*CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía.* Vol. 44, No. 131 (agosto 2012): 27–53

# "UNA IMAGEN DE LA REALIDAD GEOMÉTRICA": LA CONCEPCIÓN AXIOMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE HILBERT A LA LUZ DE LA *BILDTHEORIE* DE HEINRICH HERTZ

EDUARDO N. GIOVANNINI
Universidad Nacional del Litoral/CONICET
engiovannini@conicet.gov.ar

RESUMEN: El artículo presenta una interpretación del abordaje axiomático temprano a la geometría de David Hilbert, *i.e.*, el desarrollado entre 1891 y 1905. Se sostiene que diversos aspectos de este abordaje, a primera vista problemáticos, se pueden comprender mejor si se contrastan con una de sus influencias más importantes en este periodo: la teoría pictórica [*Bildtheorie*] de Heinrich Hertz. En particular se argumenta que un análisis de la concepción axiomática de Hilbert a la luz de la teoría de Hertz permite aliviar ciertas tensiones en la concepción hilbertiana; más precisamente, las tensiones que surgen de mantener, al mismo tiempo, una posición axiomática abstracta o formal y una concepción empirista de la geometría, que la considera una ciencia natural.

PALABRAS CLAVE: filosofía de la geometría, método axiomático, empirismo, intuición, formalismo

SUMMARY: The paper outlines an interpretation of David Hilbert's early axiomatic approach to geometry, i.e., the one developed between 1891 and 1905. It is argued that several aspects of this approach, which could be initially seen as problematic, can be better understood when Hilbert's view is contrasted with one of its most important influences in this period: Heinrich Hertz's "picture theory" [*Bildtheorie*]. Especially, it will be claimed that an examination of Hilbert's axiomatic conception in the light of the Hertzian view of mechanical theories can be used to relieve the former from certain manifest tensions; more precisely, the tensions that arise when maintaining, at the same time, an abstract or formal axiomatic position and an empiricist view of geometry, which regards it as a kind of natural science.

KEY WORDS: philosophy of geometry, axiomatic method, empiricism, intuition, formalism

## 1. *Introducción*

Los estudios sobre la concepción axiomática desarrollada por David Hilbert (1862–1943) en las primeras décadas del siglo XX han recibido recientemente un renovado interés. En parte, ello se explica en virtud de la publicación —todavía en curso— de un volumen importante de sus manuscritos, consistentes en notas cuidadosamente elaboradas para cursos (*Vorlesungen*) sobre fundamentos de la matemática y de la física, esparcidos por un periodo de casi cuarenta años.[1] El atractivo de estos manuscritos descansa en que en ellos, Hilbert se permite acompañar los diversos resultados matemáticos alcanzados con reflexiones de sus implicancias filosóficas y metodológicas. El estudio de estos nuevos escritos ha dado lugar así a una revisión de las interpretaciones "formalista" e "instrumentalista" ampliamente difundidas de su programa —tanto en su etapa geométrica como en la aritmética— para la fundamentación de la matemática.[2]

En el caso de su temprana concepción axiomática de la geometría, *i.e.*, aquella desarrollada entre los años 1891 y 1905, el estudio de estas fuentes arroja resultados sumamente interesantes. En primer lugar, en ellas encontramos una concepción de la geometría en cierta medida sorprendente para aquellos más familiarizados con la imagen del Hilbert formalista, preocupado por reducir distintas ramas de la matemática clásica a una colección de sistemas axiomáticos abstractos, completamente formalizados, construidos a partir de un conjunto de axiomas o postulados dados arbitrariamente y sin un significado intrínseco. Por el contrario, estas fuentes muestran a un Hilbert sumergido en la tradición de la geometría del siglo XIX, principalmente en la línea desarrollada por geómetras alemanes.

Ahora bien, la concepción de la geometría presentada por Hilbert en estos manuscritos, además de resultar en cierta medida desconcertante para aquellos más habituados a su célebre monografía *Fundamentos de la geometría* (1899), incorpora una serie de elementos que, al menos a primera vista, pueden resultar problemáticos e in-

[1] Para una idea general del proyecto editorial de la *Hilbert Edition*, véase Majer y Hallett 2004. En pocas palabras, estos manuscritos pertenecen a dos clases. Por un lado, los primeros cursos sobre geometría consisten en una serie de notas elaboradas por el propio Hilbert (1891, 1894, 1898a, 1898c). Por otro lado, a partir de "Elemente der Euklidischen Geometrie" (1898b), Hilbert adopta la metodología de designar, al comienzo de cada clase, a un alumno para su redacción (*Ausarbeitung*). Tras una revisión por parte de Hilbert, los cursos eran depositados en la biblioteca del Instituto de Matemática de la Universidad de Gotinga, donde podían ser consultados por los estudiantes. Ello demuestra que, aunque en muchos de estos manuscritos las ideas no se hallan completamente desarrolladas, Hilbert los elaboró pensando que podían ser libremente consultados por cualquier interesado. Algunos de los alumnos —y más tarde colaboradores— encargados de la redacción de estas notas fueron: Max Born, Ernst Zermelo, Paul Bernays, Hermann Weyl y Richard Courant. En la actualidad estos cursos se encuentran en la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen*, *Handschriftenabteilung* y en el *Mathematisches Institut*, *Lesesaal*, *Georg-August-Universität Göttingen*. Agradezco a la biblioteca, en especial al doctor Helmut Rohlfing, el permiso para citar dichas fuentes.

[2] El significado de estos manuscritos para la interpretación del "programa de Hilbert", en su etapa dedicada a la fundamentación de la aritmética, ha sido analizado por Hallett 1994 y Sieg 1999.

cluso contradictorios entre sí. En particular, hay un rasgo llamativo que consiste en la simultaneidad de una posición axiomática formal y una concepción empirista de la geometría, que la considera una ciencia natural. Dada esta tensión manifiesta, sostendré que el modo en que estos dos elementos se relacionan en la temprana concepción de la geometría de Hilbert se puede comprender mejor cuando se analiza una de las influencias centrales en el surgimiento de su nuevo método axiomático formal. Me refiero a la famosa *Bildtheorie* o "teoría pictórica" de Heinrich Hertz (1857–1894), presentada en su notable obra *Principios de la mecánica* (1894). Independientemente de las semejanzas en la posición de ambos autores, ahora se puede documentar esta influencia gracias a la evidencia textual que aportan las notas para cursos de Hilbert.

Luego, si bien esta influencia ha sido señalada en algunos trabajos,[3] considero que todavía hay coincidencias entre ambos autores que merecen ser destacadas y analizadas en mayor profundidad. Tal tarea contribuye, en mi opinión, a una comprensión históricamente mejor contextualizada de las ideas tempranas de Hilbert en torno a los fundamentos de la matemática. Además, aporta elementos interesantes para reexaminar su programa posterior para la fundamentación de la aritmética y el análisis.

El artículo adoptará el siguiente orden. Primero describiré la concepción de la geometría elaborada por Hilbert en los cursos antes mencionados, destacando sus tesis principales. En segundo lugar, expondré y analizaré las referencias textuales de Hilbert a la teoría pictórica de Hertz. En seguida, haré una breve mención a la *Bildtheorie* y sus ideas más relevantes para nuestro caso. Finalmente, examinaré las relaciones entre ambos autores y resaltaré las consecuencias que tiene la relación hallada para la interpretación de la temprana posición axiomática de Hilbert en su aplicación a la geometría.

## 2. *La temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert*

### 2.1. La geometría: "la más completa de las ciencias naturales"

En todas las notas para cursos previas a *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), y en las inmediatamente posteriores, es posible identificar con facilidad una tesis filosófica fundamental respecto de la naturaleza de las teorías matemáticas en general. Se trata de una posición muy influyente en el siglo XIX —principalmente entre ma-

[3] *Cfr.* Majer 1998 y Corry 2004.

temáticos de habla alemana—, que Gauss expresó quizás por primera vez de un modo explícito:

> Según mi más profundo convencimiento, la teoría del espacio tiene en nuestro conocimiento *a priori* un lugar completamente distinto que la pura teoría de las magnitudes [*reine Grössenlehre*]; nuestro conocimiento de la primera carece de aquel completo convencimiento de su necesidad (y también de su verdad) que es propio de la segunda. Debemos admitir humildemente que, mientras que el número es sólo un producto de nuestro pensamiento, el espacio tiene además una realidad fuera de nuestro pensamiento, a la cual no podemos prescribirle *a priori* sus leyes. (Gauss a Besell, 9 de abril de 1830; en Gauss y Bessel (1880), p. 497)[4]

De acuerdo con esta tesis, dentro de las matemáticas es preciso distinguir entre aquellas disciplinas que se basan exclusivamente en el pensamiento puro y aquellas que, al menos en parte, tienen un origen empírico. En otras palabras, en virtud de su origen epistemológico, debe diferenciarse entre la *matemática pura* (aritmética, álgebra, análisis, teoría de números, teoría de funciones, etc.) y la *matemática mixta*, en donde se encuentran la geometría y la mecánica. Hilbert reproduce esta distinción en un pasaje muy elocuente, en la introducción de su primer curso dedicado a la geometría, en 1891:

> La geometría es la ciencia de las propiedades del espacio, y se diferencia sustancialmente de las ramas matemáticas puras, como la teoría de números, el álgebra y la teoría de funciones. Los resultados de estas disciplinas se pueden alcanzar a través del pensamiento puro, en tanto que los hechos afirmados se reducen por medio de claras inferencias lógicas a hechos más simples, hasta que finalmente sólo se vuelve necesario el concepto de número entero. Toda proposición incluso más fundamental [*tief liegende*] y complicada de la matemática pura finalmente se debe poder reducir a relaciones acerca de los números enteros 1, 2, 3, [ . . . ]. Al concepto de número entero podemos llegar a través del pensamiento puro, quizás cuando yo cuento mis pensamientos. Métodos y fundamentos de la matemática pertenecen al pensamiento puro. No necesito nada más que el pensamiento lógico puro, cuando me ocupo de la teoría de números o del álgebra. (Hilbert 1891, p. 22)

Sin embargo, en la geometría sucede algo completamente distinto:

[4] Para un análisis de la distinción gaussiana entre geometría y aritmética, y su influencia en la tradición matemática alemana del siglo XIX, véase Ferreirós 2006.

> No puedo nunca fundar las *propiedades del espacio* en la mera reflexión, como tampoco puedo reconocer de ese modo las *leyes básicas de la mecánica*, las *leyes de la gravitación* o cualquier otra *ley física*. El *espacio* no es un producto de mi *pensamiento*, sino que me es dado sólo a través de los *sentidos* [*Sinne*]. Para representarme sus *propiedades* necesito por ello de mis sentidos. Necesito *la intuición y el experimento*, tanto como se requieren para fundar las leyes físicas, donde también la *materia debe sernos dada a través de los sentidos*. (Hilbert 1891, pp. 22–23)

En este temprano y condensado pasaje, Hilbert hace alusión a una serie de ideas. En primer lugar, a la distinción recién mencionada entre matemática pura y matemática mixta. Más aún, respecto de la matemática pura, o más precisamente de la aritmética, Hilbert parece defender una suerte de "posición logicista" al estilo de Dedekind, para quien las leyes y los conceptos básicos de la aritmética se basan en las leyes del pensamiento puro, y en ese sentido, en la lógica.[5] Del mismo modo, Hilbert resalta el papel que el concepto de número entero desempeña en la aritmética y en el análisis, apuntando al proceso conocido como la "aritmetización del análisis". Este proceso, cuyos representantes más destacados fueron Weierstrass y Kronecker, consistió en el intento de reducir todas las proposiciones fundamentales del análisis a proposiciones en las que sólo se hable de relaciones entre números naturales.

Por otro lado, tanto la geometría como la mecánica necesitan algo más que el pensamiento puro para llegar a sus leyes, principios y conceptos básicos, a partir de los cuales pueden ser construidas de un modo estrictamente deductivo. Estas fuentes son, según se señala aquí, la experiencia y la intuición. Hilbert concluye entonces que, atendiendo a su origen, es necesario reconocer que la geometría no pertenece a las matemáticas puras, sino que es, más bien, una ciencia natural.

Esta tesis según la cual la geometría debe ser considerada una ciencia natural supone, sin embargo, un rechazo hacia algún tipo

[5] Dedekind intentó fundar la aritmética de los números naturales, y su extensión hasta los números complejos, en una teoría (informal) de conjuntos y funciones. Es decir, aunque no contaba como Frege con un sistema lógico explícitamente formulado, su proyecto califica como logicista en la medida en que eran precisamente las nociones lógicas (de orden superior) de conjunto y función las que permitían realizar la reducción de las conceptos y las proposiciones matemáticas. Asimismo, en esta época no era extraño considerar la teoría de conjuntos como parte de la lógica. Este proyecto se esboza en Dedekind 1888. En un excelente artículo, Ferreirós (2009) ha analizado la influencia del logicismo de Dedekind en la etapa inicial de las investigaciones axiomáticas de Hilbert.

de intuición pura o *a priori* en la base de nuestro conocimiento geométrico. Si ese fuera el caso, la geometría podría gozar del mismo tipo de certeza y necesidad que las matemáticas puras. Hilbert ignora simplemente este punto, al afirmar en diversos lugares que su análisis axiomático de la geometría presupone una intuición espacial, "aunque la cuestión de si ésta es *a priori* o empírica sigue sin ser discutida" (Hilbert 1891, p. 27).[6] Hilbert adopta así una posición empirista en su mirada temprana de la geometría, que, sin embargo, no radicaliza. Es decir, el empirismo de Hilbert respecto de la geometría se caracteriza por sostener que los hechos, las leyes y los conceptos básicos que están en la base de esta disciplina no pueden ser adquiridos a través del pensamiento puro, sino que para ello es necesario recurrir a la experiencia y a la intuición:

> La geometría elemental (euclídea) tiene como objeto los hechos y las leyes que el comportamiento [*Verhalten*] espacial de las cosas nos presenta. Según su estructura, es un sistema de proposiciones [*Sätzen*] que —en mayor o menor medida— pueden ser deducidas de un modo puramente lógico a partir de ciertas proposiciones indemostrables, los axiomas. Esta conducta, que en menor completitud encontramos, por ejemplo, en la física matemática, puede expresarse brevemente en la sentencia: la geometría es la ciencia natural más completa. (Hilbert 1898b, p. 302)

Hilbert reitera la definición de la geometría como la ciencia encargada de estudiar "el grupo de hechos que determina la forma externa de las cosas en el espacio" (Hilbert 1894, p. 73), en numerosos lugares a lo largo de estas notas.[7] Sin embargo, es importante aclarar que con esta caracterización Hilbert no sólo pretende resaltar el carácter de la geometría —en cuanto a su origen— como ciencia natural, sino además enfatizar el hecho de que las proposiciones básicas de la geometría elemental no son muy distintas de las proposiciones de la física en cuanto a que, en un sentido factual, formulan una multitud de hechos del "mundo exterior" [*Aussenwelt*]. Al insistir en el carácter de la geometría como una ciencia natural, Hilbert está subrayando el papel significativo que ella desempeña en nuestro conocimiento de la naturaleza: "Esta geometría [*i.e.*, la geometría elemental] es en cierto modo la geometría de la vida cotidiana [*täglichen Lebens*]. Ella forma la base de todas nuestras *consideraciones acerca de la naturaleza* y de todas las *ciencias naturales*" (Hilbert 1898a, p. 221). En este

[6] *Cfr.* Hilbert 1898b, p. 303; 1902, p. 541.
[7] *Cfr.* Hilbert 1894, p. 74; 1898a, p. 221.

aspecto, la geometría elemental puede ser considerada así una de las primeras ramas de la física.

Ahora bien, junto a esta concepción empirista, Hilbert reconoce también desde su primer acercamiento axiomático a la geometría, en 1894, que la axiomatización "formal" arroja un "entramado de conceptos" [*Fachwerk von Begriffen*], que no puede entenderse como una descripción del espacio físico, sino sólo como una estructura conceptual o relacional susceptible de recibir diversas interpretaciones:

> En general debe afirmarse: nuestra teoría proporciona sólo un esquema [*Schema*] de conceptos, conectados entre sí por las invariables leyes de la lógica. Se deja al entendimiento humano [*menschlicher Verstand*] cómo aplicar este esquema a los fenómenos, cómo llenarlo de material [*Stoff*]. Ello puede ocurrir de diversas maneras: pero siempre que los axiomas sean satisfechos, entonces los teoremas son válidos. Cuanto más fácil y más variadas sean las aplicaciones, tanto mejor será la teoría.
>
> Cada sistema de unidades y axiomas que describe completamente los fenómenos está tan justificado como cualquier otro. Mostrar, sin embargo, que el sistema axiomático aquí especificado es, desde cierto punto de vista, el más simple posible. (Hilbert 1894, p. 104)

Hilbert reconoce muy pronto, y como luego es evidente en *Fundamentos de la geometría*, que una axiomatización de la geometría elemental tiene como resultado un entramado de conceptos o estructura relacional que se encuentra separada, por decirlo de alguna manera, de la realidad [*Wirklichkeit*]. Esto es, el sistema de objetos abstractamente caracterizado por el sistema axiomático no está ligado a una única referencia fija: diversas interpretaciones (geométricas, aritméticas, físicas) son posibles, bajo la condición de que las relaciones predicadas por los axiomas se cumplan. De tal modo, Hilbert considera que la geometría es una ciencia natural no en virtud de su objeto de estudio, sino exclusivamente en razón de su *origen*, el cual no se reduce al pensamiento y la lógica pura, puesto que descansa también en la experiencia y la intuición.

Por otro lado, es preciso señalar que, para Hilbert, la geometría se diferencia de otras ciencias físicas como la mecánica, la teoría de la electricidad, la óptica, etc., no en virtud de una característica esencial asociada a su naturaleza, sino más bien debido a su avanzado estado de desarrollo. Es decir, el notable grado de avance que la geometría ha alcanzado desde los tiempos de Euclides y el consenso generalizado respecto de los "hechos" que conforman su base permiten, según Hilbert, que esta disciplina pueda ser sometida sin mayores problemas a un tratamiento axiomático formal:

> La geometría es una ciencia básicamente tan desarrollada, que todos sus *hechos* se pueden deducir ya por medio de *inferencias lógicas* a partir de hechos previos; algo completamente distinto ocurre, por ejemplo, en la teoría de la electricidad o la óptica, donde todavía hoy se descubren nuevos hechos. Empero, respecto de su origen, la geometría es una *ciencia natural* [...]. (Hilbert 1894, p. 72).

Del mismo modo, el tratamiento axiomático formal permite elevar la geometría al rango de una teoría matemática pura:

> También la geometría surge [como la mecánica] de la observación de la naturaleza, de la experiencia, y en ese sentido es una *ciencia experimental*. Pero sus fundamentos experimentales son tan irrefutables y tan generalmente reconocidos, han sido confirmados en un grado tal, que no se requiere ninguna prueba ulterior. Más aún, todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de un conjunto mínimo de *axiomas independientes* y así construir todo el edificio de la geometría por *medios puramente lógicos*. De este modo [*i.e.*, por medio del tratamiento axiomático], la geometría se vuelve una ciencia *matemática pura*. (Hilbert 1898c, pp. 1–2)

El tratamiento axiomático formal,[8] *i.e.*, su presentación como un sistema axiomático formal, es lo que convierte a la geometría en una disciplina matemática pura. Y por ello Hilbert advierte en estas notas, anticipándose al sexto de sus "Problemas Matemáticos" de 1900, que la geometría, además de ser la más perfecta y completa de las ciencias naturales, "constituye un modelo para el tratamiento teórico de otras ciencias naturales" (Hilbert 1898a, p. 221).

En suma, lo que caracteriza la concepción temprana de la geometría de Hilbert es: *i*) una posición axiomática formal, que concibe el resultado de una axiomatización como una estructura relacional donde los términos básicos no poseen una referencia (intuitiva) fija, pues de hecho pueden recibir diversas interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas como dentro de teorías físicas; *ii*) una posición empirista respecto del origen de la geometría y de su lugar dentro de las distintas disciplinas matemáticas.

[8] La expresión "axiomática formal" [*formale Axiomatik*], en oposición a la "axiomática material" [*inhaltliche Axiomatik*], se encuentra en Hilbert y Bernays (1934, pp. 2–3).

Luego, desde mi punto de vista, una tarea central para comprender la concepción axiomática de la geometría de Hilbert en este periodo inicial consiste en precisar cómo se relacionan el esquema de conceptos o estructura relacional producto de la axiomatización formal y el conjunto de hechos geométricos fundados en la experiencia y en la intuición, que se supone conforma el acervo fundamental sobre el que se erige nuestro conocimiento geométrico. Precisamente en este aspecto considero importante la mención que hace Hilbert de la teoría pictórica de Hertz.

### 2.2. "Una imagen de la realidad geométrica"

La obra central de Hertz, *Principios de la mecánica*, apareció publicada póstumamente en 1894, aproximadamente seis meses después de su prematura muerte. No es quizás un hecho menor que las primeras referencias de Hilbert a la *Bildtheorie* se encuentren en las notas para el curso sobre geometría que impartió ese mismo año (*cfr.* Hilbert 1894). En esta primera cita, Hilbert vincula sus axiomas para la geometría euclídea elemental con las "imágenes" [*Bilder*] de Hertz:

> El axioma corresponde a una observación, como puede verse fácilmente en las esferas, reglas y superficies de cartulina [*Pappdeckeln*]. Sin embargo, estos hechos de la experiencia son tan simples, tan a menudo observados por todos y por ello mismo tan conocidos, que el físico no necesita demostrarlos posteriormente en el laboratorio. No obstante, el origen [se sigue] de la experiencia. *Los axiomas son, como diría Hertz, imágenes* [*Bilder*] o símbolos en nuestra mente, de manera que las consecuencias de las imágenes son imágenes de las consecuencias, esto es, lo que deducimos lógicamente de las imágenes también vale en la naturaleza". (Hilbert 1894, p. 74; las cursivas son mías.)

En la primera parte de este pasaje, Hilbert destaca el origen empírico de los axiomas de la geometría; en la segunda parte, empero, cita de memoria el criterio fundamental establecido por Hertz para las imágenes o representaciones científicas. Es interesante señalar que, aunque Hilbert resalta el origen empírico de los axiomas de la geometría, sostiene que éstos deben ser considerados como las *Bilder* de Hertz, *i.e.*, como imágenes o representaciones *intelectuales*. Ello sugiere que el modo en que Hertz entiende la relación entre los principios básicos de la mecánica y los fenómenos puede ser significativo en el caso de una concepción axiomática de la geometría como la que Hilbert intenta desarrollar. De hecho, así lo declara explícitamente: "Cada uno de estos axiomas se corresponde con un hecho de la observación

[ . . . ]. Acerca de la relación entre axiomas y hechos, véanse las bellas explicaciones en Hertz, *Principios de la mecánica*" (Hilbert 1898b, p. 305). En resumen, la cuestión central es la siguiente: si bien es posibe sostener que los principios de la mecánica tienen un origen empírico, en cuanto axiomas de una teoría física no deben guardar necesariamente una relación de correspondencia *directa* con los hechos empíricos básicos. Hilbert encuentra estas ideas fácilmente aplicables a la geometría, dado que, en términos de su origen, ésta se encuentra más cerca de la mecánica, que de la aritmética o el análisis.

Asimismo, Hilbert enfatiza la utilidad de la teoría pictórica de Hertz para comprender su nueva empresa axiomática, al apelar a ella al momento de describir cuál es la tarea que se propone realizar:

> Empleando una expresión de Hertz (en la introducción a los "Principios de la mecánica"), podemos formular nuestra pregunta principal como sigue: *¿cuáles son las condiciones necesarias, suficientes e independientes entre sí, que deben establecerse respecto de un sistema de objetos [System von Dinge], para que a cada propiedad de estos objetos le corresponda un hecho geométrico, e inversamente, para que también estos objetos sean una "imagen" [Bild] completa y simple de la realidad geométrica*? (Hilbert 1898b, p. 303; las cursivas son del original.)[9]

Hilbert afirma que el objetivo de su abordaje axiomático es ofrecer una imagen [*Bild*] de la geometría, en el sentido explicitado por Hertz en su introducción a *Principios de la mecánica*. Los elementos de la imagen son un sistema de "objetos" [*Dinge*], que Hilbert describirá más tarde como "objetos del pensamiento" [*Gedankendinge*], para aclarar que los "puntos", "líneas" y "planos" pertenecen a un nivel exclusivamente conceptual, y por lo tanto deben ser diferenciados de los "puntos", "líneas" y "planos" reales o de la intuición. La "realidad geométrica", con la que el sistema de objetos debe coincidir, es el conjunto de hechos geométricos [*geometrische Tatsachen*]. Hilbert nunca aclara de un modo definitivo qué es lo que entiende por hecho geométrico; sin embargo, es posible especular lo siguiente en función de cómo emplea la expresión en lo sucesivo. Con ella no quiere aludir a los hechos empíricos que estarían en la base de la geometría,

[9] Esta misma referencia a la teoría pictórica de Hertz se encuentra en Hilbert (1894, pp. 72–73; 1902, p. 541). En "Die Grundlagen der Geometrie" (1894, p. 73), Hilbert demanda que su "sistema de objetos" se convierta en una imagen de la realidad geométrica. En la última referencia, en cambio, abrevia la expresión y sólo pide que "los objetos" sean una imagen de la realidad geometría. Véase *infra* la sección 4.

sino al conjunto de conocimientos o "verdades geométricas" que se han llegado a reconocer y aceptar generalmente por medio de la acumulación de demostraciones. En definitiva, considerando que lo que se intenta reconstruir axiomáticamente es la geometría euclídea elemental, podría decirse que la "realidad geométrica" es el acervo de conocimientos, con una fuerte base intuitiva, conseguidos por esta disciplina en una etapa más bien acrítica o intuitiva.[10]

Esta referencia textual a la *Bildtheorie* de Hertz resulta así muy significativa para comprender el espíritu con el cual Hilbert aborda la empresa de axiomatizar la geometría a partir de 1894. Es decir, por un lado, la alusión a la teoría pictórica de Hertz permite identificar la raíz de algunas de las ideas que caracterizan el modo en que Hilbert entendía la tarea de llevar a cabo una axiomatización de la geometría; por otro lado, esta indicación pone en evidencia la distancia que guarda la posición de Hilbert con un empirismo extremo, el cual exige que cada concepto o término básico tenga un correlato empírico. Este requisito es reemplazado por el criterio metodológico que postula que, a partir de los principios básicos, debe ser posible obtener todas las proposiciones y teoremas que conforman el dominio en cuestión. Todo ello siguiendo la pauta que establece que el sistema debe carecer de contradicciones y ser lo más *lógicamente claro y simple* posible. En definitiva, la referencia a la *Bildtheorie* de Hertz sin duda ilustra elocuentemente el proceso mediante el cual Hilbert transforma la ciencia natural de la geometría, con su contenido empírico factual, en una teoría matemática pura.

Veamos rápidamente ahora la propuesta de Hertz.

## 3. *La* Bildtheorie *de Hertz*

Se suele conocer a Heinrich Hertz por dos contribuciones principales. En primer lugar, por sus experimentos en el campo del electromagnetismo que lo llevaron, entre 1886 y 1888, al descubrimiento de las ondas electromagnéticas (ondas de radio), y le permitieron alcanzar una confirmación experimental de la teoría de Maxwell. En segundo lugar, por su teoría pictórica de las teorías científicas como "imágenes" [*Bilder*] o representaciones intelectuales, *i.e.*, su célebre *Bildtheorie*. Particularmente esta última ha sido del interés y objeto

[10] En 1893, Hilbert distingue tres periodos de desarrollo, clara y fácilmente reconocibles, en la historia de cualquier teoría matemática: el *naive* o intuitivo, el formal y el crítico. El método axiomático, comprensiblemente, se identifica con el periodo crítico. *Cfr.* Hilbert 1896, p. 383.

de estudio de los filósofos de la ciencia y del lenguaje, pues se reconoce su influencia en diversas posiciones filosóficas del siglo XX, por ejemplo, en el *Tractatus* de Wittgenstein.[11]

Hertz presenta por primera vez en 1884 un esbozo de su teoría pictórica en una serie de conferencias en Kiel, editadas más de un siglo después bajo el titulo: *La constitución de la materia* (Hertz 1999). Sin embargo, la exposición más detallada se encuentra en la introducción, de carácter filosófico, de su *Principios de la mecánica presentados en una nueva forma* (Hertz 1894). Hertz afirma allí que la tarea más importante que se impone a nuestro conocimiento de la naturaleza consiste en la anticipación de sucesos futuros, de manera que nos permita adaptar nuestras acciones en función de esas anticipaciones. Para dar solución a este problema, realizamos inferencias con base en el conocimiento acumulado en virtud de sucesos pasados. Ahora bien, este proceso reviste siempre la siguiente forma:

> Creamos para nosotros imágenes intelectuales [*innere Scheinbilder*] o símbolos de los objetos externos; y lo realizamos de tal modo que las consecuencias necesarias de las imágenes en el pensamiento siempre sean imágenes de las consecuencias necesarias en la naturaleza de los objetos representados. Para que se cumpla este requisito, debe existir cierta correspondencia entre la naturaleza y nuestra mente [*Geist*]. (Hertz 1894, p. 1)

Las imágenes o representaciones mentales de las que habla Hertz no son representaciones o copias de los objetos externos en el papel, en el lienzo, etc. Por el contrario, estas imágenes son representaciones internas o "intelectuales". Ello significa que la semejanza o parecido que estas imágenes o símbolos deben mantener con los objetos representados se limita al requisito básico recién mencionado: las consecuencias de las imágenes en el pensamiento deben ser, a su vez, imágenes de las consecuencias en la naturaleza. Las *Bilder* de Hertz no pretenden informarnos nada acerca de la "esencia" de los objetos o fenómenos externos, de cómo éstos son en sí:

> Las imágenes, de las que aquí hablamos, son nuestras representaciones [*Vorstellungen*] de las cosas. Con las cosas mantienen una única correspondencia esencial, que consiste en el cumplimiento del requisito antes mencionado. Sin embargo, para su finalidad no es necesario que las imágenes mantengan con las cosas otra correspondencia ulterior. En

[11] Véase Baird *et al.*, 1998.

> efecto, no sabemos ni tenemos medios para saber si nuestras representaciones guardan alguna otra relación con las cosas, más allá de aquel requisito fundamental. (Hertz 1894, p. 2)

El cumplimiento del requisito fundamental postulado no garantiza, no obstante para Hertz, que las imágenes que nos formamos de los objetos o fenómenos externos no estén dotadas de cierto grado de vaguedad e imprecisión. Por ello establece tres famosos criterios, en función de los cuales es posible evaluar y comparar las diferentes imágenes disponibles de las teorías: admisibilidad lógica [*logisch Zulässigkeit*], corrección [*Richtigkeit*] y adecuación [*Zweckmässigkeit*]. La primera consiste en la imposibilidad de que una imagen contenga en sí o pueda conducir a contradicciones con las "leyes de nuestro pensamiento" (Hertz 1894, p. 2). Hertz le confiere a la admisibilidad lógica una importancia capital, en el sentido en que sólo una imagen consistente puede ser evaluada en cuanto a su grado de corrección y adecuación.[12] Esta importancia depositada en la admisibilidad lógica es así similar a la preponderancia que poco después Hilbert le otorga a la consistencia, como la propiedad fundamental que todo sistema axiomático debe satisfacer. En segundo lugar, Hertz repite la condición impuesta en el criterio fundamental, al establecer que las imágenes deben ser correctas. Ello significa que las relaciones esenciales impuestas entre los elementos de las imágenes no deben contradecir a las relaciones de las cosas externas.[13] Dicho de otro modo, lo que se intenta lograr por medio del criterio de "corrección" es que aquellas partes de la naturaleza que las imágenes describen sean correctamente descritas. Por último, dos imágenes lógicamente permisibles y correctas se pueden distinguir en cuanto a su grado de adecuación:

> De dos imágenes del mismo objeto, la más adecuada será aquella que refleje más relaciones esenciales del objeto con respecto a la otra —a la que designaremos como la más distinta—. De dos imágenes con el mismo grado de distinción, la más apropiada será aquella que contenga, junto a los elementos esenciales, el menor número posible de relaciones vacías o superfluas —la que será, además, la más simple. (Hertz 1894, pp. 2–3)

El criterio de adecuación se divide en dos subcriterios: la distinción [*Deutlichkeit*] y la simplicidad [*Einfachheit*]. La distinción indica

[12] *Cfr.* Hertz 1894, p. 11.
[13] *Cfr.* Hertz 1894, p. 2.

que la imagen debe ser lo más completa posible, en el sentido de ser capaz de reflejar la mayor cantidad posible de características o relaciones esenciales de los fenómenos. Como se pregunta Hertz respecto de la distinción de la imagen clásica de la mecánica de Newton y Lagrange: "¿Contiene todas las características que nuestro conocimiento presente nos permite distinguir en los movimientos naturales?" (Hertz 1894, p. 11). La imagen más distinta será aquella que no sólo represente correctamente un gran número de movimientos naturales, sino aquella que incluya todos los movimientos sin excepción.[14] En cuanto a la idea de simplicidad, Hertz exige que las imágenes contengan el menor número posible de elementos innecesarios, es decir, de conceptos que pueden ser excluidos sin detrimento de la capacidad predictiva de la teoría. Luego, de modo análogo Hilbert incluirá la simplicidad como una propiedad de los sistemas axiomáticos, aunque no se trate de una propiedad que pueda ser demostrada formalmente. La independencia exigida a todos los axiomas será también un instrumento útil para evitar la introducción dentro del sistema de elementos redundantes o prescindibles.

## 4. *Los axiomas de Hilbert y las* Bilder *de Hertz*

Según hemos visto, Hilbert apeló en sus cursos a la teoría pictórica de Hertz para ilustrar el modo en que deben entenderse el lugar y la naturaleza de los axiomas dentro de las teorías axiomatizadas. Es decir, ya desde 1894, año en que adoptó por primera vez un abordaje axiomático a la geometría, Hilbert reconoció que un sistema axiomático se debe entender como un entramado de conceptos, una estructura relacional que no se restringe a un determinado dominio fijo, sino que, por el contrario, es libre de recibir diversas interpretaciones. Tampoco un axioma geométrico se podrá entender ya como una verdad inmediata acerca de un dominio intuitivo fijo —el espacio físico—; en sus sistemas axiomáticos para la geometría, Hilbert sostiene que los axiomas funcionan como proposiciones no interpretadas. Es decir, si bien las conectivas lógicas todavía poseen su significado habitual, los términos geométricos básicos no están ligados a una interpretación fija: pueden recibir diversas interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas, como dentro de otra clase de teorías, por ejemplo, las teorías físicas. En consecuencia, aunque la experiencia y la intuición hayan desempañado un papel fundamental en el establecimiento del conjunto de "hechos" básicos,

[14] *Cfr.* Hertz 1894, p. 42.

una teoría geométrica no debe limitarse a lo que está intuitiva o empíricamente justificado. En ese sentido, no se puede privilegiar ninguna interpretación o realización particular por sobre otras.

Ahora bien, esta nueva manera de ver los sistemas axiomáticos en general, y los axiomas de la geometría en particular, encuentra un paralelo notable en el modo en que Hertz define las teorías físicas como sistemas hipotéticos-deductivos y en su noción de "principio" de la mecánica:

> En sentido estricto, originalmente en la mecánica se ha entendido por principio toda afirmación que no se deriva de otras proposiciones de la mecánica, sino que *se considera como el resultado directo de otras fuentes de conocimiento*. [...] Pero estas proposiciones concretas particulares no serán lo que tendremos en mente cuando hablemos sencilla y generalmente de los principios de la mecánica; por ellos entenderemos *cualquier elección entre aquellas y entre otras proposiciones similares, que satisfaga la condición de que sea posible desarrollar de allí toda la mecánica por medios puramente deductivos, sin una referencia ulterior a la experiencia*. (Hertz 1894, pp. 4–5; las cursivas son mías.)

Lo que determina que una proposición se considere un "principio" de la mecánica no es la inmediatez de su evidencia intuitiva o empírica, sino la capacidad de obtener a partir de ella el resto de proposiciones y teoremas, exclusivamente por medio de inferencias deductivas y sin apelar a la experiencia. A ello se hace referencia cuando se habla de la posición axiomática o deductivista de Hertz. Además, este modo de concebir los principios de la mecánica conlleva que una imagen, en cuanto producto puramente intelectual, se relaciona con los objetos externos estrictamente en función del cumplimiento del requisito fundamental. En otras palabras, un principio de la mecánica —tomado como una imagen de los objetos externos— no intenta ser una afirmación acerca de la esencia de las cosas externas, de cómo éstas son en sí; su relación se limita a la condición establecida en el criterio fundamental. Por otro lado, como una consecuencia de lo anterior, y al igual que lo sostenido por Hilbert en relación con los sistemas axiomáticos, para Hertz una característica central de las imágenes permisibles y correctas es que no puede afirmarse justificadamente que alguna de ellas se halla más cerca que otra de la naturaleza de los objetos. Desde un punto de vista epistemológico, ninguna imagen [*Bild*] puede ser privilegiada argumentando que representa con mayor fidelidad la *verdadera naturaleza* de los objetos. Luego, de ese modo de concebir los principios de la mecánica a la noción de axioma como proposición no interpretada sólo hay un pequeño paso.

Otra consecuencia de entender los principios de la mecánica —y los axiomas de la geometría— de esta manera es que el problema de la admisibilidad lógica y de la consistencia se vuelve crucial. En la concepción clásica, la ausencia de contradicción de los principios y axiomas estaba garantizada por su carácter de verdades fundadas en una evidencia intuitiva inmediata. Sin embargo, al convertir los principios de la mecánica en *Bilder* o representaciones intelectuales, que son *postuladas* como los elementos básicos de un sistema, la cuestión de si estos principios no conllevan o pueden conducir a contradicciones se vuelve primordial. De allí la insistencia de Hertz en la admisibilidad lógica como el criterio más importante que se debe garantizar de una imagen.

En el caso de Hilbert, esta transición se pone notablemente de manifiesto en la renombrada controversia epistolar que mantuvo con Frege, a propósito de la publicación de *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899). Como es bien sabido, Frege manifestó allí serias dudas en torno al "nuevo significado" que Hilbert le confirió a la palabra "axioma". Frege defiende una concepción tradicional de los axiomas de la geometría, que coincide exactamente con la caracterización que presenta Hertz de la noción clásica de principio en la mecánica:

> Llamo axiomas a las proposiciones que son verdaderas pero no demostradas, ya que nuestro conocimiento de ellas se sigue de una fuente de conocimiento distinta a la lógica, que se puede llamar intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí. (Frege 1976, p. 63)

Por el contrario, para Hilbert los axiomas de la geometría no son proposiciones verdaderas acerca del espacio físico, sino un conjunto de enunciados (hipotéticos) acerca de un sistema de "objetos del pensamiento". Es precisamente por ello que una prueba de consistencia es el criterio fundamental para establecer la *validez* de un sistema axiomático.

Ahora bien, sugestivamente en favor de nuestra tesis, Hilbert recurre justamente a Hertz para resaltar que la incomprensión de Frege se debe a su incapacidad para advertir este nuevo modo de concebir los principios de una teoría organizada axiomáticamente. En su diario científico (*Wissenchaftliches Tagebuch*), Hilbert realiza la siguiente observación:

> Frege tergiversa [las cosas] al haber entendido completamente mal el sentido y el objetivo de mi fundamentación [de la geometría]. Obviamente es posible emplear otras palabras en lugar de "punto", "línea",

> "plano", "entre"; lo cual no es nada nuevo. [. . . ] Mi concepción coincide exactamente con la de Hertz (introducción a su mecánica). *Lo que yo llamo objetos del pensamiento [Gedankendinge] son las imágenes de Hertz,* los "signos" de Pringsheim, Thomae, etcétera. (Hilbert s/f, *Cod. Ms. D. Hilbert*, 600: 3, pp. 75–76; las cursivas son mías.)[15]

Hilbert señala una vez más que en su presentación axiomática de la geometría los términos primitivos, aun cuando conservan su nombre habitual que nos recuerda su significado geométrico intuitivo concreto, se refieren a un conjunto de "objetos del pensamiento", *i.e.*, objetos pertenecientes a un nivel conceptual, y no a las "líneas", "puntos" y "planos" intuitivos o "reales". En este preciso sentido, resulta fructífero concebir estos objetos del pensamiento como las imágenes de Hertz. Sin embargo, como hemos señalado, Hilbert afirma también en reiteradas oportunidades que sus *axiomas* deben ser entendidos como las imágenes de Hertz. De este modo, las *Bilder* de Hertz pueden ser, para Hilbert, imágenes tanto de *objetos u cosas* como de *hechos*.

Ahora bien, es preciso reconocer que el propio Hertz utiliza con esta misma flexibilidad su noción de "imagen". Es decir, por un lado Hertz reitera en múltiples lugares, desde las primeras líneas de la introducción a sus *Principios de la mecánica*, que las imágenes son "las representaciones que nos creamos para nosotros de los objetos externos" (Hertz 1894, p. 1).[16] Por otro lado, sostiene también que con su nueva presentación de la mecánica busca proponer una nueva imagen de esta teoría física. En otras palabras, su objetivo es ofrecer una nueva imagen [*Bild*] que describa de un modo más simple, completo y consistente, el comportamiento de una determinada gama de fenómenos, o sea, el conjunto de hechos de los que se ocupa la mecánica.[17]

Luego, más allá de esta libertad para hacer que las imágenes sean representaciones tanto de objetos o cosas como de hechos, las referencias de Hilbert a la teoría pictórica de Hertz resultan completamente consecuentes respecto de lo siguiente. En mi opinión, está claro que el modo en que Hertz describe la relación entre las teorías físicas y los fenómenos en su *Bildtheorie* ilustra elocuentemente el *giro*

[15] Hasta donde llega mi conocimiento, éste es el único lugar donde Hilbert se refiere a la controversia con Frege, tras haberla interrumpido abruptamente en 1902. Es difícil datar con precisión la observación; sin embargo, el contexto de estas notas permite inferir que no pudo haber sido escrita después de 1905. Agradezco a Volker Peckhaus por su ayuda para descifrar la escritura de Hilbert.

[16] Véase también Hertz 1894, pp. 2–3.

[17] *Cfr.* Hertz 1894, pp. 39–40.

*metodológico* que Hilbert intenta imprimirle a la idea de axiomática en geometría. Dicho brevemente, aunque en cuanto a su origen la geometría es —al igual que la mecánica— una ciencia natural, gracias el proceso de axiomatización formal se convierte en una teoría matemática pura, que no intenta ser una descripción inmediata del espacio físico. En este sentido, parecería entonces correcto pensar que, para Hilbert, el *sistema axiomático mismo*, con sus correspondientes axiomas y términos primitivos, constituye una imagen en el sentido de Hertz. Otra similitud entre ambas propuestas, que en seguida analizaremos, apunta en esta dirección.

## 5. *Elementos ideales y masas invisibles*

Este nuevo modo de concebir los axiomas de la geometría y los principios de la mecánica acarrea, como una consecuencia inmediata, una modificación en la manera de entender cómo debe proceder la construcción de una teoría —ya sea matemática o física— de forma axiomática o hipotético-deductiva. Es interesante subrayar que, también en este punto, es posible encontrar entre Hilbert y Hertz coincidencias notables, las cuales se ponen de manifiesto en las semejanzas conceptuales existentes entre una de las innovaciones técnicas y metodológicas más importantes que lleva a cabo Hertz en su presentación de la mecánica, *i.e.*, la introducción de masas invisibles u ocultas, y uno de los pilares del método axiomático hilbertiano: el método de los elementos ideales.

### 5.1. Las "masas invisibles" en la mecánica de Hertz

La concepción de Hertz de las teorías científicas como imágenes intelectuales implica una nueva manera de entender la relación entre las teorías físicas y los fenómenos. De acuerdo con esta nueva concepción, el único aspecto en el que nuestras teorías científicas o imágenes deben concordar con los fenómenos es el cumplimiento del criterio fundamental: las consecuencias en el pensamiento que se siguen de las imágenes deben valer a su vez en la naturaleza. Cualquier concordancia ulterior es, para los efectos de la predicción científica, superflua; Hertz señala incluso que otra concordancia quizás no sea siquiera posible. Luego, este modo de concebir las teorías ofrece una justificación para la introducción de elementos teóricos o conceptos que, aunque carecen de un correlato empírico observable, permiten simplificar y generalizar la explicación de una gama determinada de *phenomena*. Más aún, para Hertz esto no solamente es posible, sino absolutamente imprescindible para conseguir una imagen *completa*:

> Si intentamos comprender el movimiento de los cuerpos a nuestro alrededor y reducirlo a reglas simples y claras, considerando exclusivamente lo que puede ser observado directamente, nuestro intento en general fracasará. Inmediatamente nos convenceremos de que la totalidad de lo que podemos ver y tocar no forma aún un universo legaliforme [*gesetzmässig*], en el que de las mismas condiciones se siguen siempre las mismas consecuencias. [...] Si deseamos obtener una imagen del mundo [*Weltbild*] completa, acabada y conforme a una ley, tenemos que admitir, detrás de las cosas que vemos, otras cosas invisibles; debemos buscar detrás de los límites de nuestros sentidos, otros elementos coactuantes que están ocultos [*heimliche Mitspieler*]. (Hertz 1894, p. 30)

Hertz cree que no podemos alcanzar una explicación de la materia tangible y visible sin asumir la existencia de ciertos actores "invisibles". Ahora bien, esto oculto no es sino masas que en sí son iguales a las masas tangibles, con la excepción de que no podemos percibirlas de la misma manera en que percibimos la materia visible. Podemos inferir sus propiedades a partir del modo en que éstas operan sobre la materia tangible, a través de sus conexiones. Empero, la única diferencia entre la materia tangible y la intangible consiste en el modo en que están conectadas con el aparato sensorial humano. No se trata de una diferencia de clase, sino sólo de nuestro modo de percepción.

Básicamente, para Hertz la introducción de estas "masas invisibles" se explica en función de que, por medio de su inclusión, su imagen de la mecánica gana sustancialmente en claridad lógica y simplicidad. Es decir, el sistema hertziano contiene sólo tres conceptos primitivos: espacio, tiempo y masa. Se evita de ese modo la introducción de un cuarto elemento: la fuerza, en la concepción mecánica clásica de Newton y Lagrange; o la energía, en la representación energeticista de la mecánica que intenta fundarla en las leyes de la transformación de la energía.[18] Asimismo, en lo que toca a su estatus epistemológico, Hertz reconoce que estas masas invisibles no son nada misterioso, no corresponden a ninguna categoría especial, sino que en el fondo se trata de los mismos conceptos básicos, introducidos siguiendo el único objetivo metodológico de simplificar y completar la explicación del movimiento mecánico de los fenómenos:

[18] Hertz critica las imágenes clásica y energeticista de la mecánica en la introducción de sus *Principios*. Una discusión en torno al papel de las "masas invisibles" en la imagen de la mecánica hertziana puede consultarse en Lützen 2005 y D'Agostino 2000.

> Podemos admitir que hay algo oculto operando y sin embargo negar que pertenezca a una categoría especial. Podemos suponer libremente que esto oculto [*Verborgen*] no es otra cosa sino, de nuevo, movimiento y masa; y de hecho movimiento y masa tales que en sí no se distinguen de los visibles, sino sólo en relación con nosotros y nuestros medios usuales de percepción. Ahora bien, este modo de pensar es nuestra hipótesis. Suponemos que es posible representarse las masas visibles del universo junto a otras masas que obedecen las mismas leyes, y del tal modo que el todo se vuelve inteligible y conforme a una ley. (Hertz 1894, pp. 30–31)[19]

Hertz le confirió una importancia fundamental a la incorporación de masas ocultas, en cuanto nueva herramienta para presentar el sistema de la mecánica. En efecto, estos elementos invisibles no hacían sino confirmar su visión del cambio de estatus de las teorías científicas, a saber: éstas debían dejar de ser consideradas una descripción de la naturaleza, para comenzar a ser vistas como construcciones intelectuales, como imágenes de los fenómenos.

Vemos entonces que la admisión de elementos invisibles en la presentación de la mecánica se corresponde con la concepción de Hertz de las teorías físicas como modelos teóricos, en donde cada uno de los conceptos no necesariamente debe corresponderse con algo observable en un nivel empírico. En suma, Hertz pone de manifiesto un procedimiento inevitable en la elaboración de una teoría científica, a saber: la necesidad de trascender el dominio de los fenómenos inmediatamente dados —el dominio original de la teoría— para conseguir una explicación teóricamente más completa, simple y general.

### 5.2. Elementos ideales y el método axiomático en Hilbert

Ahora bien, este aspecto que Hertz destaca del pensamiento teórico se vincula evidentemente, en el campo de la matemática, con el método de extensión de dominios mediante elementos ideales. En el siglo XIX, grandes matemáticos como Kummer, Dirichlet y Dedekind, entre otros, pusieron en práctica este método fructíferamente. Sin embargo, a través de su nuevo método axiomático, Hilbert le confirió una justificación explícita y lo convirtió en una herramienta fundamental para la labor matemática. En las notas que hemos venido analizando, Hilbert presenta una serie de observaciones muy interesantes, cuyas similitudes con Hertz quisiera resaltar.

El método de los elementos ideales ha estado presente prácticamente en todas las ramas de la matemática: álgebra, análisis, teoría de

[19] Véase también Hertz 1894, § 301.

números, geometría, etc. Sin embargo, en sus cursos sobre geometría, Hilbert presenta y comenta un ejemplo de un modo muy sugerente e ilustrativo. En estos manuscritos sobre geometría, en especial en Hilbert 1894 y 1898b, Hilbert declara que uno de sus objetivos primordiales es mostrar cómo su sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental puede tener un "modelo" o realización en la geometría analítica cartesiana, basada en el sistema usual de los números reales. La investigación en torno a qué axiomas son necesarios para alcanzar tal fin, se convirtió en una tarea central en sus indagaciones geométricas. Ahora bien, el sistema axiomático presentado originalmente en *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1899) es insuficiente para garantizar una completa coordenatización de los puntos de la línea geométrica con los números reales. El problema reside en el grupo de axiomas de continuidad, que en el sistema de axiomas de 1899 estaba conformado únicamente por el axioma de Arquímedes, en su versión más usual. Dicho axioma, y Hilbert lo advierte manifiestamente, sólo permite asignar unívocamente a cada punto de la línea un número real. No garantiza, en cambio, que a cada número real le corresponda un punto en la línea geométrica. En consecuencia, el sistema axiomático original de 1899 sólo puede tener un "modelo" en una geometría analítica cuyas coordenadas forman un cuerpo arquimediano —como, por ejemplo, los números algebraicos—, pero no un cuerpo arquimediano *completo*, esto es, el cuerpo de los números reales. Para que dicho sistema de axiomas pueda garantizar la correspondencia biunívoca entre los puntos de la línea y los números reales, es necesario entonces *completar* el dominio definido originalmente agregando nuevos puntos. Hilbert lo explica del siguiente modo en las notas para el curso "Elemente der euklidischen Geometrie", correspondientes al semestre de invierno de 1898/1899:

> En virtud del axioma de Arquímedes se puede conseguir ahora la *introducción del número en la geometría* [...]. Sin embargo, de nuestros axiomas no se sigue que también a cada número le corresponde un punto de la línea. Ello puede lograrse a través de la introducción de puntos irracionales —ideales— (axioma de Cantor). (Hilbert 1898b, pp. 390–391)

Un poco más tarde Hilbert solucionará el problema de la correspondencia uno-a-uno —isomorfismo— de su sistema de axiomas con la geometría analítica cartesiana basada en los números reales agregando, a su sistema original, el famoso axioma de completitud. Esto ocurrió por primera vez en la traducción al francés de los *Fundamentos*, en 1900; y luego a partir de la segunda edición alemana, en 1903. Esencialmente, el axioma de completitud impone una condición de maximalidad sobre el espacio, determinando que el único cuerpo numérico que puede satisfacer el conjunto de axiomas para la geometría euclídea es el cuerpo arquimediano ordenado completo de los reales. Sin embargo, ya que estas notas datan de 1898, Hilbert todavía no contaba con el axioma de completitud. La correspondencia biunívoca se logra entonces por medio de la introducción de puntos ideales —irracionales— a través del conocido axioma o postulado (geométrico) de encaje de intervalos de Cantor.[20] Este axioma permite establecer que a cada número real le corresponde un único punto en la línea geométrica. Postulando la existencia de estos nuevos puntos, es posible completar el sistema de objetos definido por los axiomas, con lo cual se logra un isomorfismo con la geometría analítica construida sobre los números reales.

Ahora bien, a la hora de pronunciarse respecto del estatus epistemológico de estos nuevos puntos del sistema y de la justificación de su inclusión, Hilbert realiza en estas notas la siguiente afirmación, de una similitud notable al pasaje anteriormente citado de Hertz:

> Es posible mostrar que estos puntos ideales satisfacen el conjunto de axiomas I–IV; luego es por ello indiferente si éstos se introducen aquí, o antes en un lugar previo. La pregunta respecto de si estos puntos realmente "existen" es en virtud de las razones mencionadas completamente inútil [*müssig*]; para nuestro conocimiento empírico de las propiedades espaciales de las cosas, estos puntos irracionales no son necesarios. Su utilidad es exclusivamente metodológica; recién con su ayuda se vuelve posible desarrollar la geometría analítica en su completa extensión. (Hilbert 1898b, p. 391)

De modo análogo a Hertz, la razón para postular estos nuevos elementos (ideales) es estrictamente metodológica, *i.e.*, la simplificación y la mayor plenitud en la explicación o caracterización del dominio que es objeto de indagación. La pregunta por la naturaleza de estos nuevos

[20] *Axioma de Cantor de intervalos encajados*: Supongamos que en una recta arbitraria $a$ se da una sucesión infinita de segmentos $A_1B_1$, $A_2B_2, \ldots$, de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, que cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice $n$ para el cual $A_nB_n$ es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta $a$ un punto $X$, que está en el interior de todos los segmentos $A_1B_1$, $A_2B_2$, etcétera.

Efímov 1984 contiene una discusión sobre las relaciones conceptuales entre el axioma de Cantor y el axioma de completitud de Hilbert.

elementos cobra entonces sentido sólo respecto del sistema axiomático o la teoría en cuestión. Y la respuesta es, a su vez, simple y directa: podemos postular cualquier nuevo elemento dentro del sistema, en la medida en que su introducción no conduzca a contradicciones con respecto a la estructura relacional originalmente definida.[21]

Finalmente, más allá de las diferencias específicas entre el ejemplo matemático presentado y la utilización de este método por parte de Hertz en la mecánica, lo que en mi opinión ilustra esta comparación es una coincidencia fundamental en ambos autores respecto de un rasgo esencial del pensamiento teórico: estamos justificados e incluso es necesario *trascender* el campo de lo dado inmediata e intuitivamente, a través de la postulación de la existencia de nuevos elementos, con el fin de lograr una simplificación, generalización y completitud en la explicación o caracterización de los objetos en cuestión. Como señala Hilbert, sólo nos limita un único requisito: la consistencia. Y en ello concuerda también Hertz, al poner el énfasis en el valor de la admisibilidad lógica de las imágenes que nos formamos.[22]

## 6. *Consideraciones finales*

Desde mi punto de vista, la influencia de la *Bildtheorie* de Hertz en la temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert pone de manifiesto tres cuestiones centrales respecto de la posición de este último.

En primer lugar, la conexión con la teoría pictórica de Hertz circunscribe el empirismo que caracteriza la concepción hilbertiana de la geometría, en este periodo inicial, al reconocimiento del origen de la geometría como una ciencia natural. Dicho de otro modo, las referencias a la *Bildtheorie* permiten ver con claridad cuán lejos se hallaba la concepción de la geometría de Hilbert respecto de otras posiciones radicalmente empiristas.[23] Esto resulta evidente en función de lo siguiente: al caracterizar sus axiomas para la geometría por medio de las *Bilder* de Hertz, Hilbert rechaza el principio básico de toda posición *radicalmente* empirista. De acuerdo con este principio, los conceptos geométricos básicos deben corresponderse originalmente con objetos empíricos, y las relaciones expresadas en los axiomas

[21] *Cfr.* Hilbert 1926, p. 179.

[22] Otro ejemplo del método de los elementos ideales, citado usualmente, es la introducción en geometría de puntos y líneas al infinito. Un análisis de este caso puede consultarse en Torres 2009.

[23] El ejemplo quizás más claro de una posición radicalmente empirista es Pasch 1882. Un análisis de ésta y otras posiciones empiristas puede encontrarse en Schlimm 2010 y Torretti 1984.

deben corresponderse exactamente con "hechos de la experiencia".[24] En contraposición a este empirismo radical, Hilbert resalta el origen empírico de muchos de los axiomas de la geometría, pero impone —al igual que Hertz—, como único requisito fundamental, que el conjunto de los objetos y axiomas elegidos permita una reconstrucción consistente, completa, lógicamente clara y simple de la "realidad geométrica". Ello sin importar que se introduzcan elementos o conceptos, cuya certeza intuitiva o empírica diverja respecto de la certeza que poseemos de otros objetos básicos.

En segundo lugar, en virtud del análisis presentado es posible precisar mejor la tesis de Hilbert, en cierta medida llamativa dada su posición axiomática abstracta, según la cual la geometría es una ciencia natural. *En este periodo*,[25] dicha afirmación se explica en la medida en que para Hilbert la geometría no es exclusivamente un producto del "pensamiento puro", como sí lo son, en cambio, la aritmética y el análisis. En otras palabras, que la geometría es la más perfecta de las ciencias naturales se sigue, en esta etapa para Hilbert, de la distinción fundamental —de raigambre gaussiana— entre matemática pura y matemática mixta. Ello implica, sin embargo, el rechazo de una intuición pura en la base de la geometría. Y aunque Hilbert disimula este supuesto al señalar que en sus investigaciones no se aborda la cuestión de si nuestra intuición espacial es empírica o *a priori*, está claro que su concepción temprana de la geometría es incompatible con una intuición pura del espacio.

Por último, la conexión con Hertz aporta un elemento más para oponerse a la interpretación radicalmente "formalista" de la concepción de la geometría de Hilbert, en el sentido de la lectura defendida —*inter alia*— en el clásico artículo de J. Dieudonné "Modern Axiomatic Method and the Foundations of Mathematics" (1971). El resultado de una axiomatización de la geometría *à la* Hilbert es un sistema axiomático abstracto o formal. En cuanto tal, dicha concepción axiomática es totalmente compatible con la idea de que la matemática debe entenderse como una mera colección de sistemas abstractos y formales, construidos a partir de un conjunto arbitrariamente dado de postulados, sin un significado intrínseco.[26] Ahora bien, al describir

[24] Este principio aparece enunciado, por ejemplo, en Pasch 1882, pp. 3–4.

[25] Corry (2006) ha analizado las consecuencias que tuvo, para la concepción de la geometría de Hilbert, el advenimiento de la teoría de la relatividad especial (1905) y general (1915) de Einstein.

[26] Ésta fue la dirección adoptada por E.H. Moore, E. Huntington y O. Veblen —el grupo de matemáticos estadounidenses conocido como los "teóricos postulacionalistas"— y más tarde por el mítico grupo de matemáticos franceses

su objetivo como la tarea de proporcionar una "imagen de la realidad geométrica", Hilbert se separa sin lugar a dudas de aquella posición excesivamente formalista.[27] Los elementos del sistema hilbertiano —al igual que en el sistema de Hertz para la mecánica— no son los "puntos", "líneas" y "planos" reales o intuitivos, sino un conjunto de "objetos del pensamiento" [*Gedankendinge*], abstractamente caracterizados por medio de los axiomas. Ello no quita que la razón fundamental para realizar un análisis axiomático sea profundizar nuestro conocimiento, y perfeccionar la claridad epistemológica, de una disciplina matemática en un estado muy avanzado y elaborado de su desarrollo. No se trata de jugar con un conjunto cualquiera de postulados o axiomas para ver qué proposiciones o teoremas es posible obtener de allí exclusivamente por medio de deducciones lógicas. Antes bien, lo que se busca es alcanzar una *re*presentación más perspicua y consistente, que también conduzca a descubrir nuevos resultados, de una disciplina en sus orígenes enraizada en la experiencia y la intuición. En definitiva, el método axiomático se ajusta a aquella creencia fundamental, tantas veces repetida por Hilbert, que indica que toda la matemática es un resultado de la íntima interacción entre el pensamiento y la intuición.[28]

## BIBLIOGRAFÍA

Baird, D., R. Hughes, y A. Nordman, 1998, *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Corry, L., 2006, "Axiomatics, Empirism, and *Anschauung* in Hilbert's Conception of Geometry: Between Arithmetic and General Relativity", en J. Ferreirós y J. Gray (comps.), *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, pp. 133–156.

———, 2004, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918): From "Grundlagen der Geometrie" to "Grundlagen der Physik"*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bourbaki. El propio Hilbert se opuso categóricamente a este tipo de lectura "radicalmente formalista" de su método axiomático en las interesantísimas notas para el curso "Naturaleza y conocimiento matemático" (Hilbert 1992), correspondientes al semestre de invierno de 1919/1920.

[27] Sobre el sentido que tiene la rúbrica "formalismo" para caracterizar el programa de Hilbert, en esta etapa temprana dedicada a la geometría, véase Detlefsen 1993.

[28] Quisiera expresar mi agradecimiento a los dos réferis de *Crítica*, por sus valiosas sugerencias y comentarios, los cuales me permitieron aclarar diversos puntos y disipar ciertas confusiones presentes en la versión previa de este trabajo. Una versión inicial tuvo también el beneficio de recibir las críticas de Antonio Passos Videira, Adriana Gonzalo y Javier Legris.

D'Agostino, S., 2000, *A History of the Ideas of Theoretical Physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dedekind, R., 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg und Sohn, Braunschweig. [Versión en castellano: *¿Qué son y para qué sirven los números?*, trad. José Ferreirós, Alianza Editorial, Madrid, 1998.]

Detlefsen, M., 1993, "Hilbert's Formalism", *Revue Internationale de Philosophie*, vol. 47, pp. 285–304.

Dieudonné, J., 1971, "Modern Axiomatic Method and the Foundations of Mathematics", en F. Le Lionnais (comp.), *Great Currents of Mathematical Thought*, 2a. ed., Dover, Nueva York, pp. 251–266.

Efímov, N., 1984, *Geometría superior*, Mir, Moscú.

Ferreirós, J., 2009, "Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence", *Synthese*, vol. 170, pp. 33–70.

———, 2006, "Ο ϑεος ἀριϑμητίζει: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", en C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer (comps.), *The Shaping of Arithmetic: Number Theory after Carl Friedrich Gauss's* Disquistiones Arithmeticae, Springer Verlag, Berlín.

Frege, G., 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, ed. G. Gabriel *et al.*, Felix Meiner, Hamburgo.

Gauss, C. y F. Bessel, 1880, *Briefwechsel. Herausgegeben auf der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Engelman, Leipzig.

Hallett, M., 2008, "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie' ", en P. Mancosu (comp.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 198–255.

———, 1994, "Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought", en A. George (comp.), *Mathematics and Mind*, Oxford University Press, Oxford, pp. 158–200.

Hertz, H., 1999, *Die Constitution der Materie, Eine Vorlesung über die Grundlagen der Physik aus dem Jahre 1884*, ed. Albrecht Fölsing, Springer-Verlag, Berlín.

———, 1894, *Gesammelte Werke, Band III: Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Arthur Meiner, Leipzig.

Hilbert, D., 1992, *Natur und mathematisches Erkennen*, Birkhäuser, Basilea.

———, 1935, *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Springer Verlag, Berlín.

———, 1926, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, vol. 95, pp. 161–190.

———, 1918, "Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen*, vol. 78, pp. 405–415.

———, 1902, "Grundlagen der Geometrie" (MS. Vorlesung, SS 1902), en Majer y Hallett 2004, pp. 540–608.

———, 1900, "Mathematische Probleme", en Hilbert 1935, pp. 290–329.

———, 1899, *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, en Majer y Hallett 2004, pp. 436–525.

Hilbert, D., 1898a, "Grundlagen der Euklidischen Geometrie" (MS. Vorlesung, WS 1898/1899), en Mayer y Hallett 2004, pp. 221–286.

———, 1898b, "Elemente der Euklidischen Geometrie", en Mayer y Hallett 2004, pp. 304–402.

———, 1898c, "Mechanik" (MS. Vorlesung, WS 1898/1899), Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert* 553.

———, 1896, "Über die Theorie der algebraischen Invarianten", en Hilbert 1935, vol. 2, pp. 376–383.

———, 1894, "Die Grundlagen der Geometrie" (MS. Vorlesung, WS 1893/1894), en Mayer y Hallett 2004, pp. 72–178.

———, 1891, "Projektive Geometrie" (MS. Vorlesung, SS 1891), en Mayer y Hallett 2004, pp. 21–55.

———, s/f, *Wissenchaftliche Tagebücher*, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert* 600.

Hilbert, D. y P. Bernays, 1934, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Springer Verlag, Berlín.

Lützen, J., 2005, *Mechanistic Images in Geometric Form. Heinrich Hertz's Principles of Mechanics*, Oxford University Press, Oxford.

Majer, U., 1998, "Heinrich Hertz's Picture-Conception of Theories: Its Elaboration by Hilbert, Weyl, and Ramsey", en Baird *et al.* 1998, pp. 225–242.

Majer, U. y M. Hallett (comps.), 2004, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*, Springer Verlag, Berlín.

Pasch, M., 1882, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig.

Schlimm, D., 2010, "Pasch's Philosophy of Mathematics", *The Review of Symbolic Logic*, vol. 3, no. 1, pp. 93–118.

Sieg, W., 1999, "Hilbert's Programs: 1917–1922", *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 5, pp. 1–44.

Toepell, M., 1986, *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie*, Vandenhoeck und Ruprecht, Gotinga.

Torres, C., 2009, "De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano", *Diánoia*, vol. 54, no. 63, pp. 37–70.

Torretti, R., 1984, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Kluwer, Dordrecht.

*Recibido el 7 de junio de 2011; revisado el 18 de enero de 2012; aceptado el 10 de febrero de 2012.*