamente*

Desgraciadamente, debido a límites de espacio, aquí no podemos analizar y criticar las tesis de Kripke. Véase sobre esto, Kripke, "Meaning and Necessity", en Davidson y Harman, *Semantics of Natural Language*, Dordrecht, 1972; véase también, Stegmüller, "Designatoren und möglichen Welten", en su libro *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie*, Kröner, Stuttgart, 1975. Sobre una crítica de las tesis de Kripke véase Routley, *Exploring Meinong's Jungle and beyond*, pp. 147 y ss., Australian National University, 1980.

evidente que le sucede el número $N+1$. Esta intuición no puede fundarse en la observación empírica porque la acumulación de objetos tiene límites y rápidamente se llega a una situación en la que no puede agregarse nada. Sólo la capacidad del intelecto de captar *a priori* la posibilidad de agregar siempre una unidad a N, por más grande que sea N, permite comprender que la sucesión de los números naturales es potencialmente infinita.[3]

[3] Es cierto que algunos filósofos de las matemáticas como Esenin Volpin, sostienen que la intuición de la posibilidad de agregar siempre una unidad al número natural anterior sólo es válida para números no demasiado grandes, pues cuando los números son muy grandes nadie puede hacer la experiencia de agregar unidades ("The ultra-intuitionistic criticism and the antitraditional program for foundations of mathematics", A. S. Esenin Volpin, *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland, 1970). Pero la respuesta a esta posición es simple: 1) Esenin Volpin está equivocado. Nuestra intuición de la sucesión de los números naturales nos impone *a priori* que, por más grande que sea N, siempre le seguirá $N+1$; 2) suponiendo que no estuviera equivocado (por mor de la argumentación), no cabe la menor duda de que si se piensa en un número natural determinado, número que tengamos que utilisar en cualquier operación aritmética que estemos efectuando, se podrá siempre pensar, *de manera necesaria*, en dicho número más uno. Esta necesidad no es empírica. Los experimentos que se han hecho sobre la génesis del concepto del número natural en el pensamiento del niño muestran, de manera irrefutable, que el concepto de *la necesidad* con que un número natural sucede a otro no es una mera abstracción con base en la observación de manipulaciones empíricas de objetos. Desde luego, la experiencia, como ya lo habían visto muchos filósofos, entre ellos Aristóteles y Kant, es el punto de partida de todo pensamiento lógico-matemático y, en general, científico. Los conceptos lógicos y matemáticos se van elaborando poco a poco a través de experiencias que se van complicando paulatinamente (como inclusión de conjuntos finitos, asociación biunívoca de elementos de conjuntos finitos, equilibración de operaciones de agregación y disminución, etc.). A través de una génesis progresiva que avanza por etapas el niño se va dando cuenta de que todos los números que él maneja tienen un sucesor. Llega un momento en que se percata de que la sucesión de N a $N+1$ *es necesaria*. Esta *necesidad* no se deriva de ninguna observación referida a los elementos materiales que el niño está manejando. Simplemente, su concepto se va perfilando conforme avanza en edad hasta que, después de los doce o trece años, adquiere el claro concepto de la necesidad de la sucesión. Por eso, aunque Esenin Volpin tuviera razón, siempre habría un elemento irreductible a la experiencia en el pensamiento matemático. Pero los experimentos de laboratorio muestran que el niño llega, casi siempre después de los 10 años, a tener el

En cuanto a intuiciones geométricas, basta pensar en la transitividad de la congruencia (de la igualdad de figuras mostradas mediante superposición), en proposiciones de interidad (*betweenness*) como "Si A está entre B y C, está también entre C y B" o en proposiciones de separación en una circunferencia, si A está separado de C por B y D, B está separado de D por A y B.

Nuestras intuiciones evidentes relativas a los conjuntos son múltiples. Cuando se trata de conjuntos finitos resultan evidentes todos los axiomas de Zermelo-Fraenkel, incluyendo el axioma de selección y el de remplazo. Cuando se pasa a los conjuntos infinitos puede haber dudas en relación a algunos axiomas pero hay muchas proposiciones que son evidentes en relación a cualquier cardinalidad de los conjuntos mencionados, por ejemplo $A \cap B = B \cap A$, $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \supset A \subseteq C$, etc.

Si alguien duda de estas *evidencias*, su intelecto, *evidentemente*, tiene dificultades de funcionamiento. La necesidad con que se imponen satisface plenamente las condiciones estipuladas por Kitcher para que un conocimiento sea *a priori*: todo aquel que tiene experiencias semejantes cree que las proposiciones mencionadas (y muchas otras más) son verdaderas y la evidencia con que capta esta verdad es plena garantía de ella.

concepto de un número cualquiera N y de que N tiene necesariamente un sucesor $N+1$ y, a través de esta concepción, llega a la clara idea del infinito potencial y a saber que el conjunto de los números es infinito. La experiencia es, así, un trampolín desde el cual se tiene que saltar pero, una vez que se salta, el intelecto intuye, de manera irreductible a la experiencia, es decir, apriorísticamente, verdades necesarias y universales.

Sobre la génesis del concepto de número natural y los resultados que muestran que el concepto de infinitud no puede alcanzarse mediante procesos de abstracción aplicados a las operaciones con objetos concretos, véase Piaget, *Problèmes de la construction du nombre (Études d'Epistemologie Génétique, XI)*, Presses Universitaires de France, París, 1960.

La crítica que hace Kitcher al platonismo y al conceptualismo presenta aspectos muy interesantes. Afirma, con razón, que tanto el primero como el segundo son, entre otras cosas, intentos de explicar el conocimiento matemático *a priori*. En gran parte las críticas efectuadas son correctas, pero no es menester analizarlas para los fines de la presente argumentación.

Realizada la crítica del apriorismo, Kitcher pasa a exponer sus puntos de vista sobre la naturaleza empírica de la matemática. Su tesis fundamental es que un muy limitado conocimiento matemático puede obtenerse mediante la observación y la manipulación de las cosas comunes y que, sobre esta base, erigimos las poderosas teorías generales que integran dicho conocimiento (K, 92). En otras palabras, para explicar el origen del conocimiento matemático hay que elaborar una visión de la realidad matemática que sea compatible con la tesis de que nuestro conocimiento matemático puede originarse en la percepción sensible (K, *ibid.*).

El objeto de estudio de la matemática es la *estructura*. Las propiedades de las cosas de nuestra experiencia cotidiana nos revelan, por medio de la percepción, las estructuras que ejemplifican. Partiendo de éstas se encuentran todas las demás (K, 107).

Hechas estas afirmaciones, Kitcher comienza a desarrollar su tesis fundamental: el proceso que permite pasar de las estructuras descubiertas directamente en los objetos percibidos a las estructuras matemáticas más abstractas, es un proceso empírico. No interviene para nada una intuición intelectual irreductible a la perceptiva, una evidencia que nos revele *a priori* las estructuras más complejas.

La aritmética se constituye mediante operaciones que podemos hacer sobre los objetos que nos rodean. Según Stuart Mill, la aritmética versa sobre las "posibilidades permanentes de manipulación". Kitcher nos dice que la manipulación consiste en segregar y recombinar objetos (K, 108). Pero, en realidad, cuando se trata de operaciones largas y complicadas no puede decirse que efectuemos realmente todas las operaciones. Dadas nuestras limitaciones biológicas, las operaciones que efectivamente realizamos son limitadas. Por eso la aritmética es verdadera no en relación a las operaciones que efectuamos sino a las operaciones realizadas por un *agente ideal.* La aritmética es, así, una teoría idealizante: la relación entre la aritmética y las operaciones reales de los sujetos humanos es semejante a la que se da entre las leyes de los gases ideales y los gases reales que existen en nuestro mundo (K, 109). Pero, agrega Kitcher, esto no significa que exista algún ser misterioso dotado de poderes sobrehumanos. Las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de estipulaciones que establecemos, especificando determinadas condiciones relativas a la extensión de predicados que, en realidad, no son nunca plenamente satisfechos, sino sólo parcialmente, debido a las operaciones que realizamos (incluyendo operaciones físicas) (K, 110).

Para comprender bien lo que esto significa hay que remplazar las nociones de objetos matemáticos abstractos por nociones que se refieren a la actividad matemática; así, en lugar de utilizar el concepto de conjunto o colección, debemos utilizar la noción de *coleccionar.* En este sentido, hay dos nociones matemáticas básicas: *coleccionar* y *correlacionar* (K, 110, 111).

Partiendo de estas nociones, Kitcher reconstruye los postulados de la aritmética mediante un sistema que llama Aritmética de Mill (en honor a Stuart Mill, que con tanto énfasis defendió la posición empirista en la filosofía matemática del siglo pasado). Para formalizar debidamente los postulados, utiliza las siguientes nociones: operación unitaria (operación segregativa mediante la cual un solo objeto es segregado), operación de sucesor, operación de adición y operación de casabilidad[4] (no introduce la operación de multiplicación para simplificar la exposición, pero, evidentemente, esta operación se puede agregar sin complicaciones al sistema) (K, 112). Simbólicamente estas operaciones son "Ux", "Sxy", "$Axyz$", "Mxy" ("x es una operación unitaria", "x es una operación de sucesión respecto de y", "x es una adición respecto de y y z", "x y y son casables"). La operación de *casabilidad* es reflexiva, simétrica y transitiva, y corresponde a la noción operativa de igualdad.

Los axiomas de la Aritmética de Mill adquieren formas como las siguientes:

(1) $(x)Mxx$ (todo x es casable consigo mismo)

(2) $(x)(y)(Mxy \rightarrow Myx)$ (si x es casable con y, y es casable con x);

....

(4) $(x)(y)((Ux\&Mxy) \rightarrow Uy)$ (si x se segrega y x es casable con y, entonces y se segrega);

....

(6) $(x)(y)(z)(w)((Sxy\&Szw\&Myw) \rightarrow Mxz)$ (si x es una operación de sucesión de y, y z es una operación de sucesión de w, y y es casable con w, entonces x es casable con z)

....

Entre los axiomas del sistema se halla el de inducción y la definición recursiva de la adición. Además, para que el sistema pueda funcionar, es decir, para que en

[4] Traducimos "*matchability*" como "casabilidad". Creemos que traducir "a *matches* b" como "a casa con b" es adecuado desde el punto de vista matemático.

él puedan reproducirse los teoremas de la aritmética de Peano, hay que agregar postulados especiales entre los que están:

(14) $(x)(\exists y)Sxy$,

(15) $(x)(y)(\exists z)Azxy$.

Esto significa que no se puede desarrollar la aritmética si no se supone que hay un conjunto infinito de números naturales. En efecto, nuestra experiencia perceptiva no nos permite tener la seguridad de que dado un número cualquiera, siempre existirá su sucesor, ni que siempre exista la suma de dos números. Esta dificultad es superada, según afirma Kitcher, si se considera que la aritmética es una *teoría idealizante*. En este sentido los axiomas de la aritmética de Mill son *definiciones implícitas de un agente ideal* (K, 114, 115 y ss.).

Desarrollada su "teoría empirista" de la aritmética, Kitcher pasa a elaborar una "teoría empirista" de los conjuntos. No es necesario referirnos a los detalles porque la teoría de los conjuntos se establece sobre las mismas bases que la Aritmética de Mill. Más adelante veremos que las objeciones aplicables a la teoría aritmética de Kitcher, cuando se trata de la teoría de los conjuntos, tiene aún mayor fuerza.

El lector se habrá dado cuenta, por cierto, de que la gran dificultad con que tropieza la teoría de Kitcher es la introducción del *agente ideal* para explicar la posibilidad de desarrollar la teoría con relación a conjuntos infinitos de individuos. La única manera de concebir este agente que no sea contraria a una posición empirista, es considerarlo como una hipótesis semejante a las hipótesis de la física. Esto es lo que hace Kitcher comparando la hipótesis del *agente ideal* con la hipótesis de los *gases perfectos* (K, 117). Ahora bien, una hipótesis física, para merecer tal nombre, debe ser falsable. Así, la ley de Boyle-Charles de los gases perfectos ($PV = RT$, donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura y R una constante específica para cada gas) es, en principio, falsable. Aunque hasta ahora ha sido corroborada por todos los experimentos realizados, es perfectamente imaginable, en principio, que algún día, mediante métodos ultrarrefinados de medida, la ley pueda ser falsada; por ejemplo, que para algunos valores de P, R y T, el valor de V no corresponda al que se deduce de la fórmula.

¿Cómo puede concebirse una falsación en el caso del *agente ideal*? Kitcher no nos da ninguna pista. Es interesante observar que la parte dedicada a la hipótesis del *agente ideal* es la única poco rigurosa y hasta vaga del libro, pues Kitcher no da ninguna orientación sobre la manera como debe utilizarse dicha hipótesis para explicar hechos y para hacer predicciones. Por eso, para saber qué es lo que podría falsarla, hay que desarrollarla más allá de los propios planteamientos del autor.

Desde el punto de vista explicativo puede decirse que la hipótesis del *agente ideal* explica bastante bien el hecho de que los *agentes reales* cada vez que, contando, llegan a un número natural N, puedan de manera inmediata llegar a $N+1$. Si, de acuerdo con la hipótesis, se puede contar uno por uno todos los elementos del conjunto infinito de los números naturales, entonces debe ser siempre posible, cuando se llega a un número natural cualquiera, pasar al que le sigue. Pero cuando se trata de explicar no ya el avance paso a paso en la sucesión de los números naturales sino, por ejemplo, una cosa tan innegable como el hecho de que la afirmación de que *todo número natural tiene un sucesor* es una proposición necesariamente verdadera, no se encuentra ninguna posibilidad de éxito. Del hecho de que el *agente ideal* sea capaz de recorrer por completo la totalidad de los elementos de cualquier conjunto, por más grande que éste sea, no se puede deducir que todo número natural tiene, *necesariamente*, un sucesor. ¿Por qué no puede darse el caso de que exista un número natural que no tenga ningún sucesor inmediato?

Señaladas las dificultades que se presentan en la explicación, pasemos a la predicción. ¿Cómo podría falsarse una predicción respecto del *agente ideal*? Aquí la insuficiencia de la hipótesis es mucho más grande que en el terreno explicativo. Para falsarla habría que deducir de ella una predicción que dejara de cumplirse por lo menos una vez. Pero no vemos qué predicciones falsables puedan hacerse. En efecto, una predicción de esta naturaleza tendría que ser sobre la posibilidad de recorrer, uno por uno, todos los miembros de sucesiones infinitas. Por ejemplo, si la hipótesis del *agente ideal* es verdadera, entonces debe ser posible avanzar paso a paso en la sucesión de los números naturales. Ésta predicción no podrá falsarse jamás puesto que, como acabamos de ver, cada número natural tiene, necesariamente, un sucesor. Además, en el conocimiento de esta verdad se cumplen todas las condiciones planteadas por Kitcher para que un conocimiento sea *a priori*.

Seamos entonces un poco más audaces y hagamos la siguiente deducción: un agente real debe ser capaz de recorrer todos los elementos, sin que falte ninguno, de un ordinal de segunda especie. Con plena evidencia sabemos que esto es imposible. Si se acepta la deducción, la predicción no se cumple y, en consecuencia, resulta falsa. Kitcher podría argüir que su hipótesis no significa que los *agentes reales* puedan hacer todo lo que hace el *agente ideal*, así como las variables de la ley de Boyle-Charles no pueden, tampoco, asumir todos los valores. De acuerdo; pero existe, sin embargo, una diferencia radical entre ambas limitaciones: en el caso de la ley física, como hemos señalado, dentro del marco de variación de sus variables, puede concebirse que la ley deje alguna vez de cumplirse; en cambio, si se restringe el marco de variación del *agente real* a los números naturales que pueda, efectivamente, contar, es inconcebible que alguna vez el agente alcance un número N y que no pueda alcanzar el número $N+1$. Y no puede concebirse esto porque la posibilidad de pasar de N a $N+1$ se enuncia mediante una proposición de verdad necesaria. Para concluir: las proposiciones que enuncian las hipótesis de las teorías físicas son contingentes, las que enuncian verdades aritméticas son necesarias. Por eso las primeras son falsables, mientras que *no tiene sentido* hablar de falsación en el caso de las segundas.[5]

Si se pasa de la aritmética a la teoría de los conjuntos, la posición de Kitcher es aún menos sostenible. Cuando en el desarrollo de dicha teoría se hacen referencias a conjuntos infinitos, jamás se piensa en algún *agente ideal* que sea capaz de recorrer uno por uno todos los elementos que lo integran. Así, en la *inducción transfinita* se hace referencia a infinidades de elementos de manera directa, sin ninguna necesidad de pensar

[5] Podría pensarse que la teoría de los *ordinales constructibles*, muy importante para el desarrollo de la teoría de los conjuntos (por ejemplo, para elaborar "modelos internos" de la teoría), no puede establecerse sin hacer la hipótesis del *agente ideal*. Pero esto sería un error. Los ordinales constructibles, a pesar de su nombre, no se construyen en sentido estricto, pues, a partir de W, todos son transfinitos. Simplemente, se definen como los ordinales que poseen determinada propiedad. La totalidad de los ordinales constructibles no es sino la totalidad de los ordinales que cumplen determinada condición.

Lo que sí puede hacerse es *suponer* que un *agente ideal*, tal como lo concibe Kitcher, podría recorrerlos uno por uno hasta agotarlos; pero esto no significa que sin esta hipótesis no se puedan comprender ni se puedan hacer demostraciones sobre sus propiedades y relaciones. Por otra parte, la hipótesis de que un *agente ideal* pueda pensarlos uno por uno, no puede falsarse de ninguna manera confrontando algunas de sus consecuencias deductivas con la experiencia. ¿Con qué tipo de experiencia habría que hacer la demostración?

en alguien, aunque sea hipotéticamente, que los recorra uno por uno. El teorema de la inducción transfinita, fundamental para desarrollar la teoría de los conjuntos, nos dice lo siguiente: si el hecho de que todo ordinal $\alpha > \beta$ (siendo β cualquier ordinal) tenga la propiedad P implica que β también la tiene, entonces todo ordinal tiene la propiedad P. Para comprender este enunciado no es necesario pensar, uno por uno, en todos los ordinales menores que β. La situación es semejante a la que se produce cuando uno se refiere a ciertos conjuntos finitos. Por ejemplo, cuando alguien dice: "todos mis condiscípulos en el Colegio Italiano eran hijos o nietos de italiano", el que escucha esta frase la comprende perfectamente bien y, sin embargo, no sabe cuántos eran los condiscípulos de quien la enuncia, ni cómo eran. El enunciado se refiere a todos los elementos que tienen una propiedad común: la de ser condiscípulos de la persona que enunció la frase y, aunque se comprende con claridad perfecta, no es necesario conocer a todos los individuos que integran el conjunto caracterizado por la propiedad común. Lo mismo sucede con los ordinales menores en el enunciado del teorema de *inducción transfinita*. Por eso en este caso, y en innumerables enunciados y demostraciones de la teoría de los conjuntos y de otras teorías matemáticas, la hipótesis del *agente ideal* no puede falsarse porque ni siquiera tiene sentido matemático.

Creemos que los anteriores análisis muestran la insostenibilidad de la hipótesis del *agente ideal* y de la tesis de que la verdad de las proposiciones matemáticas se fundamenta de la misma manera que la de las hipótesis físicas. Pero la hipótesis del *agente ideal* no es el único argumento de Kitcher. Para probar su tesis empirista, Kitcher recurre a ejemplos de la historia de la matemática demostrando un gran conocimiento de ésta y presentando ejemplos de gran interés teórico. Su tesis central es que la historia de la matemática, con algunas variaciones de detalle, puede compararse a la de las ciencias empíricas. Reconoce que una de las diferencias es que el conocimiento matemático es acumulativo en un sentido en que no lo es la ciencia empírica (K, 161). Pero no puede negarse que el cambio matemático es un caso especial de cambio científico. Esta afirmación es una simplificación tal vez excesiva de los hechos, pero nos da una idea de lo que realmente sucede en las ciencias exactas (K, 154).

Para probar su tesis, Kitcher hace diversos análisis, con notable conocimiento de causa y brillante estilo pedagógico, de casos en los que se produce un verdadero cambio en la manera de concebir los conceptos y los razonamientos matemáticos. Y afirma que las pautas de este cambio son *racionales*. En un principio, cuando el lector encuentra la expresión "racional" siente un inevitable desconcierto. ¿Cómo un empirista puede hablar de racionalidad? Pero luego se va aclarando el sentido en que emplea la palabra y se ve que nada tiene que ver con la significación del término cuando es utilizado por filósofos de tendencia racionalista.

Comenzando desde una práctica matemática particular, un matemático (o un grupo de matemáticos) propone un método para resolver algún problema que es considerado importante por la comunidad matemática. Esta propuesta genera un nuevo lenguaje (por lo menos en partes importantes de la aplicación del nuevo método) que no es bien comprendido por la comunidad científica en el sentido de que nadie puede presentar un concepto claro de los objetos (referentes) a los que se refieren algunos de los nuevos enunciados; además puede hacer, en la aplicación de su método, algunos tipos de *razonamiento* que no pueden integrarse con los tipos de demostración aceptados en la época. Estos razonamientos pueden considerarse como *no rigurosos*. A pesar de estas deficiencias, el método propuesto logra aceptación debido a su poder de resolver importantes problemas y la práctica imperante se amplía para incluirlo (K, 193). El método se sigue aplicando con una serie de importantes consecuencias (permite resolver otros problemas que antes no podían resolverse, sugiere la utilización de nuevos métodos de razonamiento, etc.), hasta que llega un momento en que las dificultades para comprender el lenguaje y los razonamientos utilizados se tornan lo bastante agudos como para inhibir la aplicación del método a nuevos problemas considerados como importantes con relación al propio desarrollo teórico, hecho posible por su aplicación (K, 194). Cuando se llega a esta situación, los matemáticos comienzan a buscar un método que puede remplazar al que están usando y que sea suficientemente riguroso. En el proceso, el lenguaje utilizado puede experimentar cambios, pueden agregarse nuevos enunciados, incluso nuevos axiomas, a las antiguas teorías y pueden tirarse por la borda concepciones matemáticas anteriores (K, 194).

Pero una vez que se aceptan las modificaciones no desaparecen los problemas mencionados y, por eso, la exigencia de rigor y de esclarecimiento conceptual se van haciendo cada vez más fuertes. De esta manera, los razonamientos no rigurosos en determinado campo de la matemática, se van remplazando por razonamientos rigurosos. Cuando se logra hacer esto, partiendo de premisas bien establecidas, se llega, mediante un razonamiento que consiste en una sucesión de pasos elementales válidos, a la misma conclusión a la que había llegado anteriormente mediante un razonamiento poco riguroso. Esta nueva manera de proceder nos permite explicar cómo es que el razonamiento original nos llevó a una conclusión verdadera. El nuevo razonamiento rigorizado nos permite, así, comprender el éxito del razonamiento originario (K, 213).

Pero no hay que creer que la rigorización se produce siempre que hay conceptos y razonamientos oscuros en matemáticas. Históricamente los matemáticos han procedido sin preocuparse por la rigorización a pesar de que tenían clara conciencia de la oscuridad de los razonamientos que estaban realizando para demostrar teoremas importantes. Solamente cuando se dan cuenta de que no pueden resolver problemas importantes sin aclarar conceptos y rigorizar razonamientos, comienzan a ocuparse racionalmente de los fundamentos, es decir, de los conceptos básicos y de los razonamientos sólidos. Por ejemplo, sólo cuando surgen las paradojas de la teoría de los conjuntos, paradojas que amenazan derrumbar la gigantesca obra de sistematización hecha por Cantor y por Dedekind, es que comienza el gran movimiento filosófico-matemático para aclarar el concepto de conjunto y rigorizar la deducción lógica aplicable a la teoría de los conjuntos y, en general, a todo razonamiento matemático (K, 215 y 216).

Para ilustrar sus puntos de vista, Kitcher da varios ejemplos históricos que, en nuestro concepto, constituyen la parte más interesante del libro. El más notable de todos es el largo texto en que, para ilustrar sus puntos de vista sobre la evolución racional de los procedimientos matemáticos, especialmente de esclarecimiento conceptual y rigorización deductiva, recurre a la historia del análisis. El estudio del desarrollo del análisis, según el autor, proporciona el mejor ejemplo de cambio matemático *racional* (K, 229).

Kitcher llama "cálculo" a las teorías de Newton, Leibniz, los hermanos Bernouilli y el marqués de l'Hôpital. A comienzos del siglo XIX el cálculo se había transformado en una nueva disciplina que, con toda propiedad, se puede llamar "análisis". Algunas de las nuevas expresiones introducidas por los pioneros no se comprendían bien y algunos de los nuevos razonamientos utilizados en las demostraciones eran, sin duda, oscuros. A pesar de ello fueron aceptadas muy rápidamente por la comunidad matemática y la aceptación fue *eminentemente racional* (K, 230). La aceptación de la comunidad se debió a que los nuevos métodos del cálculo permitían resolver de manera general un conjunto de problemas que presentaban muchas dificultades a los matemáticos de la época y que sólo podían resolverse en relación con casos particulares, utilizando métodos complicados y que, a veces, ni siquiera se podían resolver. El nuevo enfoque lo introducen, en forma independiente, Newton y Leibniz, mediante los conceptos de fluxión y de infinitesimal, respectivamente, y gracias a las operaciones que se pueden hacer con ellos. Tanto el uno como el otro exhortan a los matemáticos de la época a aplicar y a ampliar sus métodos. El llamado es escuchado y la nueva metodología se desarrolla con rapidez espectacular (K, 234).

Desde luego, tanto Newton como Leibniz tienen conciencia de las oscuridades y dificultades teóricas que presenta su nuevo método. Sus sucesores, especialmente Jean Bernouilli y de l'Hôpital, tratan de rigorizar el cálculo de Leibniz, cosa que el propio Leibniz aprueba. Pero se encuentran con la dificultad de que las operaciones algebraicas con los infinitesimales conducen a inconsistencias. Newton insistió más que Leibniz en el rigor y su afán de superar las dificultades de su cálculo de fluxiones lo llevó cerca del concepto de límite. Sin embargo no pudo llegar a la claridad en los fundamentales problemas de convergencia, imprescindibles para esclarecer la noción de límite (K, 238).

Esta situación se mantiene hasta los inmensos progresos que Euler realiza en el desarrollo del cálculo. Euler crea una refinada metodología para el tratamiento de las series infinitas y logra resolver, en muchos casos, la suma de infinitos términos. Pero considera que es lícito el uso de series divergentes, cuyos fundamentos quedan oscuros y no logra aclarar. También avanza un buen trecho en la utilización de ecuaciones diferenciales para la solución de problemas físicos (por ejemplo, el movimiento armónico), pero no ve claro el problema fundamental de representar una función arbitraria por medio de series (K, 241 y ss.). Sin embargo, en todo lo que hace procede *racionalmente*, incluso en el uso de series divergentes, porque logra llegar a resultados matemáticamente importantes que permiten resolver problemas planteados por sus predecesores.

Las oscuridades conceptuales y la falta de rigor de los razonamientos que se encuentran en el extraordinario desarrollo del cálculo efectuado por Euler y los demás matemáticos de la segunda mitad del siglo XVIII se superaron gracias al concepto de límite que introdujo Cauchy. Lo importante, según Kitcher, no es que Cauchy se sintiera angustiado por la falta de rigor y de claridad de sus antecesores, quienes se preocuparon muy poco del rigor. Lo importante es que introduce el concepto de límite porque el problema de representar funciones arbitrarias por medio de series se había convertido en el problema central de la matemática de su tiempo. Cauchy se da cuenta de que las técnicas algebraicas disponibles en la época para manipular las series infinitas conducían, a veces, a conclusiones falsas (K, 248). Por las mismas razones, es decir, para poder tratar problemas importantes que no habían podido tratar satisfactoriamente sus antecesores, Cauchy propone una nueva y más rigurosa definición de función continua. Estas innovaciones lo llevan a la conclusión de que el razonamiento adecuado en análisis debe ser algebraico y no geométrico.

Pero los propios métodos de Cauchy condujeron a nuevos problemas cuya solución exigía nuevos avances en el esclarecimiento y rigorización de conceptos. Sobre todo fueron dos problemas los que condujeron a los sucesores de Cauchy, especialmente a Weierstrass, a realizar estos nuevos avances: la conservación en el lenguaje matemático del concepto de infinitésimo y la búsqueda de criterios para saber cuándo existe el límite de una serie. En esta parte del libro, Kitcher hace un soberbio análisis de cómo la utilización del concepto de infinitésimo conduce, en una importante demostración de Cauchy, a cometer errores en el empleo de lo que en lógica moderna se llaman cuantificadores. Los trabajos de Dirichlet, Seidel y especialmente Weierstrass, corrigieron este error. Para lograr esto, Weierstrass tuvo que eliminar definitivamente el concepto de infinitésimo. Pero los esfuerzos y brillantes logros de rigorización de Weierstrass no fueron tampoco realizados por exigencias de pura fundamentación; el horizonte metateórico, como en los casos anteriores, queda implícito. Lo que interesa a Weierstrass es la solución de problemas planteados por la teoría de las ecuaciones elípticas (K, 254 y ss.; 258).

El intento de encontrar criterios de convergencia llevó luego a Weierstrass y a Dedekind a elaborar la teoría de los números reales. La teoría del corte de Dedekind permite hacer una definición rigurosa de número real (K, 265). Kitcher termina su exposición de la evolución del análisis en esta etapa aunque, desde luego, señala que las teorías consideradas plantean nuevos cuestionamientos cuya solución exige, a su vez, nuevos esclarecimientos conceptuales y mayor rigor deductivo. El horizonte de la teoría de los conjuntos está a la vista (K, 267 y 268).

No cabe duda de que la exposición de Kitcher sobre el desarrollo del análisis es brillante y que constituye un aporte a la historia de la matemática. Sin embargo, no se encuentra en ella ninguna relación con su tesis fundamental de que toda la matemática se funda sobre bases empíricas. Lo que se desprende de su concepto de *racionalidad*, sobre el que insiste múltiples veces, es que Kitcher piensa como un pragmatista. Una innovación matemática, ya sea como esclarecimiento conceptual, como adición de nuevos axiomas, como rigorización en el razonamiento, es *racional*, nos dice, cuando contribuye a resolver un problema que antes no podía resolverse. Cuando la posibilidad de resolver el problema se hace efectiva, la comunidad matemática, procediendo *racionalmente*, acepta la nueva metodología sin que le importe el hecho de que utilice conceptos oscuros e incomprensibles, y métodos de demostración nada rigurosos.

Si, como se desprende de las afirmaciones de Kitcher, lo único que se requiere para que una metodología matemática sea *racional* es que permita resolver problemas que, en una etapa de la historia, interesan a la comunidad matemática, entonces la racionalidad matemática consiste en ofrecer posibilidades de solución, no de comprensión. Aunque no se trata, aquí, de éxito en la acción, sino de éxito en la solución. Y si este éxito se considera *racional* aunque los conceptos utilizados no se comprendan (por lo menos en su totalidad) y los razonamientos realizados no sean considerados rigurosos, entonces se está muy cerca del pragmatismo.

Pero si se analizan con cuidado los ejemplos que da Kitcher en relación al desarrollo del cálculo y del análisis, se descubre que la racionalidad matemática no puede reducirse exclusivamente al éxito en la solución de problemas. Este éxito no es arbitrario sino que se comienza a utilizar porque permite *comprender racionalmente* lo que debe hacerse para resolver un problema que antes no se podía solucionar. Consideremos, por ejemplo, la medida del largo de las líneas curvas o de las áreas de las superficies limitadas por líneas curvas. Es *evidente* que estas magnitudes no pueden medirse utilizando unidades rectilíneas, porque estas unidades no pueden sobreponerse sobre lo que se quiere medir, sobre todo si estas curvas son complicadas.

Es evidente asimismo que si se utilizan unidades de medida cada vez más pequeñas, y las sobreponemos a la línea (o superficie) curva, el largo (o el área) que resulta de la suma de dichas unidades se irá aproximando cada vez más al verdadero largo (o a la verdadera área) de la línea curva (o de la superficie). Esta *evidencia intelectual* la tuvieron los griegos, como la tenemos nosotros hoy día. Y por eso fueron capaces de medir el área del círculo y el largo de la circunferencia mediante el método de la exhaución, antecesor directo del método de los límites. El método de Newton y de Leibniz tiene éxito ya que no es sino una generalización y sistematización del método descubierto por los griegos. Empequeñeciendo las unidades de medida, logran acercarse cada vez más a la medida exacta de la línea o la superficie curva, o a la velocidad instantánea. Pero al hacer esto se encuentran con el problema de que, mientras las unidades empleadas sean diferentes de cero, su suma no podrá coincidir definitivamente con la magnitud que se quiere medir. Siempre será mayor o menor que la cantidad buscada.

Hasta aquí el proceso es perfectamente *racional* porque se *comprende perfectamente*. Si no hubiera sido por esta *intelección* universalmente aceptable para nuestra razón, el cálculo jamás habría nacido. Pero cuando los creadores del cálculo se dan cuenta de que mientras las unidades de medida sean diferentes de cero nunca podrán llegar a la medida perfecta, dan un paso que no es racional puesto que no se funda en intelecciones universalmente aceptables: crean el concepto de cantidades que son más pequeñas que todas las pensables pero que no son, sin embargo, cero. Este paso era inevitable para hacer el total ajuste entre la suma de las unidades de medida y las magnitudes que se querían medir. Pero, desgraciadamente, conduce a un callejón sin salida, porque si una cantidad es menor que toda cantidad pensable, tiene que ser cero. Y si es cero su suma con las demás unidades, que también son cero, no puede ser sino cero. Y esto atenta contra el principio de no contradicción, que es un principio lógico fundamental.

La situación es, pues, la siguiente. Es cierto que si se consideran unidades más pequeñas que todos los números reales positivos concebibles y se suman, se resuelve el problema de la medida. Por eso se procede a hacer la suma y se aceptan sus resultados. Pero éstos no se aceptan única y exclusivamente porque permiten solucionar el problema, sino porque son el último paso de un proceso perfectamente racional: mientras más pequeña sea la unidad rectilínea de medida, mayor será la aproximación a la medida de la línea o de la superficie (o volumen) curva. Al dar el paso final se tiene clara conciencia de la dificultad teórica que presenta el método. El infinitésimo no es sino la culminación de la reducción de tamaño de las unidades rectilíneas. Sólo que esta culminación se encuentra con dificultades teóricas que parecen insuperables. Todo el camino es racional y sólo el último paso es incomprensible. Pero si todo el camino no hubiera sido racional, jamás se habría aceptado el último paso. Al aceptarlo se siente que debe haber algún procedimiento que le permita también ser racional. El enorme éxito del nuevo método hace que, a pesar de esta oscuridad en el último paso, se le aplique cada vez con mayor entusiasmo. Pero nunca deja de existir la conciencia de que el concepto de infinitésimo es algo que no está bien fundado racionalmente. Luego, el propio desarrollo de la disciplina matemática conduce a situaciones en que la imperfección racional del último paso, es decir, del infinitésimo, se hace insoportable. Pero el propio desarrollo proporciona, ahora, medios conceptuales para superar la imperfección racional que siempre se ha reconocido. Y entonces se da un paso decisivo al introducir el concepto de *límite*. Es cierto que este tipo de pasos se dan porque se quieren resolver problemas reales, pero no es menos cierto que sólo se pueden dar suponiendo que la metodología que se quiere superar se basa en gran parte en supuestos racionales evidentes. Así, el concepto de límite permite utilizar la parte racional del cálculo, a saber, el empequeñecimiento sin término de las unidades rectilíneas de medida, sin que sea necesario que estas unidades se reduzcan a infinitésimos. El hecho de que la suma de las unidades de medida se aproxime arbitrariamente al límite, permite *comprender racionalmente* que el límite es la medida exacta de la magnitud curvilínea que se quiere medir.

¿En dónde está la relación de la matemática con la experiencia sensible en todo este proceso? ¿Cómo puede pensarse que el concepto de aproximación arbitraria a un límite tiene un origen empírico, cuando lo que nos enseña la experiencia es que sólo podemos aproximarnos hasta cierta distancia y que después todo se confunde?

Pero hay más. El propio concepto de infinitésimo, a pesar de que en relación con los recursos conceptuales disponibles en la época en que se inventa el cálculo parece ser contradictorio, resulta, a la nueva luz de los métodos metateóricos, que no es en sí mismo contradictorio. Es perfectamente posible considerar que existen cantidades menores que cualquier número real positivo y que, sin embargo, son diferentes de cero. El análisis no estándar creado por Robinson reivindica el concepto de infinitésimo y muestra que Newton y Leibniz no estaban errados al considerar cantidades infinitesimales que podían sumarse y dar como resultado cantidades finitas. No puede decirse, por eso, que los métodos de Newton y Leibniz eran irracionales y que se aceptaban sólo porque permitían resolver problemas que eran considerados importantes por la comunidad matemática. Lo que sucedía era que el concepto de infinitésimo tenía una innegable racionalidad, pero que esta racionalidad, ya fuera a través del concepto de límite, ya fuera a través del propio concepto de infinitésimo, no podía expresarse claramente debido a la carencia de recursos teóricos. Esto sucede con toda teoría científica que representa una gran innovación.

De manera general puede decirse que, por lo menos en el campo de la matemática y de la lógica, los grandes avances se realizan siempre siguiendo una vía de racionalidad, en el sentido de que los pasos que conducen a la concepción final se fundan en evidencias intelectuales universalmente válidas. Pero estas evidencias desembocan en conceptos nuevos que con frecuencia presentan oscuridades porque son tan profundos que los creadores de las nuevas teorías carecen de instrumentos conceptuales y lingüísticos para analizarlos. Pero los nuevos conceptos, a pesar de las oscuridades señaladas, se tienen que seguir usando porque *las evidencias racionales conducen hacia ellos* y es imposible apartarse del camino que se ha recorrido. Una vez puesto en marcha el proceso racional que conduce hacia las nuevas concepciones, se desarrolla según una dinámica propia que nada tiene que ver con la experiencia sensible. Esta dinámica conduce a la elaboración de nuevos medios expresivos (Leibniz siempre tuvo conciencia de esto) que permiten análisis cada vez más ceñidos de las nuevas concepciones. De esta manera se llega, al fin, a esclarecer lo que había permanecido oscuro. Este avance abre nuevos horizontes y conduce, de manera racional, sobre la base de intelecciones evidentes, a nuevos conceptos y métodos de razonamiento. Conforme avanza la teoría, se vuelve a producir una situación análoga a la anterior pero en un plano más alto de rigor y con mayor profundidad conceptual. Todo esto se realiza en forma estrictamente intelectual, sin ningún contacto con la experiencia sensible y, la mayoría de las veces, sin tener para nada en cuenta la aplicabilidad práctica de las nuevas teorías.