CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXIII, No. 67 (abril 1991): 15–39

EL LOGICISMO RUSSELLIANO: SU SIGNIFICADO FILOSÓFICO

FRANCISCO RODRÍGUEZ CONSUEGRA
Instituto S. Vilaseca
McMaster University

1. *Introducción*

El logicismo russelliano apareció, en 1901, a través de un conjunto de factores donde los principales elementos fueron: (i) una serie de intentos propios de fundamentar filosóficamente la matemática, los cuales fracasaron a falta de una lógica adecuada; (ii) el desarrollo de esa lógica a partir de la obra de Peano y su escuela, donde Russell encontró también los ingredientes necesarios para su identificación entre lógica y matemática.[1] Ya en su primera formulación, Russell destacó esa identidad como característica fundamental de su logicismo, entendiéndola como la tesis según la cual la matemática no requiera más indefinibles que los de la lógica, estando las proposiciones lógicas definidas por el hecho de que pueden aplicarse a cualquier cosa (1901b, pp. 76–79).[2]

En 1903a la tesis se desarrolla según dos objetivos: (i) demostrar que los conceptos de la matemática pura pueden definirse a partir de conceptos lógicos básicos y que sus proposi-

[1] He explicado en detalle tales factores en su contexto histórico en mis 1987c, 1988a, 1988c, 1988d y 1991a (sección 5.1).

[2] Según una carta a Jourdain de 1910, 1901d fue escrito en enero de 1901 (Grattan-Guinness 1977a, p. 133). La independencia de Frege se reclama en una nota añadida en 1917 (1901d, p. 79), donde Russell afirma que aquél le era aún desconocido.

ciones pueden deducirse de premisas lógicas indemostrables; (ii) explicar tales conceptos lógicos indefinibles de forma que se destaque, mediante el análisis filosófico, su carácter de entidades absolutas. Así, la matemática y la lógica constituyen "la clase de proposiciones que contienen sólo variables y constantes lógicas" (1903a, § 10). Por su parte, la matemática (pura) se define como "la clase de todas las proposiciones de la forma '*p* implica *q*', donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en las dos proposicones, y donde ni *p* ni *q* contienen ninguna constante excepto las constantes lógicas" (§ 1). Así, lógica y matemática se distinguen en que la primera comprende las *premisas* de la matemática y las proposiciones que envuelven sólo constantes (con lo que puede definirse como "en estudio de los diversos generales de deducción"; § 11), mientras la segunda comprende los *consequentes* de aquellas premisas junto a ellas mismas (§ 10).

Las exposiciones posteriores coinciden en lo esencial, aunque en *Principia* se evita toda definición de lógica o matemática, a través de la reformulación de los objetivos: (i) el análisis de las ideas de la lógica matemática; (ii) la expresión precisa de las proposiciones matemáticas (Introducción). En 1919a aparece ya la influencia de Wittgenstein, pues a la tesis de la identificación de la lógica y matemática, basada en el aspecto formal de ambas, se añade que sus proposiciones son tautológicas (cap. 18). En 1937a se mantiene la identificación, pero la influencia de los positivistas lógicos es visible a través de cierto predominio de lo lingüístico en la explicación de las constantes lógicas, aunque no se renuncia a la tautologicidad, que se mantendría hasta el final (1959a, p. 157).[3]

En lo que sigue trataré de ofrecer una interpretación filosófica global de la tesis logicista tal y como Russell la entendió,

[3] Russell incluso escribió en un manuscrito de los años cincuenta que "las proposiciones de la lógica y la matemática son puramente lingüísticas" (1951a, p. 306).

teniendo en cuenta la literatura relevante. Mi conclusión principal será que si el logicismo se mantuvo sin una definición clara de lógica (en lo que Russell coincidió con Frege) fue porque Russell se apoyaba implícitamente en la intuitiva noción mooreana de verdad.[4]

2. *¿Dos logicismos?*

Putnam 1967a inauguró la moda de distinguir entre varios "logicismos" en Russell. Concretamente, le atribuyó un logicismo clásico, el de *Principia*, y un "si-entoncismo" (if-thenism), el de *Principles* (1903a). El primero supondría la identificación entre lógica y matemática, con la consiguiente defensa de la tesis del "modelo único" para *Principia*; el segundo, la mera enunciación de que, si se acepta tal o cual grupo de axiomas, entonces se cumplen tales y cuales teoremas. Putnam añade (p. 429) que sólo esta segunda forma sería aceptable.

Sobre el logicismo clásico hay que decir, ante todo, que estaba ya presente en 1903a,[5] y ello incluso con mayor base filosófica (si exceptuamos, naturalmente, la teoría definitiva de los tipos, todavía ausente). Es claro que la defensa del modelo (o interpretación) único sería también aplicable a esa primera obra. Por tanto le sería también aplicable la defensa parcial que de ella lleva a cabo Putnam al escribir (p. 408 s.) que el logicismo ha logrado *efectivamente* mostrar la inexistencia de una línea precisa entre lógica y matemática, así como la validez de las traducciones logicistas de *algunas* proposiciones matemáticas (aquellas que no se apoyan en "totalidades" peligrosas, p. ej. las referentes a los enteros concretos). Y ello a pe-

[4] Ya Garciadiego 1985a reclamaba una nueva explicación del origen del logicismo. Por mi parte, he tratado el tema en los escritos mencionados en la nota 1.

[5] Obviamente Putnam se confunde al escribir que Russell defendió el "si-entoncismo" "antes de abrazar la causa del logicismo" (p. 397). La presunción de que el logicismo apareció *después* de 1903a es, como hemos visto, completamente errónea.

sar de las inexactitudes o valoraciones de 1903a. Por lo mismo, también le serán aplicables las críticas (p. 389) referentes a la concepción "teológica" de la lógica según la cual se admitiría como existente la totalidad de las funciones proposicionales (o predicados) referentes a un ámbito concreto (p. ej. la totalidad de los predicados relativos no sólo a los enteros que podamos definir, sino a todos los que existen).

Indudablemente de 1903 a 1910 la visión russelliana de su sistema lógico sufrió cambios, sobre todo en lo referente al desarrollo de la teoría de las descripciones y de la de los tipos (véanse mis 1989b y 1990g), pero en lo tocante a si se trataba o no de un cálculo formal puro, parece que *Principia* es, ante todo, un cálculo *interpretado*: en él se asignan significados lógicos desde las primeras construcciones. En *ese* sentido es innegable que para Russell estaba en juego la existencia de un modelo único (por lo menos de un modelo principal). Pero se trata de una constatación trivial, pues lo que Russell pretendía no era demostrar que sólo fuese posible ese modelo (tarea obviamente imposible), sino que el cálculo *podía construirse* como estructura de ese modelo, que él aceptaba como *dato* "empírico" indiscutible. Por eso, como hemos visto, no separa nunca el objetivo de expresar la matemática en términos lógicos del análisis de todas las ideas en juego, incluyendo los conceptos lógicos mismos, hasta llegar a los auténticos indefinibles.

Por otro lado, hay indicios de que para Russell era dudosa la existencia sin base "empírica" de un cálculo formal (sin el apoyo de los procesos subyacentes del pensamiento; véase mi 1988c). Ello parece dudoso si leemos textos como éste: "En matemáticas son equivalentes dos clases de entidades que tengan relaciones internas del mismo tipo lógico. De aquí que nunca tratemos con una clase particular de entidades, sino con una clase de clases completa, esto es, con todas las clases que tienen relaciones internas del mismo tipo especificado. Y por *tipo* de una relación quiero decir sus propiedades puramente lógicas..." (1903a, § 412). Pero no puede olvidarse que la intuición, que subyace en toda la obra de Russell, ha de proporcionarnos la visión de que los fundamentos de esas estructuras descritas (las relaciones) *son* de tal o cual tipo. Y eso basta para que partamos de estructuras *dadas*. No importa el hecho de que *después* reduzcamos a su máxima generalidad las que *de hecho* se dan (por ejemplo, los ordinales). Ésa es la razón (de nuevo "empírica") por la que Russell nunca se dejó llevar por los progresos de generalización del cálculo formal puro al estilo de Hamilton, Grassman y el mismo Whitehead (a pesar de que su *Universal Algebra* fue considerada por él mismo como un cálculo aplicado al espacio).

Es cierto que Whitehead 1898a supuso para Russell un estímulo importante, especialmente por su reducción de la matemática y la lógica a una estructura común; pero también fue importante porque particularizaba el estudio de la matemática aplicando principios formales a los diversos "cálculos" existentes sin perderse en la pura generalidad. Según esto, el enfoque correcto no sería la pregunta por cuáles son los principios esenciales de cualquier cálculo, sino la adopción de "un método más inductivo" y el objetivo de "examinar las diversas especies una a una" (1903a, § 357). Lo que conduciría, de forma natural, a rechazar el supuesto principio de la permanencia de la forma (de las leyes formales), según el cual se conservarían las leyes generales al pasar de unas "entidades" a otras (principio inaugurado por Peacock). Lejos de ello, los símbolos (por ejemplo, los de las operaciones aritméticas) son para Russell "variables" sujetas a determinadas reglas en función de ciertas hipótesis (igual que para Peano). Pero lo que da valor a una hipótesis concreta (un "álgebra") es que podamos hallar un modelo "real": "Con objeto de que tal Álgebra sea importante es necesario que haya al menos una instancia en la que se verifiquen las reglas de operación sugeridas" (1903a, § 357).

Por tanto, este primer logicismo del modelo único (al que podríamos llamar logicismo "semántico") sólo se sostiene sobre la base antiformalista de la existencia previa de una materia prima en bruto: la matemática clásica, que se trata de reducir. Es, de hecho, el mismo punto de vista de Peano. Lo que Russell añade es la pretensión de que esa reducción supone, además, un *análisis filosófico*. Pero si decimos que ese análisis equivale a la pretensión de que determinado sistema formal tiene sólo un modelo, estamos invirtiendo el sentido de la reducción. Lo importante es que hayamos llegado al "cálculo" partiendo del "modelo"; sólo esta vía tiene interés ontológico. Decir que otros modelos verificarían las "operaciones" sería como decir que dos realidades diferentes tienen la misma composición, con lo que ya no podríamos hablar de *dos* realidades. Por eso no conviene perder de vista el predominio de las definiciones sobre los axiomas en Russell. Sólo las primeras garantizan, según él, el sentido de los segundos (y no al contrario, como en el Hilbert de los *Grundlagen*), pues sólo ellas dan el verdadero contenido (único) de los conceptos utilizados.

No cabe, pues, decir que las implicaciones ontológicas no interesan al matemático (Putnam, *ibid.*, p. 427). Russell no hubiese aceptado (al menos antes de su "rendición" a la visión lingüística, la cual tampoco concierne al matemático clásico) que la matemática carezca de la trascendencia platónica que le da su único interés. Como tampoco cabe decir que las definiciones que ofreció de los cardinales sean una mera interpretación "lógica" (entre otras) de los términos primitivos de Peano. Hochberg 1970a ha defendido esto último, lo que, según él, no autorizaría a presentar los primeros como un análisis de los conceptos aritméticos reales del lenguaje ordinario, sino sólo como una posibilidad de expresión (frente a otras). Aquí se comete el mismo error que Putnam cuando defiende (*ibid.*, p. 415) que tanto la matemática pura como la aplicada se refieren a la relación entre axiomas y teoremas: la diferencia radicaría sólo en que, en el segundo caso, los conceptos manejados serían cosas reales. Para Russell, sin embargo, en la matemática pura se habla ya de cosas reales; en consecuencia, existe ya una interpretación: de no haberla, nuestro cálculo estaría vacío y no resultaría verificado más que por convención, siendo sus operaciones meras variables. Por eso las definiciones lógicas no son interpretaciones de conceptos matemáticos.

3. *Axiomas y definiciones*

Como vio perfectamente Reichenbach (1944a, p. 34 s.), aun cuando podamos *decir* que la interpretación russelliana del sistema de Peano es "lógica", sus definiciones no han de verse como "traducciones", sino más bien como "añadidos" a los cinco axiomas de Peano, de manera que éstos pierden su carácter de definiciones "implícitas" del concepto de número. De esa forma ganan un contenido real del que carecían y se convierten en meras *abreviaturas* de otras proposiciones más largas, en las que los tres primitivos del sistema ($N, O, +$) no aparecerían, pero que tendrían el mismo contenido ontológico y, por tanto, equivaldrían a genuinos análisis. Mientras que el proceso de interpretación viene a establecerse entre *dos* lenguajes, el análisis descompone conceptos en sus constituyentes reales y, por tanto, baja de nivel. Es cierto que la evolución posterior de Russell lo condujo a introducir recortes ontológicos, pero *aplicadas a su momento histórico* las reflexiones anteriores muestran, creo yo, el verdadero sentido del logicismo "semántico".

Entendidas como "añadidos", las definiciones lógicas generan, sin embargo, un problema, puesto que, aunque proveamos una definición meramente lógica de la clase que satisface los axiomas de Peano, con ello lo único que habremos logrado es construir una estructura formal en la que pueden demostrarse todas las proposiciones habituales de la aritmética (olvidando por un momento las limitaciones descubiertas con posterioridad). Pero aún faltará lo más importante, ya que, en ella, "el significado de las entidades y relaciones que tienen lugar es hasta cierto punto indeterminado" y, además, "nada muestra que haya clases tales como las que menciona la definición" (1903a, § 123). Es decir, ni siquiera al añadir, sin más, las definiciones lógicas a los axiomas conseguimos alcanzar aquel "contenido real" que necesitamos para superar la vaciedad del mero cálculo formal. Ha de probarse también "que hay un significado constante" que satisface los axiomas y "que ese significado constante debería llamarse número" (§ 122).

Sólo de esa forma se logran todos los objetivos relevantes: se evita la introducción de nuevos indefinibles y se demuestra, al mismo tiempo, que estamos *analizando* algo realmente existente en sus componentes ontológicos últimos.[6] En pocas palabras: Russell no ve la menor diferencia entre las definiciones lógicas y el análisis ontológico. Sólo mediante este último se pueden alcanzar las primeras en su sentido interesante filosóficamente; por tanto, el considerar las definiciones lógicas como axiomas, al lado de los demás, tampoco parece proveer de la base ontológica necesaria. La única salida aparente sería la identificación pura y simple entre los indefinibles lógicos y los "átomos lógico-ontológicos", de los que habló Russell en etapas posteriores (y que había admitido desde su primer contacto con Moore). En todo caso el lenguaje de los modelos y las interpretaciones no parece demasiado útil (o quizá anacrónico) si queremos aclarar el logicismo de Russell en sus propios términos.

Esto me lleva a la segunda forma de logicismo de Putnam: el "si-entoncismo". Como ya dije, equivale éste a la mera cons-

[6] El método concreto es el habitual de esta obra: la identificación de la existencia con la clase no vacía (al modo de Peano). Se define primero la clase a_o de las progresiones, después, una cierta clase de entidades y relaciones (el 0, el 1, la sucesión y la inducción matemática) y, por último, se demuestra que esa clase *pertenece* a a_o, con lo que al tener miembros (la clase "número finito") existe. Naturalmente existen también otras progresiones, pero todas pueden reducirse a ésta, que es la más simple.

tatación de la relación entre axiomas y teoremas. Posteriormente Coffa 1981a se ha referido (en parte) a la misma distinción, hablando de logicismo *estándar* y logicismo *condicional*, siendo este último (más o menos) el segundo de Putnam. Pero Coffa, aunque relaciona también el logicismo condicional con la geometría (en base a la clara condición hipotética de los axiomas de esta última en Russell), introduce un nuevo criterio (p. 249 ss.) en apoyo de la distinción misma: mientras el logicismo estándar se refiere a las teorías matemáticas donde no hay alternativa (es decir, donde, como en la aritmética, se parte de las mismas entidades y, por ello, no se llega a conjuntos distintos e incompatibles de axiomas), el logicismo condicional cubre aquellas teorías donde sí existen alternativas (como sucede, por ejemplo, con las diversas geometrías no euclideanas).

Son innegables las virtudes taxonómicas del criterio de Coffa. Pero hay que insistir de nuevo en la unicidad del logicismo russelliano. Para éste, una definición lógica que incorpore axiomas (por ejemplo los referentes a las progresiones) no designa unívocamente su objeto: es necesario mostrar que éste existe y que posee determinadas propiedades que hacen que los axiomas se verifiquen en él. De no ser así, la definición no tendría interés (sería mero cálculo formal). Pero eso no significa que no podamos construir a placer conjuntos incompatibles de axiomas *en aritmética*. El problema estará, entonces, en hallar dónde verificarlos. En realidad, sucede lo mismo en geometría: disponemos sólo de una realidad empírica a la que aplicar los axiomas para ver si se cumplen o no, por lo que cabe hablar de geometría "pura" y "aplicada" (en un sentido distinto del habitual). Es cierto que Russell no se refiere nunca a una aritmética "pura" y otra "aplicada", pero es sólo porque está convencido (todavía en 1903a) de la existencia platónica de los números (a pesar de la paradoja que tiene lugar al poderlos "analizar" lógicamente y que, no obstante, no resulten "eliminados"), lo que le impide admitir la "existencia" de otras entidades que resulten definidas sólo mediante conjuntos de axiomas maramente consistentes.

Como Frege, Russell consideraba que la no-contradicción dista mucho de conferir entidad ontológica. Y, sin embargo, construyó entidades (los diversos "espacios" de su geometría de 1903a) que parecían estar dotadas de existencia mediante el recurso de convertir los axiomas en definiciones. Ello supone una diferencia *real* entre geometría y aritmética, pues en esta última, aunque consideremos que las definiciones son también axiomas a "añadir" (como propuso Reichenbach), no aparecen varios "espacios aritméticos" incompatibles. El núcleo de esa diferencia radica, más bien, en la ambigüedad entre los términos y las relaciones, que se manifiesta específicamente en geometría, y tiene lugar al no disponerse de la posibilidad de definir constructivamente los puntos. A causa de ello Russell se vio obligado a "definirlos", de forma parecida a 1897a, como aquello que sirve de "extensión" a las relaciones que constituyen las rectas. Con ello tuvo que admitir, a su pesar, construcciones que rechazaba en aritmética. En todo caso, Russell no volvió sobre estos problemas, por lo que las especulaciones podrían continuarse indefinidamente. Con todo ello espero, al menos, haber rebasado el prejuicio, tan generalizado, de que tanto Russell como Frege jamás entendieron "el" método axiomático. Si ello fuese así, mostraría una vez más la necesidad de insertar las tesis filosóficas, si queremos entenderlas, en su contexto histórico real.

4. *Logicismo sin lógica*

Otro problema de interpretación del logicismo surge al plantearse la necesidad (o no) de una definición de la lógica donde sustentarlo. Es innegable que el logicismo sólo puede entenderse si se delimita a qué lógica y a qué matemática nos referimos (Putnam 1967a, p. 428). Asimismo, parece cierto que la identificación no debe entenderse *literalmente*: ello conduciría a ver como lógica a toda la matemática, y a la inversa (Preti 1953a, p. 171), lo que Russell negó explícitamente a través de su definición de matemática y el criterio correspondiente (véase más arriba). Por tanto, la postura de algunos comentaristas (como Jager 1972a, p. 217, y Hao Wang 1965a, p. 64), consistente en admitir la tesis de la identidad (bajo el argumento de que a veces sabemos que dos cosas son iguales sin poder definirlas por separado), no parece muy recomendable. Es necesario aportar un criterio último de la no identidad de lógica y matemática, que a su vez apunte el nexo que las haga poseer las mismas garantías de validez, gracias al reduccionismo de los conceptos y a la derivabilidad de los teoremas de axiomas comunes.

Griffin 1980a ha tratado de encontrar ese criterio en el concepto de *necesidad*, afirmando, además, que ese fundamento, válido en 1903a, sería sustituido por el de *certeza* en *Principia*, a partir de la teoría de los tipos (p. 118). No hay nada que objetar a lo último (aunque sería mejor expresarlo sencillamente como *verdad*), pero el único argumento que ofrece Griffin para sustentar lo primero es fácilmente rebatible (en el fondo vuelvo a defender con ello un solo logicismo). Escribe Griffin que el concepto útil de necesidad que Russell necesitaba en 1903 lo tomó de MacColl, y se refiere básicamente a la "forma" de las funciones proposicionales. Lo argumenta recurriendo a un manuscrito inédito (m1902?) de esa época en el que efectivamente se establece esa noción (p. 122). Con base en ello Griffin conduce a Russell a un dilema según el cual, si aceptaba la cuantificación universal peaniana obtenía expresiones verdaderas para todas las sustituciones, pero que no eran en sí mismas proposiciones y, por tanto, ni verdaderas ni falsas; mientras que, si aceptaba la cuantificación existencial obtenía expresiones verdaderas, pero no necesarias (Griffin, *ibid.*, pp. 125–126).

Contra ello puede argumentarse, en primer lugar, que Russell no distinguía aún con claridad entre *dos* formas de cuantificación. Los dos cuantificadores formaban parte, para él, de toda una serie de expresiones "denotantes", como "un", "el", "cada", etc., por lo que en principio el dilema era para él difícilmente concebible. Pero, lo que es más importante, en el mismo manuscrito inédito ofrece Russell la definición de necesidad a la que alude Griffin sólo como una *posibilidad* más, entre otras muchas, que finalmente son todas rechazadas: "no hay una noción fundamental de necesidad ni, consecuentemente, de posibilidad. Si esta conclusión es válida, el sujeto de la modalidad debe desterrarse de la lógica, puesto que las proposiciones son simplemente verdaderas o falsas, y no hay tal comparativo o superlativo de la verdad como implican las nociones de contingencia y necesidad".

Con ello nos da la clave para el nexo que buscamos: se trata del concepto de verdad, que fue calificado en 1903a de indefinible, intuitivo, e incluso de externo a la matemática misma (véase mi 1988c). De esa forma desaparece, además, el argumento histórico que ofrece Griffin para defender la visión de la necesidad del artículo inédito citado, sobre la base de que constituye una superación de la filosofía de Moore que, en cambio, parece aceptarse en 1903a (aunque esto es también dudoso históricamente).[7] De hecho, lo que hace Russell es criticar la formulación mooreana de la necesidad sólo en la medida en que ya no era compatible con la nueva noción de implicación (aportada por Peano), según la cual todas las proposiciones verdaderas son implicadas por todas las proposiciones, mientras que Moore había mantenido que *el grado* de necesidad dependía de la cantidad de proposiciones a las cuales sea "previa" una proposición dada (véase mi 1990d). Pero Russell sigue mante-

[7] Griffin 1980a ha situado m1902? en 1904 aduciendo que contiene una crítica al concepto mooreano de necesidad y añadiendo que tal concepto es utilizado en 1903a. Pero el único lugar de 1903a donde se toca el tema (p. 451) se halla incluido en el cap. 51, que no es sino la transcripción de la última parte del trabajo presentado al congreso (1900a). Por tanto m1902? puede perfectamente ser *posterior* a ello y también *anterior* a 1903a, una vez terminada.

niendo en m1902? la misma postura que en 1903a y en 1900a; según esta postura, la necesidad es más una noción psicológica que lógica. En cambio, la noción de verdad, objetiva, absoluta e indefinible, sí que valía para el logicismo y, de paso, permitía mantener la conexión con la base filosófica mooreana. Por consiguiente, la necesidad nunca estuvo en la mente de Russell como criterio para definir lo característico de las proposiciones de la lógica o la matemática.

La ventaja de la noción mooreana de verdad estaba en que, siendo heredera del espíritu "realista" de Bradley, intentaba superar la teoría de la correspondencia y evitaba caer en la teoría de la coherencia. Vista así, la verdad es una propiedad inmediata y, como la intuición sensible de un color (el famoso "amarillo" de Moore), se percibe sin más, mientras que la necesidad da paso a "mundos posibles", por lo que remite a la mera existencia lógica o no-contradicción.[8] En el mismo párrafo de 1903a en que Russell parece acogerse a la vieja noción de Moore (§ 430) introduce una referencia a la relación con la imaginación. Y, si comparamos el texto con el original (1900a), veremos que incluso ha suavizado el calificativo (hacia la visión de Moore) de teoría "psicológica", que aparecía de lleno en aquél, manteniendo claramente la intuitividad de nuestro acceso a la verdad: "Lo que es verdadero es verdadero; lo que es falso es falso, y no hay nada que decir. La necesidad parece ser una noción más psicológica que lógica" (1903a, p. 275). Resumiendo: la crítica a Moore es de detalle y permite mantener la dependencia de toda la lógica y la matemática de la noción intuitiva de verdad, mientras que la necesidad resulta descalificada.[9]

[8] Radner 1975a, p. 246, ha visto esto claramente.

[9] Además, Russell rechazó *siempre* en lo sucesivo toda posibilidad fructífera de utilización de las nociones modales.

Esta constatación nos permite también salir al paso de una explicación propuesta por Grattan-Guinness,[10] para dar cuenta de la falta de una definición clara de la lógica por parte de Russell. Nos dice este autor que Russell tomó de Peano una concepción de la lógica como teoría unitaria que incorporaba también la metalógica, lo que hacía imposible distinguir entre uso y mención, axioma y regla, etc., y, por ello, apreciar las "sutilezas" de Frege. Con el inconveniente de que, al partir de tal concepción "holística" de la lógica, le era virtualmente imposible a Russell dar una definición: si no discutió la naturaleza de la lógica es, pues, porque no podía. Sin embargo, hemos visto que Russell no sólo sí discutió la naturaleza de la lógica, sino que redujo su esencia, en común con la de la matemática, a la noción de verdad, que, asociada con la de variable, produjo el concepto de "verdad formal" presente en 1903a a través de las funciones proposicionales y la cuantificación universal: "Parece ser la verdadera esencia de lo que puede llamarse una verdad *formal*, y del razonamiento formal en general, que se afirme el mantenimiento de alguna aserción de todo término; a menos que la noción de *todo término* se admita, las verdades formales son imposibles" (1903a, § 44). Y lo mismo se repite para la matemática, cuya característica es precisamente la formulación de tales verdades concernientes a cualquier término (§ 105).

En consecuencia, lo que hacía imposible a Russell dar una definición más precisa de la lógica era la indefinibilidad de su noción central: la verdad formal. Pero ello no suponía, a ojos de Russell, la menor dificultad; es más, constituía incluso una garantía de haber tocado "fondo ontológico" y haber hallado la base indefinible e intuitiva que necesitaba. En un lenguaje mooreano podríamos decir que la verdad se *manifiesta* en la lógica, pero ésta no permite aprehenderla (salvo en esas manifestaciones), por la sencilla razón de que cualquier propo-

[10] 1974a, p. 402 s.; lo mismo en 1977a (pp. 106 y 113) y 1980a, p. 87.

sición que lo hiciera tendría que ser también verdadera. Esta paradoja, que afectó también a Wittgenstein (véase mi 1990c) y que procede directamente de Bradley y Moore (véanse mis 1990d, 1990e, 1900f y 1990i), da paso a la indistinción entre los razonamientos como reglas y los axiomas (y conjuntos de axiomas) como *entidades*. Por tanto, lejos de decir que se trata de una confusión que impide definir la lógica, habría que decir que de lo qué se trata es de una ontología que fundamenta la lógica de tal manera que *impide* distinguir, apelando a la intuitividad de la verdad, entre la mera regla como "entidad" que afirma la implicación de una proposición a otra y el conjunto de axiomas que, aunque "definen" una entidad compleja, ofrecen sólo el campo para el establecimiento de meras implicaciones (teoremas). Pero ambos serían las formas más generales del pensamiento verdadero "tal como se revelan en los hechos lógicos" (Dufumier 1909a, p. 652). Y ello independientemente de que sólo en algunos casos prefiramos hablar de verdaderas entidades: cuando partimos de clases y relaciones entre ellas.

Cuando Russell ofreció su célebre definición de matemática en términos de implicación, debía tener en mente algo parecido. Por tanto, debió ser más claro y reformular su proclama logicista en términos de verdad, en lugar de eludir el tema para no afrontar el problema de la intuición, que sin duda le resultaba incómodo en una obra ya bastante antikantiana. Así, en lugar de defender la definibilidad (y deducibilidad) lógica de los conceptos (y proposiciones) de la matemática, debería haber expuesto con claridad que lo que incorpora la lógica son las *verdades* matemáticas, y que éstas, una vez convertidas en proposiciones lógicas, son deducibles de un pequeño número de axiomas lógicos *verdaderos*.[11] El que posteriormente se presentara el problema de distinguir entre una proposición lógica verdadera y una "verdad lógica" (véase Sainsbury 1979a,

[11] Manejando, claro es, una "lógica" en la que incluyamos la teoría de conjuntos.

pp. 2762–2763), por ejemplo, en el caso del axioma de infinitud o cualquier otra expresión susceptible de expresarse en términos lógicos y cuya verdad se pretenda "empírica", o la cuestión gödeliana (es decir, el mostrar como imposible la completud de la deducción) no afectaría, así, a la *verdad* de la reducción en sí misma, por más parcial que fuese, Y, con ello, el análisis quedaría situado en los términos ontológicos precisos.

Puede objetarse aún (véase Pollock 1970a, p. 395) que, si consideramos el logicismo como una teoría acerca de la verdad matemática en general, entonces es falso, por cuanto ciertos conceptos de la matemática no clásica no son reducibles a la teoría de conjuntos (o sea, a la lógica de orden superior). Se añade también (*ibid.*, p. 392) que por Gödel sabemos de la inutilidad de la reducción, pues la lógica no está más clara que la matemática a efectos de axiomatización *completa*. Sobre lo primero, es difícil decidir lo que Russell habría respondido: en todo caso no parece que tuviese excesivos problemas en expulsar de la matemática "pura" a los conceptos no reducibles a la lógica (al menos en 1903a), aun a riesgo de bordear el círculo vicioso o de entrar de lleno en la arbitrariedad de identificar lo derivable "de hecho" con lo derivable "en sí mismo". De hecho utilizó este criterio, por ejemplo cuando en 1903a (§ 393) declaró perteneciente a la matemática aplicada la noción de "magnitud de divisibilidad", aduciendo sólo que "no puede derivarse de nuestro aparato original de nociones lógicas". El criterio orfece inmensas ventajas y en cuanto al cinismo que parece exhibir podría aducirse que al menos no cae en la incoherencia de presentar *a priori* ciertas nociones como lógicas. Lo cierto es que este recurso sintonizaba a la perfección con el estilo "empirista" de Russell en lógica.

Sobre la segunda objeción, Russell sólo se refirió al *contenido* de los descubrimientos de Gödel en 1971a,[12] donde dice

[12] En un artículo que tengo en preparación, demuestro (contra la acusación de Hao Wang en su reciente libro sobre Gödel) que, según evidencia

que el que no podamos probar (o refutar) ciertas proposiciones era ya algo de lo que él estaba convencido (pone el ejemplo de los dos polémicos axiomas de *Principia*), pero que en ningún caso tal constatación debe conducir a descalificar la lógica matemática como algo incapaz de ser verdadero en general. Y añade que la influencia destructiva de la obra de Gödel no debería conducir a tantas restricciones, y menos a la exigencia de probar la no-contradictoriedad de un conjunto de axiomas antes de desarrollar sus consecuencias: "Siempre consideré esto imposible pues el número de consecuencias de cualquier conjunto dado de axiomas es infinito."

Si, en todo caso, el logicismo de Russell no tenía muy claras sus cuentas con "la lógica", no cabe achacarlo a la debilidad de su postura; antes al contrario, parece ser consustancial a cualquier logicismo. Si recurrimos al de Frege, hallamos una postura parecida; incluso podríamos también reprocharle la ausencia de una definición de lógica que fuese clara y operativa. No puede ser casualidad que tampoco él ofreciera esa definición.[13] No dispongo aquí de espacio para referirme a ello en detalle, pero basta leer ciertos epígrafes de su 1884a (p. ej. el 4 o los 87–91), la intoducción a 1893a y sus póstumos 1914a y 1918a, para comprobar inmediatamente que la mayoría de los elementos logicistas centrales de Russell estaban ya en Frege, configurando una posición filosófica parecida y, en lo esencial, idéntica.[14] Así: la fundamentación de la lógica en la noción in-

inédita en los Archivos Russell, la falta de respuesta por parte de Russell se debió a la increíble tardanza de Gödel (más de tres meses) en revisar su primera versión del articulo de acuerdo con el editor, y no fue una excusa para evitar un estudio del trabajo del genial lógico. De paso, analizo la reacción de Russell ante los célebres descubrimientos gödelianos, para afrontar la creencia de algunos lógicos y filósofos contemporáneos de que "Russell no entendió a Gödel".

[13] Véanse Thiel 1970a (p. 153) y Deaño 1980a (p. 61). Sorprendentemente Largeault 1970a, expresamente dedicado a la lógica de Frege, no parece haber notado la carencia.

[14] Véase Klemke 1979a para una visión de conjunto.

definible de verdad (que es simple e intuitiva); el platonismo (que considera el estudio de los objetos lógicos y matemáticos como algo parecido, p. ej., a la zoología) y el predominio de la definición nominal.[15] Todo ello apunta a, y se apoya en, el "tercer reino", situado fuera de lo físico y lo mental (de forma parecida a Bradley); el cual, sin embargo, recibe una extraña confirmación en el lenguaje ordinario, que es la materia prima que ha de transformarse en lenguaje lógico ideal. La diferencia más notable sería la reluctancia de Frege a incluir la geometría en la máquina logicista, aduciendo la necesidad de intuición en ella. Curiosamente, empero, Frege acabó intentando una fundamentación de la matemática precisamente en la geometría, como alternativa a la desechada y contradictoria basada en la lógica (al parecer porque la geometría contenía ya infinitos puntos, con lo que no se necesitaba axioma de infinitud alguno).

Parece claro que, después de todo, la mayoría de los problemas del logicismo de Russell se derivan de su postura ambigua entre el predominio de las estructuras lógicas por sí mismas (relaciones), que pueden construirse sin el recurso a la intuición, y el predominio de las definiciones constructivas (de términos) que les sirven de base, las cuales han de recibir ese "significado constante" que sólo podemos extraer de la intuición lingüística (del sentido común en definitiva). Esa tensión hacía que unas veces predominara la simplicidad logicista y otras la intuición que debía consagrar las construcciones. Cuando Couturat le reprochó en una carta de 1903 la dificultad de algunos de los axiomas de 1903a, Russell respondió que es necesario a veces sacrificar la evidencia intuitiva de los axiomas a la "simplicidad lógica", y que no toda la evidencia de un sistema debe proceder de las premisas (citado en Schmid 1980a, p. 93). En cambio, contra los axiomas de Peano lanzó la crítica opuesta, achacándoles la ausencia de "signifi-

[15] Contra las definiciones por postulados, axiomáticas o "implícitas", en la tradición de Hilbert y Peano; véase mi 1987a, cap. 2.

cado" intuitivo que debería fundamentarlos. No obstante, la ontología platónica (lo único que alaba Gödel 1944a de Russell) no basta, por sí misma, para justificar ese recurso a la intuición, sobre todo porque exige "visualizar" entidades extraídas del lenguaje que, como los números, son después eliminadas en favor de términos lógicos más simples: los auténticos indefinibles; y ello con el argumento de que los números han de poder ser utilizados en la vida cotidiana, es decir, remitiendo a la "matemática aplicada".

Resumiendo: es como si Russell pretendiese que, por un lado, los indefinibles nos son dados y, por otro, que sólo se revelan en la construcción misma, con lo que no se sabe nunca si el análisis opera al principio o durante la construcción. Dicho de otra manera: es como si los términos dieran paso a la estructura de relaciones y, sin embargo, sólo esta última fuese *suficiente* para descubrirlos y justificarlos. No obstante, tampoco puede decirse (como Reichenbach 1944a, p. 40) que para Russell la lógica no era "formal", al requerir términos primitivos cuyos significados han de entenderse *antes* de que entren en las operaciones formales: para Russell esas mismas operaciones (relaciones al fin) bastaban para designar su *campo*. Lo que sucede es, sin más, que Russell pretende participar *a la vez* de las ventajas del formalismo y de las del intuicionismo. Pero no, como escribe Carnap (1931a, p. 52), compartiendo con los primeros el predominio del cálculo formal (a pesar de las interpretaciones "privilegiadas") y con los segundos la exigencia de definiciones constructivas justificadas en todos sus pasos, sino *fundiendo ambas características entre sí*. Las chispas que saltan son visibles en toda su obra, y el método es lo que mejor exhibe esa tensión (como demuestro en mi 1987a). En definitiva, el método se concretó en la búsqueda de esos indefinibles *lógico-ontológicos* en todos los terrenos (el lenguaje ordinario, la lógica, la epistemología, la ciencia, etc.) y en las técnicas matemáticas que *después* se les aplican. Lo cual no ha de conducir, sin embargo, al reproche de no haber sabido (con Frege) definir con precisión lo formal; y menos en un momento en que tal noción se está convirtiendo en una reliquia histórica.[16]

BIBLIOGRAFÍA

Benacerraf, P. y Putnam, H. 1983a (eds.) *Philosophy of Mathematics* (2a. ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Carnap, R. 1931a "Die Logizistische Grundlegung der Mathematik", trad. ing. ("The Logicist Foundations of Mathematics") en Benacerraf y Putnam 1983a, pp. 41–52.

Coffa, J.A. 1981a "Russell and Kant". *Synthèse* 46, pp. 247–263.

Deaño, A. 1980a *Las concepciones de la lógica*, Madrid: Taurus.

Dufumier, H. 1909a "Les théories logico-métaphysiques de MM. B. Russell et G.E. Moore". *Rev. Mét. Mor.* 17, pp. 620–653.

Frege, G. 1884a *Die Grundlagen der Arithmetik*, trad. cast. de U. Moulines (*Fundamentos de la Aritmética*), Barcelona: Ariel, 1972.

—— 1893a *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, trad. ing. parcial (Introd. y § 0-52) de M.Furth (*The Basic Laws of Arithmetic*), Berkeley: University of Cal. Press, 1964.

—— 1914a "Logik in der Mathematik". En 1974a, pp. 81–135.

—— 1918a "Der Gedanke". En 1974a, pp. 136–157.

—— 1974a *Escritos lógico-semánticos*, trad. cast. de C.R. Luis y C. Pereda, Madrid: Tecnos.

Garciadiego, A. 1985a "Una nueva interpretación del origen del logicismo". *Cuadernos de café y matemáticas* 1, pp. 59–66.

Gödel, K. 1944a "Russell's Mathematical Logic". En Schilpp 1944a, pp. 125–153.

Grattan-Guiness, I. 1974a "The Russell Archives: Some New Light on Russell's Logicism". *Ann. Sci.* 31, pp. 387–406.

—— 1977a *Dear Russell - Dear Jourdain*, Londres: Duckworth.

—— 1980a "G. Cantor's Influence on B. Russell". *Hist. Phil. Log.* 1, pp. 61–93.

[16] Russell abordó en su manuscrito m1912 la tarea de definir la lógica, pero la tarea le resultó imposible; para un tratamiento de éste, y otros intentos similares, de definir lo formal a partir de la noción de "forma", véanse mis 1990d y 1990i.

Griffin, N. 1980a "Russell on the Nature of Logic (1903–1913)". *Sinthèse* 45, pp. 117–188.

Hochberg, H. 1970a "Russell's Reduction of Arithmetic to Logic". En Klemke 1970a, pp. 396–415.

Jager, R. 1972a *The Development of B. Russell's Philosophy*, Londres: Allen & Unwin.

Klemke, E.D. 1970a (ed.) *Essays on Bertrand Russell*, Urbana, Ill.: University of Ill. Press.

—— 1979a "Frege's Philosophy of Logic". *Rev. Int. Phil* 33, pp. 666–693.

Largeault, J. 1970a *Logique et philosophie chez Frege*, París: Nauwelaerts.

Pollock, J.L. 1970a "On Logicism". En Klemke 1970a, pp. 388–395.

Preti, J. 1953a "La filosofia della matematica di B. Russell". *Rev. Crit. Stor. Filos.* 8/2, pp. 139–174.

Putnam, H. 1967a "La tesis de que las matemáticas son lógica". En Schoenman 1967a, pp. 385–428.

Radner, M. 1975a "Philosophical Foundations of Russell's Logicism". *Dialogue* 14, pp. 241–253.

Reichenbach, H. 1944a "Bertrand Russell's Logic". En Schilpp 1944a, pp. 23–54.

Rodríguez-Consuegra, F.A. 1987a *El método en la filosofía de Bertrand Russell. Un estudio sobre los orígenes de la filosofía analítica a través de la obra de Russell, sus manuscritos inéditos y los autores que más le influenciaron*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, x + 800 pp. (Copias en sistema microficha disponibles sobre pedido.)

—— 1987b "Bibliografía de Bertrand Russell en español". *Mathesis* 3, pp. 183–197.

—— 1987c "Russell Logicist Definitions of Numbers 1899–1913: Chronology and Significance". *Hist. Phil. Log.* 8, pp. 141–169.

—— 1988a "Bertrand Russell 1898–1900: una filosofía de la matemática inédita". *Mathesis* 4, pp. 3–76.

—— 1988b "Elementos logicistas en la obra de Peano y su escuela". *Mathesis* 4, pp. 221–299.

—— 1988c "Bertrand Russell 1900–1913: los principios de la matemática, parte 1a.". *Mathesis* 4, pp. 355–392.

—— 1988d "Bertrand Russell 1900–1913: los principios de la matemática, parte 2a.". *Mathesis* 4, pp. 489–521.

—— 1989a "Russell's Theory of Types, 1901–1910: Its Complex Origins in the Unpublished Manuscripts". *Hist. Phil. Log.* 10, pp. 131–164.
—— 1989b "The Origins of Russell's Theory of Descriptions According to the Unpublished Manuscripts". *Russell* 9, pp. 99–132.
—— 1989c "La 'pérdida de certidumbre' en la matemática y la ciencia contemporáneas". Aparecerá en *Mathesis*.
—— 1990a "Russell's First Technical Philosophy". Essay-review of I. Winchester and K. Blackwell (eds.) *Antonomies and Paradoxes. Studies in Russell's Early Philosophy*, Hamilton: McMaster University Press, 1989 (*Russell*, 8 (1988) nos. 1–2). Aparecerá en *Hist. Phil. Log.* 11/1.
—— 1990b "Bertrand Russell 1895–1898: una filosofía prelogicista de la geometría". *Diálogos*, 55, pp. 71–123.
—— 1990c "El impacto de Wittgenstein sobre Russell: últimos datos y visión global". Aparecerá en *Theoria*.
—— 1990d "La primera filosofía de Moore". Aparecerá en *Ágora*.
—— 1990e "La influencia de Bradley en los orígenes de la filosofía analítica". Aparecerá en *ER. Revista de Filosofía*.
—— 1990f "Some New Light on Russell's 'Inextricable Tangle' About Meaning and Denotation". Aparecerá en *Russell*.
—— 1990g "A Comparison of the Theories of Descriptions by Frege, Peano and Russell". En preparación.
—— 1990h "Bertrand Russell 1920–1948: una filosofía de la ciencia entre el holismo y el atomismo". Aparecerá en *Diálogos*.
—— 1990i "Bertrand Russell and Bradley's Ghost: Evolution and Significance of Russell's Views Concerning Relations". Próxima publicación.
—— 1991a *Bertrand Russell's Mathematical Philosophy: Origins and Development*, aparecerá en Nápoles: Bibliópolis.
—— 1991b "A Global Viewpoint on Russell's Philosophy". Ensayo-reseña de Wade Savage y Anthony Anderson 1989a. Próxima publicación en *Diálogos* 56.
—— 1992a "Mathematical Logic and Logicism From Peano to Quine". En I. Grattan-Guiness (ed.), *Encyclopaedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London: Routledge, próxima publicación.
Russell, B. 1897a *An Essay on the Foundations of Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge.

—— 1900a "L'idée de l'ordre et de la position absolue dans l'espace et dans le temps", *Congrés Int. de Phil.*, Colin, París, 1901, vol. III, pp. 241–277.
—— 1900b "Recent Work on the Principles of Mathematics". *Intert. Monthly* 4, pp. 83–101. Reimp. ("Mathematics and Metaphysicians") en 1918a, pp. 75–95.
—— m1902? "Necessity and Possibility", 18 hojas, manuscrito en los Archivos Russell, McMaster University, Hamilton, Canadá.
—— 1903a *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge. Segunda edición con un nuevo prefacio, Allen & Unwin, London, 1937.
—— 1910a (con A.N. Whitehead) *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge.
—— m1912a "What is Logic?", 5 hojas, manuscrito en los Archivos Russell, McMaster University, Hamilton, Canadá.
—— 1918a *Mysticism and Logic*, Longmans Green, London.
—— 1919a *Introduction to Mathematical Philosophy*, Allen & Unwin, London.
—— 1937a "Introduction to the Second Edition", 1903a, v–xiv.
—— 1944a "My Mental Development". En Schilpp 1944a, pp. 3–20.
—— 1944b "Repply to the Criticisms". En Schilpp 1944a, pp. 681–741.
—— 1951a "Is Mathematics Purely Linguistic?", 1973, pp. 295–306.
—— 1959a *My Philosophical Development*, Allen & Unwin, London. Reimp. en Unwin Books, London, 1975.
—— 1971a "Addendum to My 'Repply to Criticisms". En Schilpp 1944a (4a. ed., 1971), xvii–xx.
—— 1973a *Essays in Analysis*, (ed. D. Lackey), Londres: Allen & Unwin.
Sainsbury, R.M. 1979a *Russell*, Londres: Routledge.
Schilpp, P.A. 1944a *The Philosophy of B. Russell*, La Salle, Ill.: Open Court.
Schmid, S.F. 1983a "La correspondance inédit entre B. Russell et L. Couturat". *Dialéctica* 37/2, pp. 75–108.
Schoenman, R. 1967a (ed.) *Bertrand Russell. Philosopher of the Century*, trad. cast. de U. Moulines (*Homenaje a B. Russell*), Barcelona: Oikos Tau, 1968.

Thiel, C. 1970a *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlog Freges*, trad. cast. de J. Sanmartín, Madrid: Tecnos, 1972.
Wang, Hao 1965a "Russell and His Logic", trad. cast.: *Teorema* 4, pp. 31–76 (correcciones en 8, 1972, pp. 91–8).
Whitehead, A.N. 1898a *A Treatise on Universal Algebra*, Cambridge: Cambridge University Press.

Recibido: 29 de mayo de 1991

SUMMARY

After a brief presentation of Russell's logicism, I attempt a global explanation of its philosophical significance. I reject the existence of two different kinds of logicism (Putnam) with the argument that Russell was trying to justify the existing mathematics and, at the same time, to escape from a mere formal calculus. For the same reason, the logicist definitions cannot be regarded as new axioms to be added to Peano's postulates (Reichenbach): according to Russell it is necessary to show that there is a constant meaning satisfying those postulates. The lack of a clear definition of logic in Russell (and Frege) is a consequence of his whole philosophy, therefore we must not look for it in the concept of necessity (Griffin), nor must we interpret this lack as a gap in the system (Grattan-Guinness). Russell's starting point was Moore's notion of truth as something indefinable and intuitive according to which we immediately *recognize* the true propositions. The problem of logicism is rather the deep tension between the ontological preeminence of relations (structures) and their terms (fields).

[*F.R.C.*]