ARTÍCULOS

CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXIII, No. 68 (agosto 1991): 7–86

NÚMEROS, OBJETOS Y ESTRUCTURAS

FRANCISCO RODRÍGUEZ CONSUEGRA
Instituto S. Vilaseca
McMaster University

1. *Introducción*

El objetivo principal de este trabajo es llevar a cabo un estudio crítico del célebre artículo de Benacerraf "What Numbers Could not Be" (1965a), señalando brevemente sus antecedentes, destacando sus logros, problemas e insuficiencias básicos, seguido de un análisis y evaluación de las principales críticas a que ha sido sometido, así como de un marco histórico donde una nueva crítica global cobra sentido. Por último, se estudia un posible nexo con la filosofía estructuralista de la matemática, resultado parcial de la influencia de Benacerraf.

En la sección 2 se muestra que los antecedentes "objetivos" fundamentales son Quine, junto a Parsons y el nominalismo de Goddard, y se señalan también algunas diferencias importantes. Después (sec. 3) se estudia su rechazo de la identificación entre números y objetos y su sustitución por las progresiones, en el marco del típico argumento quineano del polimorfismo conjuntista, así como su difícil teoría de la identidad, todo ello falto de un contexto ontológico claramente relativista. Su reducción de los números a posiciones en una progresión se sitúa en un debate ya antiguo entre lo cardinal y lo ordinal, que da paso a un estructuralismo en ciernes, aunque carente de la suficiente justificación. Las secciones 4 y 5 constituyen un estudio valorativo de las críticas que me parecen más certeras, o más ilustrativas de los problemas subyacentes. Entre ellas, se pasa revista a lo más relevante de la literatura (Steiner, Resnik, Maddy, Wright, entre otros) de entre la enorme cantidad de trabajos, que han tocado el tema aparecidos en los últimos veinte años. Se trazan también líneas comunes, mostrando posibles defensas de Benacerraf, aunque de nuevo se indican las carencias de su postura, procedentes de sus problemas pendientes (el marco histórico, la ontología indefinida, el estructuralismo en ciernes, etc.).

En la sección 6 se presenta un *ex cursus* histórico donde se muestra que el problema de lo cardinal frente a lo ordinal puede verse como centro de las dificultades señaladas. Se compara la teoría de Dedekind-Peano con la de Cantor, señalando las ventajas epistemológicas y las constructivas de la segunda. Se muestra cómo posturas muy afines a la de Benacerraf fueron ya mantenidas por Cassirer y Weyl (¡sin contar a Berkeley!), al tiempo que el enfoque cantoriano de Couturat y Russell se presenta como superior, al menos desde el punto de vista de una concepción global. Por último, se señala el nexo entre construcción y polimorfismo, problema común en lógica, matemática y física. Finalmente, la sección 7 traza los antecedentes del estructuralismo actual (Resnik, Shapiro) en el propio Benacerraf y extiende el rastreo histórico a los ordinalistas, Bourbaki y Quine, tratando de arrojar alguna luz sobre el problema de fondo: la supuesta antítesis entre términos y relaciones (ya familiar a Bradley y Russell). Por otro lado, se intenta un paralelismo con el relativismo de las entidades matemáticas tal y como éste aparece tras las limitaciones de la axiomatización, al menos de primer orden. Se finaliza con un ensayo de inserción del tema en la teoría de las categorías, que sorprendentemente no ha sido aún —por lo que sé— considerada por los estructuralistas, a pesar de que a todas luces se trata de una extensión natural de su punto de vista.

2. *Los antecedentes*

Antes de ofrecer lo esencial de las ideas de Benacerraf al respecto, conviene dedicar algún espacio a sus antecedentes más directos. De ellos, el más importante es sin duda Quine y su visión de la reducción ontológica en matemática. Sin embargo, diré también algo del artículo de Parsons sobre la definición fregeana del número (1965a), que muestra algunos rasgos interesantes en común con Benacerraf, y también del de Goddard sobre el contar (1961a), que ofrece una interesante teoría nominalista sobre los numerales.

En otra parte he ofrecido ya un estudio evolutivo de la reducción ontológica de Quine,[1] donde muestro que su propia profundización de la doctrina de la relatividad ontológica ha estado en función de la clarificación de las dificultades de la explicación originaria de la reducción matemática. Así, la teoría de *Palabra y objeto*, de tan gran influencia en Benacerraf y otros, no es más que un boceto donde el pragmatismo de Quine se agota en presentar como equivalentes en la práctica las diversas reconstrucciones posibles de los conceptos matemáticos (y científicos), aunque con el interés de un programa general en el marco de una relatividad ontológica creciente. Sin embargo, la identificación llevada a cabo entre reducción y eliminación supone ya sin duda la idea central, por más que sea en el marco de una cierta falta de consideración de las dificultades del logicismo clásico de Frege y Russell.

No obstante, el paso fundamental de la evolución de la teoría quineana de la reducción fue el añadido de la condición de una función sustitutiva (*proxy function*) en su 1964a. Tal función se introduce para justificar el rechazo de la pitagorización de cualquier teoría consistente —en primer orden— dimanante del teorema de Löwenheim-Skolem. Este tipo de reducción se reconoce —algo injustificadamente— como trivial, pero tiene la consecuencia de destruir el claro criterio anterior según el

[1] "La reducción ontológica y sus problemas", en preparación.

cual reducir es eliminar. Ahora se exige dotar de entidad ontológica a los "objetos" de la teoría reducida, al tiempo que se requiere una teoría de fondo (*background theory*), que sin embargo complete y perfeccione la tesis de la relatividad ontológica. El problema de la eliminación se muestra, pues, como *crux* de la filosofía quineana.

Parece claro que hay que insertar el trabajo de Benacerraf en el contexto de las propuestas de la época destinadas a extraer las consecuencias de posturas semejantes, especialmente en lo que concierne a la dificultad de sentar una doctrina de la reducción con independencia de un cierto absolutismo en ontología. Como vamos a ver, Benacerraf supone una radicalización de Quine en el sentido nominalista aunque, al faltarle una teoría global propia de la reducción (como por ejemplo la relatividad ontológica), da lugar a nuevos problemas.

Parsons 1965a es un trabajo curioso si lo relacionamos con Benacerraf. Defiende, en general, una postura parecida, pero no fue conocido por Benacerraf hasta después de haber escrito el suyo,[2] mientras que, por otra parte, Parsons cita la tesis doctoral de Benacerraf sobre el logicismo.[3] Creo, pues, que hay que interpretarlo como otra muestra de un cierto ambiente general, en la senda de Quine, en el que existía la preocupación de dar una alternativa sostenible al logicismo desde un punto de vista más o menos conjuntista, aunque conservando algo de su espíritu. Es por esa razón que creo interesante considerarlo como un "antecedente" y me esforzaré por señalar con precisión los aspectos claramente paralelos en ambos autores.

Parsons discute, en primer lugar, la tesis fregeana de que los números son objetos (en el sentido fregeano de objetos lógicos) que rápidamente reduce, a falta de una teoría propia de la existencia de objetos, al problema de la existencia de las exten-

[2] Como afirma el propio Benacerraf en una nota de su 1965a.

[3] E incluso el propio artículo de Benacerraf, aunque quizá tal mención se añadió al insertar el trabajo en la antología 1983a.

siones de los conceptos, que como es sabido fue el material reductivo de Frege. En este punto aparece ya lo que llamo el polimorfismo conjuntista de los números: la observación quineana de que es posible una serie infinita de reducciones de los números a secuencias de clases que los representen, donde se menciona incluso la construcción ordinal de von Neumann. El siguiente pasaje desarrolla esta idea precisamente recurriendo a un experimento mental relativo al aprendizaje de los números en una extraña tribu, sin duda inspirado en la traducción radical de Quine, y que volverá a aparecer en Benacerraf (Parsons, 1965a, p. 155).

> Es extraño que tengamos que identificar los números con extensiones para asegurar que los términos numéricos posean referencia, pero que tengamos entonces que poder escoger esa referencia de casi cualquier manera que nos gustara. Podríamos mantener la fantasía de una tribu de matemáticos que usen el lenguaje común de la teoría de números y que acepten también todos la misma teoría de conjuntos. En su vida pública nunca surge la cuestión de si los números han de identificarse con clases. Sin embargo, cada uno de ellos identifica *para sí* los números naturales con cierta secuencia de clases pero no dice a los otros cuál es. Si uno dice que dos términos de la teoría de números se refieren al mismo número, el que otro asienta o disienta no depende para nada de si *sus* números naturales son o no los mismos que los del hablante [...]

La conclusión inmediata es ya virtualmente la misma que la de Benacerraf: "A qué clase se refiere un término de la teoría de números no constituye niguna diferencia en matemáticas, ¿cuál es la relevancia de la *posibilidad* de una identificación de números y clases para la tesis de que los números son objetos?" Esto no es todavía decir que, si no hay reducción privilegiada, no hay tampoco fundamento para la identificación entre números y objetos particulares, pero se le parece mucho.

La misma idea afecta a la supuesta identificación general entre aritmética y lógica, incluyendo la versión del logicismo según la cual lo que éste demuestra realmente es que los axiomas de Peano pueden ser modelados en teoría de conjuntos. Según Parsons tal modelización es completamente independiente del análisis fregeano del número cardinal en términos de extensiones de conceptos y de equivalencia entre ellos (1965a, p. 165); por tanto, es compatible con otras reducciones conjuntistas del número. Sin embargo, Parsons defiende la tesis, más fuerte incluso que la de Benacerraf, de que la aritmética no es reducible a la teoría de conjuntos, con el viejo argumento de que tal reducción sería circular: "debemos usar igualmente la noción para establecer la teoría de conjuntos, para ver la verdad de las proposiciones conjuntistas a las que las proposiciones número-teóricas son reducidas mediante definiciones explícitas, o para ver la equivalencia de las proposiciones conjuntistas y sus correlatos número-teóricos" (*ibid.*, p. 168).

Parsons va más allá que Benacerraf también en un punto importante: aborda explícitamente la tradicional oposición entre los enfoques cardinal y ordinal en la fundamentación lógica del número, aunque, como Benacerraf, se decide finalmente por dar primacía a los ordinales (las progresiones), como esencia del número. Su discusión del tema de la referencia de los numerales es iluminadora por cuanto señala que diversos sistemas de numerales hacen posible la denotación de los mismos números a través de la correlación entre ellos, que es posible precisamente a través de la noción de correspondencia biunívoca. Sin embargo no se entiende bien por qué, si reconoce esto con toda claridad[4] y con ello que "las nociones ordinal y cardinal son interdependientes" (1965a, p. 171), pasa sin más a defender el predominio de lo ordinal: "No veo cómo podría decírsenos que los números nos son *dados* excepto a través de una secuencia de numerales o algunos otros representantes del mismo tipo

[4] "It seems to me that Frege *does* show that the logical notion of one-to-one correspondence is an essential constituent of number, ordinal as well as cardinal" (1965a, p. 172).

de orden." Lo que lleva, inmediatamente, a acusar a Frege de introducir una complejidad innecesaria con sus definiciones logicistas explícitas. Esta postura final, que se asemeja a la de Benacerraf, será mostrada en secciones posteriores como falta de consideración hacia el hecho de que la construcción completa del número debe recoger también el par finito-infinito, que puede presentarse, económicamente, como *posterior* a la introducción de la noción de correspondencia biunívoca. lo cual llevó a Russell —siguiendo a Cantor— a introducir primero los cardinales.

Por último, también Parsons viene a definir el número como la mera posición en una progresión: "Lo que garantiza la *existencia* del número *n* es la existencia de un conjunto ordenado en el cual algún objeto sea el *n*-ésimo. Para cualquier numeral, los numerales hasta él mismo constituirán un conjunto. Entonces ningún hecho más allá de la generación de los numerales se necesita para garantizar que éstos tienen referencia" (1965a, p. 172). Los matices, son, sin embargo, diferentes; pues, como veremos, para Benacerraf la misma situación objetiva lleva, con Quine, a la negación de cualquier referencia, o similarmente, a la negación de los números como objetos, mientras que Parsons, como hemos visto, se limita a eludir el tema de los objetos. Quizá por ello Parsons, como conclusión final, evita también la afirmación de que el polimorfismo conjuntista del número tenga que llevar a su eliminación: "Con respecto a la relación de la noción de número natural con la noción de conjunto finito, me parece claro que van juntas y que ninguna de ellas puede ser entendida sin la otra" (*ibid.*, p. 173). Indudablemente Benacerraf, siguiendo parcialmente a Quine, ha ido mucho más lejos.

Llego así al artículo de Goddard (1961a), el último precedente que quiero mencionar aquí. Se trata de un trabajo excepcionalmente interesante por cuanto une la negación de los números como objetos, pasando a interpretarlos como meros numerales en ciertos usos, con la diferencia entre el contar transitivo y el intransitivo (por usar los términos de Benacerraf), al tiempo que ofrece una alternativa ordinalista al enfoque de Russell. Como veremos, con ello se entienden mucho mejor los presupuestos implícitos en el artículo de Benacerraf. Un indicio de que su nominalismo fue asociado en su momento al de Benacerraf es que incluso un autor habló de "la tesis de Benacerraf-Goddard" (Routley, 1965a, p. 207).

El punto de partida de Goddard es la tesis cardinalista russelliana de que la noción de similaridad entre clases está lógicamente presupuesta en el contar, ya que cuando contamos no hacemos más que establecer la correspondencia biunívoca entre un conjunto de objetos y uno de números; por tanto, su clásica definición del número de una clase es la base de su construcción del número, la cual se apoya en la creencia de que el número es independiente del orden, que es una noción lógicamente secundaria. Por el contrario, Goddard defiende que también es cierta la tesis inversa: que el contar, o por lo menos el concepto de número, está presupuesto en la noción de similaridad, pues para establecer la correspondencia biunívoca aludida (1961a, p. 223)

> hemos de reconocer, o entender lo que significa al decir, que hay *dos* clases aquí, no sólo *una*. Hemos de entender además lo que se quiere decir con *emparejar* [*pairing off*] sus miembros, y hemos de saber lo que quiere decir no echar en falta ninguno (no debemos dejar ninguno fuera de nuestro correlacionar *uno*, o *dos*, o *tres*...) y lo que quiere decir no usar cada miembro más de una vez (no debemos usar *uno* de ellos, o *dos* de ellos, o..., *dos* veces, o *tres* veces, o...)

Esto lo lleva a ensayar una definición del número que dé cuenta de la presuposición mutua entre el contar y la similaridad, que se basará directamente en que el orden presupuesto en el aprender a contar (el contar intransitivo, sin objetos),[5] seguido

[5] "Counting, as here described, should not be confused with *counting the objects* in a group that comes later [...]" (1961a, p. 225, nota 3).

del control ejercido sobre el contar (aprendido señalando objetos al contarlos) y de la aplicación de numerales a esa operación (que aprendemos mediante consignas verbales), forman la base de nuestra noción del número. Con ello, aunque se admite que el orden es independiente del número, es el contar lo que nos da acceso al orden, tanto temporal como lógicamente. En consecuencia (*ibid.*, p. 227):

> El número de una clase [...] está dado por el numeral que decimos cuando contamos y nos detenemos. No es verdaderamente una propiedad de la clase (y ciertamente no los objetos) sino un resultado que obtenemos cuando contamos correctamente. No deberíamos buscar los números ni en el mundo de los objetos ni en el de las abstracciones, sino en las técnicas y procedimientos que dan un uso a los numerales. ¿Qué es un número? Un número es un numeral que se usa en el contar controlado —no sólo al contar (señalar y decir) y no sólo como parte de la secuencia [*rhyme*] del contar. Por contar controlado queremos decir contar y parar de acuerdo con las reglas.

El intento de Goddard sería ya, con sólo esto, lo suficientemente interesante. Pero con esta base la emprende, además, con otras nociones "derivadas", como la de correspondencia entre clases y la de número transfinito. Así, decir que dos clases tienen el mismo número de miembros es decir: "si cuentas de forma controlada el primer grupo y luego el otro, observas que has de parar en el mismo lugar" (1961a, p. 227). El entrar en el marco de la infinitud no ofrece mayores dificultades, e incluso hace posible el prescindir del axioma russelliano del infinito. En efecto, si se admite, con Russell y Frege, que ser un número es ser el número de alguna clase, entonces si el número de individuos del universo fuese 10, no existiría la clase 11 individuos, por lo que el número 11 y los siguientes serían iguales —todos serían el número de la clase nula—, y se vendría abajo uno de los axiomas de Peano, pues varios números (diferentes) tendrían el mismo sucesor. Con la identificación de Goddard entre números y numerales basada en el contar controlado el problema desaparece (*ibid.*, p. 232):

> dos *números* no tienen el mismo sucesor; pues los números son simplemente numerales usados para cierto fin: un número se define mediante las reglas para el uso del numeral en el contar controlado. El contar otorga a los numerales un uso y el contar controlado otorga al contar un uso; esto es, el contar controlado especifica más aún el uso de los numerales y así otorga un significado al número. Esto es *todo* lo que es un número. No hay pues dificultad sobre el sucesor de cualquier número dado, ya que no la hay sobre el sucesor de cualquier numeral dado.

Resta sólo definir el número transfinito, lo cual se logra introduciendo el contar a secas, es decir, remitiendo a sus posibilidades ilimitadas: "podemos aplicar las técnicas ilimitadas de contar al conjunto 1, 2, 3,... (señalar y decir, señalar y decir) incluso aunque no podamos en absoluto contarlo de forma controlada. En general, decir que *hay* un conjunto infinito es decir que sabemos cómo contar; y decir que *hay* un conjunto finito es decir que sabemos cómo contar de forma controlada" (*ibid.*, p. 233). Con ello se logra una definición independiente de la noción de similaridad entre clases, que en la construcción de Russell antecede a la distinción finito-infinito.

En consecuencia, aunque esta definición del número transfinito difiere esencialmente de la del número finito, lo cual podría suponer un rasgo antieconómico, éste queda compensado al poder ahorrarnos la necesidad de distinguir las clases infinitas de las finitas mediante el recurso de añadir alguna propiedad que las primeras satisfacen.[6] Así, basta con inver-

[6] Goddard se equivoca, sin embargo, cuando acusa a Russell de no haber dado una "receta" para lo finito. La receta es bien simple y procede de 1903a (y en última instancia de Burali-Forti): un número es finito cuando puede alcanzarse mediante inducción matemática. Ello introduce una cadena de malentendidos en el artículo que comentamos, pero no puedo ahora detenerme en ellos. Consideraré el intento russelliano en toda su riqueza en la sección 6.

tir el orden: llegamos primero a la noción de número infinito mediante la potencialidad del proceso de contar a secas, y pasamos después al número finito añadiendo una característica típica de lo finito: el contar controlado, regido por el momento en que detenemos el proceso. De paso, la necesidad de un axioma de infinitud es evitada. La conclusión es, sin embargo, el retorno al orden como noción rectora última: "¿Significa esto que entendemos $\aleph_0$ antes de que entendamos 5? Sí; eso es exactamente lo que significa" (*ibid.*, p. 235), y eso no me parece muy diferente de decir que lo único de lo que realmente disponemos es de la serie de los números con base en lo axiomas que la rigen, con lo que los números particulares no serían más que lugares en ella. Goddard insiste más bien en las reglas prácticas de aplicación de un proceso que en los aspectos formales, pero en el contexto descrito creo que no hay mucha distancia entre ambas cosas.

3. *La reducción matemática según Benacerraf*

En esta sección introduciré algunas de las ideas que me parecen más importantes del artículo de Benacerraf sobre los números, para, a medida que avance, irlas comentando desde un punto de vista crítico, en parte señalando dificultades relacionadas con las ideas de la sección anterior, en parte adelantando otras que surgirán en secciones posteriores.

Para resumir en un párrafo lo principal que quiero decir acerca del artículo, adelantaré que según lo veo este trabajo no es más que una presentación ordinalista de los números basada en la idea de que el contar transitivo subyace a nuestra adquisición de ellos, lo que lleva finalmente a negar que los números sean objetos: más bien son posiciones en una progresión, o estructura abstracta que caracteriza la aritmética. Pero queda en el tintero una discusión de la alternativa cardinalista, que se supone lógicamente posterior, pues no hallamos la debida argumentación. Además, no aparece por ningún lado una ontología que permita reducir explícitamente los números a meros numerales con el único argumento del polimorfismo conjuntista, lo que sería básico cuando, al mismo tiempo, se reducen los números a términos del campo de una relación. Así, se echa de menos una discusión de la diferencia entre términos y relaciones que justifique tal postura o, más en concreto, de la respectiva primacía de términos o relaciones. Lo que sigue es el desarrollo de este párrafo mediante el análisis detallado de los textos que creo más relevantes.

El punto de partida es conocido: se especula con las consecuencias de la educación aritmética de unos niños a quienes se les enseñan los números en términos conjuntistas, posición desde la que después habrán de reinterpretar las ideas intuitivas correspondientes. Pero ya a la hora de describir los números se introduce, sin especial justificación, una explicación esencialmente ordinal (1965a, p. 273):

> A Ernie se le dijo que había un conjunto cuyos miembros eran aquello a lo que las personas corrientes se referían como los números (naturales), y que éstos eran lo que él había conocido siempre como los elementos del conjunto (infinito) $\mathbb{N}$. Se le dijo además que había una relación definida en esos "números" [...], la relación *menor-que*, bajo la cual los números estaban bien ordenados. Aprendió que esta relación, definida en $\mathbb{N}$, era realmente aquella para la que él siempre había usado la letra "R".

Es decir, los números se introducen tomando ya una opción determinada en la que la relación de orden es lo primario, en lugar de mostrar, como Cantor y Russell, que cabe también comenzar por los cardinales por medio del número de una clase, definido a través de la correspondencia entre clases, lo cual no presupone el orden. Éste puede ser después introducido derivativamente en términos de relaciones, pasando así a los ordinales por medio del número de una relación, definida a su vez a través de la semejanza de relaciones. No digo que esta presentación sea preferible; digo que al realizar la suya Benacerraf ha predeterminado ya lo que será todo su enfoque, incluida su conclusión principal.

Ello se ve al llegar al tema del contar, es decir, a las aplicaciones del número. Nuestro autor defiende aquí varias cosas: que el contar intransitivo (sin objetos contados) es previo al transitivo; que el contar transitivo no es sino la correlación del conjunto de cosas que estamos contando con el de los números; y que tal correlación se establece mediante la asociación de sucesivos señalamientos con la recitación de la serie de los numerales. Inmediatamente comprobamos el estrecho nexo con el artículo de Goddard citado más arriba (que no se menciona). Sin embargo falta una discusión, como la que lleva a cabo Goddard, que justifique la primacía lógica respectiva de las diversas nociones implicadas: contar intransitivo, orden, correlación entre clases, contar transitivo, número, que Benacerraf parece dar por supuestas sin más. Por ejemplo, al decirnos que contar los miembros de un conjunto es determinar su cardinalidad, Benacerraf debería añadir que, según su propia opción, eso no implica que la cardinalidad sea previa al número, lo que llevaría a una opción cardinalista, sino que por el contrario es la misma correspondencia entre clases la que presupone ya el número (como hacía tan eficazmente Goddard; véase más arriba), que, a su vez, procede del orden implícito en el contar intransitivo, reducido a la mera recitación de numerales.

De ahí que, una vez mostrado que la construcción de una progresión hace posible acceder a una cierta noción de número —obviamente la noción ordinal—, Benacerraf afirme que con ello se posee ya "todo lo necesario para el concepto de número" (1965a, p. 277). Pero el problema está en que, no contento con dejar en la indeterminación tal concepto, añade inmediatamente que ello incluye los conceptos de cardinal, ordinal y sus operaciones habituales, por lo que sólo restaría el aprendizaje de un vocabulario nuevo: el de los numerales. Por tanto, vuelve a presuponer que no hay diferencias relevantes entre cardinal y ordinal, presumiblemente porque todo se reduce al contar (en sus dos formas), así como que cualquier reducción logicista o conjuntista de los números no exige más que lo anterior, es decir, los recursos que una progresión ofrece. Pero sigamos.

La descripción del descubrimiento de que las series de los números que manejaban los dos niños (las de von Neumann y Zermelo, respectivamente) eran incompatibles es ciertamente instructiva y brillante (1965a, p. 278):

> inmediatamente sobrevino una discusión sobre si el 3 pertenecía o no al 17. Ernie dijo que pertenecía, Johnny que no [...] En favor de su punto de vista, Ernie señaló su teorema de que para cualesquiera dos números, x y y, x es menor que y si y sólo si x pertenece a y, y x es un subconjunto propio de y. Puesto que ambos admitían que 3 es menor que 17, se infería que 3 pertenecía a 17. Johnny, por otra parte, opuso que el "teorema" de Ernie estaba equivocado, pues dados dos números, x e y, x pertenece a y si y sólo si y es el sucesor de x. Se trataba de dos "teoremas" claramente incompatibles.

Indudablemente el problema se debe a las diferencias entre las dos progresiones que ambos niños manejaban ($\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... Ernie y $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}$... Johnny), que llevaban a definir de distinta forma "sucesor". Pero el diagnóstico profundo vuelve a estar basado en ciertas presuposiciones. Benacerraf presenta la situación como el descubrimiento de que el desacuerdo sobre qué conjuntos particulares son los números debe llevar a rechazar la premisa de que cada número es algún conjunto particular. Pero a partir de ahí nos presenta un dilema: o las dos explicaciones son correctas o alguna no lo es, descartando lo primero inmediatamente por absurdo.

Yo creo que el dilema en sí mismo es inaceptable. En primer lugar Benacerraf da por supuesto que, como ambas explicaciones son ordinales, al partir de diferentes *progresiones*, sólo este tipo de explicación puede ser dado, y no nos presenta la alternativa cardinalista de Frege y Russell *en este punto*. Esto se comprueba, si es que quedaba alguna duda, en la forma en que Benacerraf describe el hecho innegable del polimorfismo conjuntista: nos dice que las infinitas explicaciones alternativas similares dan por igual el significado de los términos "uno", "dos", etc., añadiendo que también lo hacen con el término "número", cuando es obvio que este último se está, así, sobreentendiendo como "cualquier miembro de una progresión", es decir, a la manera ordinalista, con lo que se prepara la conclusión del artículo.

Pero es que, además, el mismo recurso de las nociones de sentido y referencia es inadecuado. Dice Benacerraf que cada explicación del número debe fijar tanto el sentido como la referencia de las diferentes expresiones, mientras que las dos explicaciones que venimos comentando difieren en la referencia, lo que presumiblemente hace posible su decisión de considerar absurda la alternativa del dilema según la cual las dos explicaciones pueden ser correctas. Si con la aplicación de la famosa distinción fregeana puede hacerse algo, es precisamente conceder que dos expresiones diferentes pueden tener sentidos distintos pero la misma referencia (el ejemplo canónico de la estrella matutina y la vespertina es ilustrativo).

Problemas parecidos surgen cuando Benacerraf, presuponiendo de nuevo lo que tendría que demostrar, da por sentado que, como "las dos explicaciones coinciden en su estructura global", mientras "difieren cuando se trata de fijar los referentes de los términos en cuestión" (1965a, p. 280), entonces no nos queda otra salida que ver los términos nada más que como aquello que resulta definido por un conjunto dado de relaciones. Y como estas relaciones pueden definirse de muchas formas diferentes, la posición de que los números son objetos no tiene salida. Esa indefinición acerca de lo que debería considerarse como un objeto es la que conduce a otra, que señalábamos ya más arriba, según la cual se presupone que el problema está en saber qué conjunto son "los números", sin distinguir entre la clase de los números, el concepto general de número, o cualquier otra cosa.

Está claro que Benacerraf está pensando en todo momento en términos de progresión, pero entonces tendría que hacerlo explícito. En un momento dado exige que la pregunta acerca de si una determinada disposición conjuntista *es* o no cierto número natural carezca de sentido si no se determina de alguna forma un contexto (*ibid.*, p. 281). Pero con ello está cayendo en lo mismo: se presupone que sólo caben alternativas particulares dentro de la opción general ordinalista. Hubiese sido mucho más claro el reducir todas las progresiones a aquello que tienen en común —los axiomas de Peano— y trabajar con ellos desde el principio, pero Benacerraf está en la senda de Quine, para quien la versión modelística era la favorita. Además, de esa forma se hubiese visto en seguida que si queremos una alternativa global, hay que buscarla en las filas del logicismo clásico.

En ese contexto confuso ha de enmarcarse la discusión de Benacerraf relativa a si los numerales son o no predicados de clases, tesis que se asocia con la postura de Frege (aunque para Frege los números eran más bien extensiones de conceptos). Y es que esa discusión nace ya viciada por la misma presuposición: se sitúa en seguida aquella postura como una más, junto a las anteriores, mientras que en ella no se presupone la progresión numérica desde el principio. En efecto, decir que los numerales son predicados de clase es situarse en un contexto en el que todo número es "el número de alguna clase", y ello presupone una orientación completamente diferente, en la que subyace sólo la correlación entre clases, pero no los axiomas de Peano (la versión ordinalista o de las progresiones). Es ese marco falto de claridad el que permite a Benacerraf concluir, tras ciertos análisis lingüísticos más o menos afortunados, que " 'diecisiete' no *necesita* considerarse como un predicado de clases, y similarmente no hay necesidad de ver el 3 como el conjunto de todos los tríos" (1965a, p. 284). De ello a decir que, en consecuencia, no hay ya ninguna explicación que excluya a las demás, no hay más que un paso, que Benacerraf da inmediatamente, volviendo a su tesis implícita de que todas las explicaciones están al mismo nivel.

Pero incluso acogiéndonos a su sensata advertencia acerca de la necesidad de un marco teórico para dar sentido a una reducción determinada, su conclusión es inadmisible. Ahora el marco ha cambiado y lo que tendría que hacer Benacerraf en este punto es comparar las dos grandes alternativas entre sí y no situar subrepticiamente una de las dos en el marco de la otra. Baste señalar, si se quiere insistir en este hecho evidente, qué ocurriría si Benacerraf hubiese sometido las dos explicaciones conjuntistas originarias a parecidos análisis lingüísticos. Por tanto, no sirve de nada pasar del reconocimiento de que ninguna de las explicaciones revisadas supera a las otras (con los criterios poco claros que hemos visto) a la conclusión de que los números no pueden ser conjuntos de manera alguna (1965a, p. 285). Aquí la palabra "ser" es del todo ambigua, con lo que Benacerraf se olvida de distinguir entre lo ordinal y lo cardinal, es decir, de que cada reducción tiene que enmarcarse en un contexto global. Por eso, cuando escribe de la tres explicaciones consideradas que "una funciona tanto como la otra, en relación con nuestro propósito al dar una explicación de estas cuestiones" está dejando pasar el hecho de que aquí subyacen *dos* propósitos generales: los axiomas de Peano y la construcción alternativa de Frege y Russell, y no una serie de propósitos pequeños relativos a si una reducción de detalle es o no mejor que otra.

Está también claro que la finalidad general del logicismo no fue primariamente entender los números como "objetos", sino reducir las proposiciones de la aritmética a leyes de la lógica, para lo cual era necesario interpretar los números como objetos, sobre todo en un marco en el que la lógica debía contener *verdades* y no simplemente meros condicionales (de ahí el énfasis fregeano y russelliano en que los axiomas no pueden ser sólo hipótesis, sino que deben tener un valor absoluto de verdad). Ésa era la teoría o categoría general en la que la reducción de los números a clases de clases cobraba sentido. Por tanto, cuando Benacerraf insiste en que lo que constituye una entidad es algo dependiente de una teoría, se limita a seguir, sin nombrarlo, a Quine (1965, pp. 287–288):

> "Entidad", "cosa", "objeto" son términos que tienen un papel en el lenguaje: el de llenar espacios, y su función es análoga a la de los pronombres (y, en contextos más formalizados, a la de las variables de cuantificación) [...] Hay realmente dos formas correlativas de ver el problema. Una podría concluir que la identidad es sistemáticamente ambigua, o bien se podría estar de acuerdo con Frege en que la identidad no es ambigua y significa siempre mismidad de objeto, pero (ahora contra Frege) que la noción de *objeto* varía de una teoría a otra, de una categoría a otra —y por lo tanto que el error es el fracaso en percatarse de ese hecho [...] En consecuencia, la lógica puede todavía verse como la más general de las disciplinas, aplicable de la misma manera a —y dentro de— cualquier teoría dada. Se mantiene como el instrumento aplicable a toda disciplina o teoría y la diferencia radica sólo en que se deja a la disciplina o teoría determinar qué contará como un "objeto" o "individuo".

En efecto, esto no es más que el compromiso ontológico quineano, adornado con la típica acusación a Frege de no haber visto el lenguaje más que como un medio universal y, por tanto, sin alternativas (es decir, no como un cálculo, o lenguaje que puede ser reinterpretado). Pero no añade nada a lo que decíamos más arriba: Benacerraf sigue sin ver que lo mismo es decir que el número está definido por los axiomas de Peano (que es lo que subyace a las explicaciones de Zermelo y von Neumann), que decir que lo está por el contexto general de la construcción cardinalista de Cantor, Frege y Russell, donde tales axiomas son teoremas. En ambos casos tenemos contexto, y por tanto determinación de objetos. Curiosamente, el propio Benacerraf olvida sus propias exigencias cuando —como hemos señalado— se cuestiona acerca de una explicación correcta —en sí mísma— de lo que son realmente los números.

El recurso a Quine continúa cuando Benacerraf sigue al viejo maestro de Harvard en su conocida tesis de que cualquier progresión sirve para hacer el trabajo de los números: "Si una teoría puede ser modelada en (esto es, reducida a) otra, entonces las preguntas adicionales sobre si los individuos de una teoría son realmente los de la otra ya no surgen" (1965a, p. 290). Pero Benacerraf estaba ya en disposición de saber que Quine había añadido ya un requisito adicional a su teoría de la reducción ontológica (su 1964a), consistente en exigir una función sustitutiva que garantizase la correspondencia entre los objetos de ambas teorías.[7] Y estuvo claro en seguida para Quine que tal función requiere, a su vez, una teoría de fondo desde la cual formularse y desde la cual, por tanto, la reducción cobra pleno sentido. Sugiero, más o menos metafóricamente, que si las explicaciones meramente conjuntistas son reducibles, lo son precisamente en función de la teoría de fondo que representarían los axiomas de Peano, es decir, su carácter de progresiones. En ella los números no son más que posiciones, por lo que cualquier objeto que pueda ponerse en correspondencia con ellos puede hacer el trabajo.

Pero de ahí a concluir, como hace Benacerraf, que los números no pueden ya ser objetos en ninguna otra teoría hay un abismo. Podemos sintetizar la posición ontológica final de Benacerraf en el texto —refundido— siguiente (1965a, pp. 291–292):

> La inutilidad de tratar de determinar qué objetos son los números se deriva así directamente de la inutilidad de hacer la pregunta para cualquier número individual. Las propiedades de los números que no proceden de las relaciones que mantienen entre sí, en virtud de estar dispuestos en una progresión, no tienen ningún

[7] En mi estudio citado en la nota 1 explico a fondo la evolución de Quine al respecto, así como los problemas implícitos en ella.

> tipo de consecuencia en lo tocante a los fines de la aritmética. Pero serían sólo esas propiedades las que distinguirían un número como este o aquel objeto [...] Por tanto los números no son objetos en absoluto, pues al dar las propiedades (necesarias y suficientes) de los números se está meramente caracterizando una *estructura abstracta* —y la distinción radica en el hecho de que los "elementos" de la estructura no tienen más propiedades que aquellas que los relacionan con otros "elementos" de la misma estructura [...] El hecho de que un sistema de objetos exhiba la naturaleza de los enteros implica que los elementos de ese sistema tienen algunas propiedades que no dependen de la estructura. Debe ser posible individualizar aquellos objetos independientemente del papel que cumplen en esa estructura. Pero esto es precisamente lo que no se puede hacer con los números. *Ser* el número 3 no es ni más ni menos que estar precedido por el 2, el 1 y posiblemente el 0, y seguido por el 4, el 5 y así sucesivamente. La aritmética es por tanto la ciencia que elabora la estructura abstracta que todas las progresiones tienen en común por el solo hecho de ser progresiones. No es una ciencia que trate con objetos particulares —los números ... La teoría de números es la elaboración de las propiedades de *todas* las estructuras del tipo de orden de los números. Los términos numéricos no tienen referentes únicos [...] Sólo cuando consideramos que una secuencia particular es, no los números, sino *de la estructura de los números*, comienza a tener algún sentido el preguntar qué elemento es el 3, o más bien *qué elemento corresponde con* él.

En efecto, decir que los números no son ni pueden ser más que lugares en una progresión es identificar la aritmética con la aritmética de Peano, o sea con la estructura abstracta que rige todas las progresiones, entendidas éstas de cierta forma. Al mismo tiempo, negar que los números puedan tener otras propiedades distintas de las de ser un lugar en una progresión es olvidar que podemos también construirlos primeramente en términos de clases de clases, con lo que podrían ser *objetos* en esta nueva teoría.

En la misma línea, podría también argumentarse que la aplicación del compromiso ontológico de Quine es incoherente. Si ser es ser el valor de una variable, o, en otros términos, si lo que algo es queda determinado sólo por la estructura cuantificacional que determina qué huecos dejan sitio para que a ciertos objetos se les apliquen ciertos predicados, entonces decir, como hace Benacerraf, que ser un número determinado es sólo tener ciertas relaciones con otro números, no es más que presuponer, una vez más, que no hay más teoría que la ordinal. Habría, más bien, que decir que cualquier teoría que cuantifique sobre números es una teoría en la que los números son objetos. Por tanto cuando Frege y Russell, dentro de su teoría logicista, construían los números de forma que tales y cuales propiedades se les podían atribuir coherentemente, entonces estaban, *eo ipso*, determinando que los números son cierto tipo de objetos.

No cabe duda de que Benacerraf, con su énfasis en la estructura ordinal como lo característico de los números naturales, ha hecho mucho por una postura general estructuralista (véase la sección 6). Pero unas cuantas referencias históricas al respecto hubieran hecho el célebre artículo mucho menos confuso para sus lectores, entre otras cosas porque posturas parecidas habían sido ya definidas mucho antes del Quine de 1960a. Por otra parte, una cierta consideración hacia la masiva construcción global de Frege y Russell, enmarcada en un contexto logicista global, y por tanto no limitado a ofrecer una definición de número natural, habría hecho posible un contexto histórico mucho más aceptable.

En consecuencia, la conclusión de que los números no son objetos, peca de la misma falta que Benacerraf cree poder atribuir a quienes defienden esta o aquella reducción conjuntista concreta. Por eso su última tesis, a saber, que no hay números y tampoco numerales de los que los primeros serían referencia, sino sólo numerales, no es convincente. A menos, claro está, que se articule de alguna forma con lo anterior, como por ejemplo en Goddard (véase sección 2), cosa que Benacerraf no hace, aparte de su insistencia en el contar tal y como la he descrito más arriba. Pero tal recurso, como ya dije también, no puede ejercerse de forma independiente de una teoría global en la que se establezca alguna relación clara entre el contar (en sus dos modalidades), el orden, la correspondencia biunívoca, el número natural y el par finito-infinito. Como veremos más abajo, Frege y Russell construyeron esa teoría global, no importa que sea ahora mantenible o no. Pero antes veamos qué críticas principales de la influyente posición de Benacerraf pueden hallarse en la literatura de estos últimos veinticinco años.

4. *Críticas diversas*

Aquí presentaré algunas de las críticas a que han sido sometidas las tesis de Benacerraf desde diversos campos. Escojo el criterio cronológico con objeto de respetar la historia; pienso que las presentaciones sistemáticas, que obligarían aquí a agrupar ciertos argumentos, suelen tener el defecto de cometer anacronismos. (Sin embargo, curiosamente las últimas críticas que veremos en la sección 5 son en general de carácter más platónico que las primeras.) Además, trataré de relacionar las críticas con las que yo mismo he formulado en la sección anterior, al tiempo que prepararé el terreno para otras críticas en la sección siguiente y para los argumentos históricos y comparativos de la sección 6.

Podemos decir que Routley 1965a es la primera crítica de Benacerraf desde un punto de vista más o menos tradicional: la defensa de la tesis de que los números son propiedades de clases, aunque formulada con mayor sofisticación: propiedades no distributivas de ciertas multiplicidades. El argumento central es simple: para Benacerraf la teoría de números no es sino la elaboración de las propiedades de todas las estructuras del tipo de orden de los números, mientras que de hecho esto se cumple sólo porque, algo insidiosamente, se toman tales estructuras como "objetos", cuyas propiedades, evidentemente, coinciden con las de los números. Pero al hacerlo Benacerraf se salta un paso crucial: los números mismos y sus propiedades y relaciones, las cuales pueden obviamente ser estudiadas de forma indirecta por la aritmética como estructuras abstractas: "porque la teoría de números es la teoría de ciertas propiedades y relaciones de las propiedades del número, es por lo que todas las estructuras del tipo de orden de los numerales exhiben tales propiedades y sus instancias de relación. Lo que las explicaciones usuales del número hacen es representar los números mediante muestras que ejemplifican tales propiedades" (1965a, p. 206).

Pero lo que más me interesa de la crítica de Routley es que lo anterior lo lleva a una clara defensa del punto de vista cardinalista, como alternativa al mero polimorfismo conjuntista, cuyas numerosas posibilidades son descritas como meras "representaciones" de los números (*ibid.*, pp. 206–207):

> Hay una serie infinita de tales representaciones, ninguna de las cuales resulta distinguida unívocamente. Sin embargo, no es que no haya ninguna razón para preferir una representación a otra que ponga fin a la identificación razonable de los números con conjuntos o con objetos. Podría haber razones tales. Las clases cardinales de Russell, aunque no resultan distinguidas unívocamente, pueden reclamar ventajas sobre otras representaciones [...] Así, aunque cualquier progresión recursiva puede ajustarse para proveer una representación adecuada de los números finitos, porque tal progresión ajustada ejemplifica los números finitos, sin embargo ninguna progresión tal de clases u objetos es en sí misma adecuada en la medida en que no pueda ser identificada significativamente con los números.

Es una lástima que Routley no introduzca aquí un paso fundamental: si las diversas progresiones exhibidas por Benacerraf (Zermelo, von Neumann) son instancias aceptables de la serie de los números es porque de lo que son ejemplos es del punto de vista ordinalista, es decir, porque cumplen los axiomas de Peano, de los cuales son modelos. (La definición de Frege-Russell también los cumple, pero se formula con independencia de las progresiones.) No obstante Routley termina por distinguir adecuadamente las meras propiedades ordinales (meras relaciones) de la posibilidad de introducir el número por la vía cardinalista, es decir, sin apoyarse en los demás números (*ibid.*):

> Ningún objeto puede hacer completamente el papel del 3, y no todo objeto, por ejemplo un Diccionario de Oxford, puede siquiera representar al 3 sin algunas abstracciones y ajustes. Desde luego no son los objetos particulares (o incluso las progresiones) lo que importa; son las propiedades (numéricas) de las progresiones que estos objetos exhiben lo que es importante. Ni esas propiedades numéricas son propiedades relacionales. El número cardinal 3, aunque es necesariamente sucesor del 2 y predecesor del 4, puede ser introducido independientemente de los cardinales 2 y 4.

Por mi parte, no puedo sino aprobar la postura de Routley, en la medida en que coincide con mis argumentos, ya expuestos más arriba. Es cierto que este autor no desarrolla plenamente la alternativa cardinal (*versus* ordinal), pero al menos la señala, lo cual le sirve, de paso, para rechazar también la identificación entre números y numerales, apelando a las críticas fregeanas del formalismo. Tampoco aquí aparecen los argumentos, pero baste ello como primer paso hacia la creación de un marco histórico adecuado.

Cheng dedicó dos artículos a rebatir algunos de los argumentos centrales de Benacerraf: sus 1968a y 1970a. El primero de ellos contradice dos de las tesis de Benacerraf: que para que una progresión sea un modelo de los números debe ser recursiva con respecto a la relación menor-que, y que toda explicación del número debe incluir la de la cardinalidad, obtenida, a su vez, mediante el contar. Sobre lo primero no diré nada, pues no lo creo importante para mis fines, aunque Cheng parece convincente.[8] Es su discusión de la cardinalidad lo que me interesa.

[8] Quine había aceptado en 1969a la nueva condición exigida por Be-

Es cierto que Benacerraf añadió al punto de vista quineano la necesidad de incorporar la cardinalidad del contar, pero como señalé más arriba lo hizo en el marco de una presuposición: la de que no es necesario discutir, como había hecho Goddard (véase la sección 2), qué es lógicamente primario: la correspondencia entre clases o la noción de número. De ahí que diese por presupuesto que el contar se basa automáticamente en la concepción ordinal del número, por lo que su toma en consideración viene a reducir lo cardinal a lo ordinal. Cheng resume bien la postura de Benacerraf antes de criticarla, aunque sus fines son distintos: "aprender lo que son los números es aprender cómo usar los términos numéricos al contar y al medir la multiplicidad. Por tanto, para explicar la noción de número es necesario explicar la noción de contar" (1968a, p. 331). Pero, no me parece que sus argumentos penetren en el problema que acabo de señalar. En primer lugar, sostiene que aunque el contar explica el aprendizaje de los números, sólo describiendo la estructura de éstos se hace posible el contar mismo. Pero esto vuelve a presuponer la postura ordinal, al no tomar en consideración el hecho de que para contar objetos basta con dominar el mecanismo de la correspondencia biunívoca. Habría, pues, que ver si este mecanismo es o no previo al contar intransitivo, que Cheng no considera.

Más interesante es su tesis según la cual la premisa de que la individualidad de los números no es independiente de las relaciones en la progresión no conduce a la conclusión de que los numerales carecen de referencia. Y no porque yo apruebe la premisa, sino porque Cheng recurre al marco global de una teoría: "no hay a primera vista implausibilidad en que una progresión numérica pueda identificarse con el conjunto de conjuntos y los números individuales con conjuntos individuales de ese conjunto sobre la base de algunos criterios de identidad

nacerraf, un tanto de mala gana, describiéndola simplemente como la exigencia de que la progresión fuese efectiva.

formulados en una teoría global" (1968a, p. 332). En efecto, una teoría global es el único lugar donde la batalla por la realidad de los objetos se puede dirimir, como señalé en la sección anterior. Por lo tanto, y éste es el paso que le falta a Cheng, cabe interpretar todas las progresiones como modelos de una misma teoría, la ordinal, y construir una teoría alternativa que introduzca los números antes de presentarlos como miembros de una progresión.

De ahí el interés del último argumento de Cheng, que viene a reprochar a Benacerraf el no haber ofrecido ninguna discusión de la relación de dependencia entre la noción de cardinalidad y la de número, aparte de decir que la explicación de la segunda debe incluir la de la primera. Sin embargo, dicho esto, Cheng defiende la posición tradicional de Quine según la cual el uso de los números en la medida de la multiplicidad no requiere más que su condición de constituir una progresión. Claro que completa su defensa admitiendo la necesidad de recurrir a la noción de correlación, con lo que la pretendida independencia de las progresiones con respecto a la cardinalidad parece evaporarse, al menos en ausencia de una discusión de su relación con el contar intransitivo. Y éste, en última instancia, parece basarse también en la correlación, al menos en la de ciertos sonidos (los numerales) con ciertos gestos (los señalamientos de ciertos objetos). En todo caso la postura de Cheng es más clara que la de Benacerraf, pues abiertamente opta por decir que la noción de cardinalidad presupone ya la de número natural, aunque ello no lo lleve a entrar a fondo en la polémica cardinal-ordinal.

El segundo artículo de Cheng está dedicado de lleno a criticar los argumentos de Benacerraf y Parsons, calificados de formalistas, según los cuales (i) los numerales carecen de referencia aparte de las diversas posiciones en una progresión; (ii) la incompatibilidad entre las diferentes reducciones a conjuntos muestran que los números no son de hecho conjuntos. El primero se contrapone mediante las posibilidades lingüísticas de un marco referencial en el que los números sí serían predicados de algunas clases, por lo que se puede conceder para los numerales una referencia aun cuando ello no implique necesariamente el que los números sean objetos en el mundo. No me interesan tales argumentos, basados en el análisis del lenguaje, por lo que no diré nada sobre ellos.[9]

Con respecto al polimorfismo conjuntista la posición de Cheng es más atractiva, al menos para mí, que en la sección anterior critiqué uno de los cuernos del dilema de Benacerraf como inaceptable: su tesis de que dos reducciones conjuntistas del número no pueden ser correctas a la vez. Recuérdese que para Benacerraf decir, por ejemplo, que 3 pertenece al 17 era válido sólo en una de las dos teorías de conjuntos examinada, pero no en la otra. Cheng responde señalando, muy juiciosamente, que la misma noción de pertenencia puede tener comportamientos diferentes según cómo se caractericen los diferentes elementos de una teoría dada. Hay que interpretarla, pues, de manera relativa: en un sistema 3 pertenece a 17 en el sentido de que $3 \in 17$, mientras que en otro ocurre lo mismo, pero en el sentido de que $3 \in 4 \in 5 \in \ldots \in 17$ (1979a, p. 492). De esta forma la supuesta incompatibilidad queda considerablemente suavizada:ambos sistemas permiten el mutuo entendimiento, pues la correspondencia entre ellos basta para preservar las verdades de la aritmética relativamente a las peculiaridades de cada uno. En consecuencia, podemos afirmar que las dos identificaciones pueden ser correctas al mismo tiempo.

La conclusión es instructiva: "no es necesario que neguemos la posibilidad de identificar los números con conjuntos; puede decirse que para cada explicación conjuntista de los números naturales, los números naturales son conjuntos. No es necesario que una decisión sobre lo que podrían ser los números en

[9] Por otro lado, el propio Benacerraf admitió que algunos de sus análisis generalistas admitían contraejemplos genuinos.

este sentido (débil) entrañe una decisión sobre qué conjuntos particulares deben ser los números" (1970a, p. 493). En la medida en que semejante conclusión se enmarca en la necesidad de exigir una teoría global en la que se tomen tales decisiones, obviamente simpatizo con ella. De nuevo, las consideraciones de fertilidad deberían decidir, exactamente como sucede con el polimorfismo matemático de la física. Así aunque Cheng no se refiera aquí a la alternativa cardinalista, sus críticas son perfectamente asumibles.

El tema del polimorfismo y su relación con las dificultades referenciales de las diversas reducciones apareció de nuevo en Field (1974a) en el contexto de una alternativa general a la relatividad ontológica de Quine, caracterizada —como la de Cheng— por la construcción de una semántica que dote de referencia los términos de un lenguaje, sin necesidad de admitir "reducciones" incompatibles o elecciones "arbitrarias" entre ellas. La aplicación a Benacerraf es inmediata: lo que sus argumentos muestran es sólo que los numerales no se relacionan con los conjuntos de manera unívoca al nuestro. No puedo entrar en la alternativa semántica general de Field, pero su generalización al tema de los números parece poder entenderse de manera independiente.

La idea general es la de preservar las verdades de una estructura, cuando consideramos predicados que dependen de los objetos de ella, una vez que esa estructura resulta correlacionada con otra, por ejemplo de objetos o de conjuntos. Así, si partimos de la secuencia de los numerales e introducimos la relación semántica de la "denotación parcial" entre secuencias "atómicas" de términos (ninguno de los cuales está contenido en más de una secuencia), en ciertas condiciones podemos decir que las verdades aritméticas sí tienen referencia, es decir, que la ω-secuencia de numerales está semánticamente relacionada, como un todo, con ciertas ω-secuencias de objetos o conjuntos: precisamente con aquellas en las que dos miembros cualesquiera no coincidan nunca. Entonces (1974a, p. 222):

> Digamos [...] que la ω-secuencia de numerales es una secuencia atómica que parcialmente denota precisamente las ω-secuencias de objetos mencionadas. Entonces ¿qué hemos de decir de predicados número-teóricos como "impar" y "primo"? La respuesta obvia es que son predicados dependientes cuya base es la secuencia de numerales. El término "primo", *relativo a cualquier ω-secuencia σ* que se correlacione con los números, significa el conjunto de objetos en los lugares primos de σ, y el término "impar" significa el conjunto de objetos en los lugares impares de δ. Éstas parecen estipulaciones más bien naturales y tienen la consecuencia de que precisamente el número correcto de enunciados número-teóricos devienen verdaderos.

La maniobra es ingeniosa, como todas las de Field, y equivale aproximadamente a defender una referencia "múltiple" para los numerales: algo así como decir que cada uno de ellos denota parcialmente a todos los miembros correspondientes de toda progresión. Así, como esto se puede ampliar a los símbolos de relación, la estructura obtenida concordaría "parcialmente" con la presupuesta por la semántica de la teoría de números.[10] Pero aunque ello sin duda garantizaría, en las condiciones mencionadas, la verdad de los enunciados de la aritmética, tiene dos presupuestos que no me resultan convincentes desde el punto de vista de nuestro problema general de valorar las tesis del reduccionismo matemático ordinalista. El primero es la limitación a mostrar que, en todo caso, la tesis de Benacerraf que niega la unicidad de los referentes no es incompatible con una ontología de infinitos objetos físicos, o de infinitos objetos físicos más conjuntos, pero sin otros objetos abstractos (es decir, números, en este contexto). Esto serviría, supongo, para mantener la verdad de la ciencia aun en ausencia de números.[11] Pero me parece que no toca el tema de fondo, que es el de la posibilidad de contrarrestar el nominalismo de Benacerraf atendiendo a una construcción alternativa de los números.

[10] Sigo aquí la explicación clarísima de Resnik 1981a, pp. 543–544.

[11] Como Field se ha encargado de detallar en su famoso libro posterior.

El segundo presupuesto procede de lo mismo. Field parte de la base, indiscutida, de que todo lo que podemos decir de los números ha de ser considerándolos como una secuencia ordinal infinita en términos de los axiomas de Peano. Por eso supone secuencias de objetos que podamos correlacionar con los numerales. Pero por ningún lugar aparece la justificación de tales secuencias como tales, es decir, como modelos de los mencionados axiomas. Los numerales lo son en virtud de ello, a no ser que se introduzca el mecanismo del aprendizaje del contar intransitivo o algo parecido. En cuanto a secuencias de objetos (o conjuntos) tampoco se explica su origen como secuencias, salvo el de la misma correlación. Pero entonces habría que pronunciarse, como lo hacía Goddard —y parcialmente Cheng— sobre la posible prioridad relativa de la cardinalidad o de los números mismos, cosa que Field no hace. Su postura, después de todo, no es extraña. Estamos ante un nominalista, por tanto su visión de los números es automáticamente formalista, lo que es como decir ordinalista.

El juicio de otro enemigo del logicismo, Steiner, es más interesante, sin duda por ser un defensor de la autonomía de la aritmética, al estilo de Poincaré. Su primera crítica coincide con lo esencial de uno de mis argumentos en la sección 3: Benacerraf no puede decir que la noción de objeto es relativa a una teoría y a continuación añadir que, dado el polimorfismo conjuntista, los números no son objetos de ningún tipo. Así la versión relacionista de los números puede ser eficaz contra la noción fregeana de objeto, pero "dada la propia visión de Benacerraf sobre la objetividad [*objecthood*], según la cual los enunciados de identidad son 'semánticos' sólo cuando los términos pertenecen a la misma teoría, debería decirse que *ningún* sistema de objetos distinto del de los números mismos puede, ni siquiera en principio, identificarse con los números, y que los números no sólo son objetos, sino que lo son de manera irreductible" (1975a, p. 88). Steiner no lleva el argumento más allá, por ejemplo hacia la exigencia de una evaluación de la alternativa cardinalista, pero da en el blanco de una incoherencia difícil de rebatir.

En cuanto a la oscura tesis de Benacerraf según la cual los números son sólo roles ordinales en una progresión, cuya única esencia consiste en definirse en función del resto de roles, Steiner propone tres interpretaciones interesantes, que en conjunto muestran muy bien las dificultades implícitas. La primera de ellas sugiere que quizá lo significado es simplemente que el número 3, por ejemplo, sería la clase de todos los terceros miembros de las progresiones. Según Steiner esto no lleva a ningún sitio, aparte de primar la opción ordinalista, ya que en ella "los números emergen de nuevo como conjuntos particulares, puesto que, con independencia de lo que signifique escoger una progresión más bien que otra, se escoge de todos modos alguna" (1975a, p. 90). Sólo el hecho de que Steiner formule con claridad la oposición de las dos visiones en pugna, tal como vengo sosteniéndola, es ya un avance. Sin embargo, no veo por qué la visión ordinalista propuesta lleva por igual a identificar los números con conjuntos particulares, precisamente porque no veo por qué lleva a escoger una progresión en particular. Podría decirse, por ejemplo, que todas las progresiones relevantes no son más que modelos de los axiomas de Peano, por lo que cabría entender el rol de los "terceros lugares" con independencia de una reducción conjuntista particular, es decir, con referencia al primer elemento de la progresión y a la relación sucesora.

La segunda interpretación de Steiner consiste, precisamente, en atribuir a Benacerraf la tesis de que la aritmética es el estudio de todos los modelos de los axiomas de Peano, con lo que los enunciados aritméticos serían más bien hipotéticos, en el sentido —supongo— de presuponer una estructura previa, la cual no se evalúa como un todo. Steiner ve una dificultad: haría falta garantizar, entonces, la existencia de (i) al menos una progresión del tipo de orden requerido; (ii) unos ciertos componentes de ella; presumiblemente conjuntos. A mí me parece que, tratándose de meros condicionales, no hay que garantizar existencia alguna: bastaría con decir "si x y y son miembros de una progresión de tales y tales características, entonces x y y cumplen tales y cuales leyes". Pero con ello tampoco habría que fijar componentes concretos: sería suficiente con decir que las relaciones presuponen su campo, máxime en la versión condicional que manejamos (algo que Benacerraf no dice en ningún momento). Claro que con ello las aplicaciones de la aritmética serían también condicionales e inmediatamente aparecería el problema de la verdad, pero eso es otro cantar (véase la sección 7 para más detalles).

Por último, Steiner sugiere que probablemente lo que Benacerraf quiso hacer fue dar sentido a la noción de elemento en una estructura abstracta, de forma que ésta fuera definida por medio de los valores de las variables, aunque nuestro comentarista señala que esto sería lo más difícil de mantener a juzgar por las dudosas explicaciones del final del artículo comentado. Ahora sí que coincido con Steiner. Como aclaré más arriba (sección 3), Benacerraf estaba empeñado en restar entidad ontológica a los números reduciéndolos a lugares relacionales en una estructura, pero nos dejaba sin saber nada de ella, especialmente porque no se decidía a tomar los axiomas de Peano como la estructura común a todos los sistemas (las progresiones) que manejaba. Pero Steiner avanza un paso más en la misma dirección y viene a acusar a Benacerraf de algo parecido a sustituir lo oscuro por lo más oscuro, pues señala que se niega objetividad a los números al precio de convertir las estructuras en objetos.

Sin embargo, no veo claro este argumento. En primer lugar, aplaudo la identificación entre las nociones de elemento en una estructura y valor de una variable. Simplifica mucho las cosas e inserta a Benacerraf en su contexto: el de Quine, del que cada vez que quiere salir es a costa de problemas graves. Sin embargo, eso sólo puede hacerse a costa de una ontología relativista del estilo de Quine mismo, cosa que brilla por su ausencia en Benacerraf, quien parece negar objetividad a los números a costa de manejar una cierta noción de objetividad implícita, que no define, como hemos visto en varios lugares. Por otra parte, me parece que la postura de Benacerraf debería aplicarse a todos los supuestos objetos matemáticos, si es que quiere ser consecuente. Tomemos por ejemplo el concepto mismo de progresión: a menos que partamos de los axiomas de Peano como la estructura de todas las progresiones, cosa que habría primero que explicar a fondo, podríamos decir que, como cabe reducir el concepto de progresión a varias versiones conjuntistas, entonces no hay progresiones como objetos, ya que todas ellas son incompatibles en lo tocante a ciertos teoremas.[12] Desgraciadamente, en su artículo Benacerraf no nos da instrumentos para extender su argumento en esta forma, pero en todo caso tendría que haber tocado este punto de alguna manera.

5. *Críticas platónicas*

Pasemos ahora al campo de los platónicos, a la espera de mejor suerte en nuestra búsqueda de claridad (¡y coincidencias!) en las críticas. Continúo con el criterio cronológico que, curiosamente, nos facilita ahora la presentación sistemática. Ante todo está Resnik 1980a. Según él, Benacerraf no prueba que los números no sean objetos, sino en todo caso que no pueden identificarse con ningún otro objeto, aparte de ellos mismos (1980a, p. 231). No creo que Benacerraf admitiese semejante crítica (similar, por cierto, a la anterior de Steiner), entre otras cosas porque es aplicable a cualquier otra reducción, al basarse en el presupuesto de que de cualquier cosa puede predicarse al menos su propia identidad. Quizá pueda reconvertirse

[12] Podríamos también considerar diversos tipos de progresiones e insertarlos en el marco de un concepto más general, pero entonces tendríamos lo mismo que antes con la noción general de número y los números particulares, y no saldríamos de la dificultad.

el argumento y decir que si los numerales no tienen referencia sólo por argumentos paralelos a la indeterminación de la traducción, entonces nada la tendrá. Pero de nuevo caemos en la generalidad más absoluta, y se pierde todo el interés propio de la aritmética.

Resnik añade que defender un solo tipo de objetos abstractos genuinos, como por ejemplo las clases —al estilo de Quine—, no parece mejorar la situación. Pero el argumento no está claro: no veo por qué, entonces, la existencia de reducciones alternativas de objetos abstractos distintos de los números a clases mostraría que las clases no serían ya los únicos objetos abstractos. Para afirmarlo deberíamos primero elaborar una ontología de la reducción que afirmase, al estilo de Frege y Russell, que lo reducido no pierde, gracias a la reducción, su propio estatus ontológico. Pero eso es presuponer el platonismo, no argumentar a su favor.

El mejor argumento de Resnik tiene la forma de una *reductio ad absurdum*: si el polimorfismo de la reducción de los números a conjuntos ha de llevar a la conclusión de que los números no son nada, entonces lo mismo habría de aplicarse a todo el resto de reducciones. Así, los números reales no serían tampoco nada, ya que pueden reducirse a cortaduras de racionales (Dedekind), series cantorianas, secuencias de Cauchy o cualquier otra construcción. Ni lo serían, por motivos similares, los números ordinales, ni las funciones, ni los pares ordenados, ya que todos pueden reducirse alternativamente a conjuntos. Ahora bien, eso no es aceptable. Por tanto Benacerraf no puede estar en lo correcto. El argumento, sin embargo, tampoco me convence. Primero porque vuelve a *presuponer* que el nominalismo es inaceptable. Segundo porque parece claro que Benacerraf no pondría objeciones para generalizar su argumento a otras reducciones matemáticas, como he tenido ocasión de señalar anteriormente. Su salida consistiría, presumiblemente, en apelar a su teoría general —quineana— del isomorfismo entre estructuras, según la cual si una de ellas puede hacer el trabajo de unos supuestos objetos, nada se gana con postular los objetos. De todas formas Benacerraf no ha detallado la generalización de su argumento, dejando el tema envuelto en la vaguedad.

Consecuentemente, si comencé diciendo que este argumento de Resnik era el mejor fue sólo debido a las consecuencias que tiene, que derivan directamente hacia el estructuralismo que ha defendido con posterioridad. En efecto, él ha reconocido que la tesis de Benacerraf tiene cierta fuerza contra Frege, y esa fuerza consiste precisamente en las dudas que arroja sobre todo lo que no sean estructuras (1980a, p. 232):

> Nuestro conocimiento de los números, conjuntos, y otros objetos matemáticos puede comunicarse sólo mediante aserciones que pretendan ser verdaderas de ellos. Sean entonces tantos enunciados verdaderos de la teoría de números (axiomatizada o no) como se quiera. Éstos pueden construirse alternativamente como una teoría acerca de los números de Zermelo, los de von Neumann, y así sucesivamente. La teoría de conjuntos está sujeta también a interpretaciones alternativas, pues los conjuntos pueden construirse en términos de categorías y, en general, cualquier teoría que tenga un modelo tendrá una serie infinita de modelos isomorfos. Pero si nuestro discurso sobre conjuntos, números y otras entidades matemáticas es por tanto construible en una serie infinita de maneras alternativas, ¿cómo podemos defender que nuestros términos matemáticos poseen referencias fijas?

El paso es claro: también la propia teoría de conjuntos está edificada sobre arena, y no sólo por admitir construcciones axiomáticas alternativas, sino porque puede "reducirse" a estructuras más abstractas aún. Resnik termina su libro con un párrafo donde dice con toda claridad que "La aritmética y la teoría de conjuntos deben reconocerse como estructuras matemáticas y debe desarollarse una epistemología para ellas" (*ibid.*, p. 234). Y esto es precisamente lo que él ha estado haciendo desde entonces. En la última sección tocaremos el tema del estructuralismo, pero —visto lo anterior— aquí hay que dejar constancia de que la gran influencia de Benacerraf ha consistido, no en destruir el platonismo de los objetos, sino en desplazarlo a otros más abstractos todavía: las estructuras.

También el platonismo de Maddy, inspirado en Gödel, ha derivado, parcialmente como consecuencia de los argumentos de Benacerraf, hacia un "realismo conjuntista" ciertamente curioso, que es más bien un aristotelismo. Sin embargo, sus críticas de Benacerraf son más bien decepcionantes, limitándose casi por entero a presentar su propia alternativa. Con respecto al polimorfismo, Maddy concede a Benacerraf su postura de que ninguna de las reducciones posibles ha de primar sobre las otras, aunque con el curioso argumento de que, en realidad, no tendría que haber, *a priori*, ninguna expectativa de que alguna de ellas lo hiciera, lo cual me parece más bien eludir el problema (1981a, pp. 500–501). Además, Maddy presenta las típicas tres alternativas (Frege, Zermelo y von Neumann) sin percatarse de la diferencia entre la visión ordinalista y la cardinalista, con lo que supone, sin argumentación, que la información que tenemos es insuficiente como para optar entre ellas a través de algún criterio.

Respecto a la generalización de Benacerraf, según la cual los números no son tampoco objetos, Maddy parece argumentar en contra. Si los números están determinados sólo por las condiciones necesarias y suficientes que dimanan de su papel en el sistema de números y, por tanto, cualquier objeto que exhiba propiedades adicionales queda descartado como número, entonces debería clarificarse por qué los números, como objetos genuinos, no podrían serlo con sólo gozar de aquellas propiedades. El argumento es similar a los que hemos visto más arriba de Resnik y Steiner —que no se citan en este punto— y, en consecuencia, los mismos comentarios son aplicables. Valga, si acaso, añadir que el problema de fondo es precisamente la falta de una teoría general de los objetos en Benacerraf, lo cual, aplicado a los números, lo lleva —como vimos en la sección

3— a una reducción eliminativa de los números a términos que se agotan en un nudo de relaciones con otros, los cuales se evaporan, a su vez, ante consideraciones similares. Pero eso es como recurrir subrepticiamente a un estructuralismo no trabajado tampoco a fondo. Por otra parte, la posibilidad de decir que los números resultarían "implícitamente definidos" por los axiomas de Peano no ha sido ni siquiera explorada por Benacerraf, como sí lo fue por el propio Peano y también por Russell (véase sección 6).

La salida de Maddy es conocida: los números no son, efectivamente, conjuntos; son realmente propiedades de conjuntos, similares a las propiedades que tienen los objetos físicos, como por ejemplo la longitud. Así que la teoría de números es aquella parte de la teoría de conjuntos que trata de las propiedades numéricas de los conjuntos finitos (1981a, p. 502). Ello sin duda supera la preocupación de Benacerraf por evitar las propiedades de los conjuntos, que podrían llevar a sustanciar la posición de Frege sobre el resto de alternativas ordinalistas. Sin embargo, aunque los argumentos de Benacerraf contra una identificación entre números y propiedades de conjuntos son, sin duda, discutibles, no me parece que de ello pueda concluirse que, al fin y al cabo, se trata de una identificación paralela a la existente entre números y propiedades de extensiones de conceptos. Seguramente el argumento de que tales propiedades resultan completamente determinadas por sus extensiones (*ibid.*, p. 505) es equivocado.

Por otra parte, ignoro qué nexo habrá entre ello y la fundamentación del realismo conjuntista de Maddy en un sorprendente aristotelismo, según el cual los conjuntos son objetos similares a los objetos físicos, por lo que así como los objetos físicos se sitúan en el espacio y el tiempo, así lo hacen los conjuntos: "un conjunto de cosas está donde lo esté el agregado de esas mismas cosas" (*ibid.*, p. 501). En todo caso, tal supuesta fundamentación epistemológica no puede ser alegada para defender la conclusión final de Maddy según la cual decir que la teoría de números es una parte de la teoría de conjuntos no supone reducción alguna (*ibid.*, p. 508):

> no es el caso que las (macro) propiedades número-teóricas de los números se hayan explicado en términos de sus (micro) propiedades conjuntistas, esto es, mediante su identidad con ciertos conjuntos. Lo que ha sucedido no es que una teoría se haya reducido a otra, sino que un malentendido que producía la apariencia de que había dos teorías y dos clases de objetos se ha corregido. Hay sólo conjuntos con propiedades numéricas; la teoría de números es parte de la teoría de los conjuntos finitos. De hecho las reducciones habituales de la teoría de números a la teoría de conjuntos son incorrectas sólo en que las propiedades numéricas se toman por objetos y por tanto son identificadas con conjuntos particulares. Cuando las propiedades numéricas se ven como propiedades, aquellos mismos conjuntos pueden usarse como recursos para medir sin que se produzca la falsa impresión de que existe alguna distinción metafísica entre ellos y otros conjuntos.

Para decir con sentido que no ha habido reducción debería mostrarse que lo que se tomaba por objetos auténticos no lo eran: así por ejemplo sucedía con los infinitesimales para Weierstrass, Cantor y Russell. Pero no basta con decir que una ontología ha sido embebida en otra;[13] hay, además, que mostrar cómo las funciones de los falsos objetos han sido *completamente* suplantadas por las de los verdaderos. Y dudo que ello pudiera hacerse cuando Maddy se limita a hablar de los números como propiedades "numéricas" de conjuntos. Es obvio que nos quedamos a falta de un estatus de tales propiedades, en tanto se diferencien de otras propiedades que puedan tener los conjuntos. Y temo que cualquier caracterización de tales propiedades especiales presupondría precisamente la característica que se quiere presentar como ficticia.

[13] Como, por otra parte, ya había señalado Chateaubriand con más claridad en el marco de una crítica de la reducción ontológica de Quine, que Maddy no aborda, al menos en el trabajo que estamos estudiando; véase mi estudio citado en la nota 1 y Chihara (1973a).

Además, incluso se podría acusar a Benacerraf de que su visión proto-estructuralista peca de lo mismo que desea eliminar: si las verdades de la aritmética han de ser salvadas nada ganamos con sustituir la objetividad de los números por las de las estructuras; con lo cual serían *propiedades* de tales conceptos generales las que pasarían a garantizar aquellas verdades. Así, no necesitamos pedir a Maddy una clarificación de hasta qué punto las propiedades no pueden ser consideradas como objetos legítimos (su aristotelismo la obligaría más bien a lo contrario); basta con señalar las formidables dificultades de su ontología de las propiedades numéricas. De nuevo lo que prometía mucho como crítica de Benacerraf no ha pasado de ser una alternativa a su vez falta de lo principal: una auténtica construcción ontológica alternativa, o al menos la defensa de alguna tradicional que pueda mostrar eficazmente por qué los argumentos de Benacerraf presuponen más de lo que pueden demostrar.

Llegamos así a la crítica de Wright (1983a), que pasa por ser la más extensa y profunda desde el campo platónico, o quizá desde cualquier otro. Wright sitúa correctamente la polémica en el concepto estructural de progresión, pero hace mal, a mi juicio, en mencionar sólo de pasada el antecedente de Dedekind, que —según él— hizo la "sugerencia" de que la esencia de los números son las progresiones. No se trata de una sugerencia; tanto para Dedekind, como para Peano y otros muchos ordinalistas, los números naturales no son más que aquello que cumple los correspondientes axiomas.[14] Esto tiene, sin embargo, un cierto tono familiar en la época de la teoría de modelos, tono del que carecía cuando la tesis fue formulada originalmente. Por tanto, tampoco me parece muy convincente que Wright plantee el tema general de la estructura de los naturales en términos que recuerdan el si-entoncismo de Putnam

[14] Peano diría más bien: aquello que puede abstraerse de todos los sistemas que satisfacen tales postulados

(véase la sección 7), es decir, aludiendo al hecho de que la teoría de números puede interpretarse meramente como basada en condicionales del tipo: si x es una estructura, entonces tales y cuales proposiciones se cumplen en ella. Ya vimos más arriba (sección 4), al comentar las críticas de Steiner, que no fue ése exactamente el planteamiento de Benacerraf.

Wright reduce la tesis de Benacerraf a tres fundamentales. La primera es que el concepto de progresión es el básico para la aritmética, o mejor dicho, que entender la esencia de la noción de número cardinal finito es entender lo que es una progresión (1983a, p. 117). Naturalmente se trata de una aclaración interesada, destinada a romper la identificación y —sobre todo— a hacerlo destacando las virtudes del cardinalismo, muy marginadas por Benacerraf, como ya señalé en su momento (sección 3). En efecto: es obvio que se trabajó correctamente con números antes de Dedekind y Peano; por tanto números y progresiones son dos cosas diferentes (*ibid.*, p. 122):

> Esto no es, por supuesto, decir que la idea de progresión no es la noción fundamental en la teoría pura de números. Es decir que es posible poseer la idea de número cardinal finito, y desde luego tratar los números, mediante criterios fregeanos, como objetos, sin hacer ningún *uso* de la idea de progresión [. . .] lo que es fundamental para poseer alguna noción de número natural no es el conocimiento de que los números naturales pueden disponerse en una progresión, sino el conocimiento de que ellos se identifican y distinguen por referencia a la correlación biunívoca entre conceptos.

El pasaje, que representa toda la línea de ataque de la primera tesis de Benacerraf, es poco claro. Primero, no es muy serio argumentar acerca de lo que es posible o no poseer desde el punto de vista de la prioridad histórica (o incluso epistemológica). Como el experimento mental (¡supongo!) de Benacerraf muestra, sería teóricamente posible educar niños que accediesen a la noción de número desde el punto de vista estrictamente conjuntista-cardinalista. Segundo, puede aceptarse la independencia de la noción fregeana cardinalista de número con respecto a la de progresión, pero es en buena medida arbitrario que se introduzca antes. Por otra parte el que sea posible introducir la idea de número desde el punto de vista cardinalista —mediante la idea de correspondencia entre clases— no lleva necesariamente a su consideracdión como objetos, por lo que conviene mantener separadas ambas cosas. Finalmente, Wright, siguiendo la norma establecida, habla indistintamente de número natural y de número cardinal, con lo que hace su ataque más plausible, aunque no más efectivo. Ambas expresiones son sinónimas en la literatura al uso, pero al hacer filosofía hay que hilar algo más fino, sobre todo en un problema como éste, donde se trata precisamente de saber —aunque Wright no lo diga claro— si es la opción cardinal, o la ordinal, la genuinamente "natural". Si a esto añadimos que Wright no analiza la noción de contar en este texto, ni propone ninguna respuesta a posturas como, por ejemplo, la de Goddard (véase la sección 2), entonces su línea queda aún más desdibujada.

Por este tipo de oscuridades puede Wright defender que la concepción de los números como una serie se basa en que enseñamos a nuestros niños aritmética mediante el contar recitando meros sonidos: "La intuición de Frege, en contra de ello, fue que la *identidad* [*sameness*] de número —la correlación biunívoca— es lo fundamental; esto es, su posesión es necesaria para *cualquier* comprensión del número cardinal, y es suficiente para el aparato rudimentario de los juicios numéricos [. . .]" (1983a, pp. 120–121). También se puede, ahora, argumentar en contra. Ante todo, Benacerraf podría dar la vuelta al argumento anterior y señalar que igualmente antes de Frege se entendía el número y se trabajaba correctamente con él, principalmente probando teoremas de teoría de números, sin ninguna necesidad de la idea de correspondencia biunívoca como base. Y no vale la defensa de que ello era posible porque tal idea estaba implícita en aquellos razonamientos, a menos que estemos dispuestos a conceder que se podría decir lo mismo de la idea de progresión en el argumento original. Pero es que, además, Wright hace hincapié sobre todo en el nexo cardinal-correspondencia, que pocos pondrían en duda, cuando de lo que se trata, por el contrario, es de buscar la forma de mostrar que conviene, por motivos habituales dentro de la ciencia, comenzar la construcción general del número por la idea de cardinalidad, que facilita mucho las cosas a la hora de introducir la distinción finito-infinito. En conjunto podemos decir, pues, que el ataque de Wright a esta primera tesis es oscuro y falto de eficacia.

La segunda tesis de Benacerraf es, para Wright, la fundamental precisamente porque la idea de progresión es lo básico en nuestra comprensión de los números, los diversos elementos de ella pueden ser conjuntísticamente representados de muy distintas maneras, según la progresión particular que adoptemos. Por tanto, ninguna de ellas sirve para identificar qué conjuntos son los números ni, en general, se sostiene la tesis de que los números sean objetos: si lo fueran, podrían identificarse los conceptos bajo los que caen (1983a, p. 117, pp. 121–122). Se trata de una descripción de nuevo poco clara: no hay necesidad alguna de introducir aquí el par fregeano objeto-concepto; basta con hablar de propiedades, como lo hizo Benacerraf. Wright lo introduce con el fin de defender que si tenemos algún criterio para escoger entre diversas reducciones de números a clases, valdrían sólo aquellas reducciones que cumpliesen las condiciones habituales asociadas a los números; pero la propia discusión que sigue —así como los ejemplos— claramente es considerada por el autor como mera escaramuza preliminar.

El argumento central es ahora la generalización, al estilo de Resnik: si es cierto que el polimorfismo conjuntista lleva a negar que los números sean objetos, ello sucede sólo a través de la tesis general quineana de la inescrutabilidad de la referencia; pero entonces sería aplicable por igual a todos los términos singulares, incluyendo las mismas clases (1983a, p. 125). En principio no se ve la fuerza del argumento; para concederlo bastaría con renunciar a las clases como objetos abstractos, a pesar de que incluso Quine las mantuviera como tales. Wright lo perfila añadiendo: "La conclusión antiplatónica de Benacerraf necesita apelar a una premisa suplementaria tácita: que donde los usos y las explicaciones estándar son insuficientes para determinar unívocamente la supuesta referencia de una expresión aparentemente referencial, la expresión no es verdaderamente referencial" (*ibid.*, p. 127). Ahora el intento de reducción al absurdo se clarifica: o Benacerraf se equivoca o ningún término singular tiene referencia.

Con ello lo que hace Wright es meramente trasladar la tesis de Benacerraf al campo de Quine. No veo ningún problema en aceptar la adscripción de Benacerraf a la tesis general quineana. La dificultad radica en que, como señalé anteriormente (sección 3), Benacerraf no tomó partido en semejante nueva polémica, ni conocía, en 1965, la evolución de la tesis quineana hacia una radicalización de la relatividad ontológica. Así que no veo otra defensa de la reducción al absurdo que negar el propio absurdo. Claro que entonces la propia postura de Benacerraf se vendría abajo: ¿qué sentido tendría decir que los números no son objetos si nada lo es? Sin embargo, no necesitamos llegar tan lejos; basta recordar que si se admite una postura ontológicamente relativista siempre queda el recurso de refugiarse en la objetividad de los predicados. Al fin y al cabo toda la filosofía de Quine no es sino el desarrollo de su célebre compromiso ontológico, que, a su vez, no es más que el traspaso de la carga ontológica a los predicados (y a las estructuras que los combinan).

La tercera y última tesis de Benacerraf que valora Wright es un poco la síntesis de todo lo anterior; ahora en sus propias palabras, se trata del "deslizamiento desde 'cualquier progresión de objetos sirve como números naturales' a 'las verdades número-teóricas son esencialmente verdades de cualquier progresión' [...], y luego a 'es un error suponer que la teoría de números trata de objetos particulares'" (1983a, p. 118). Pasando por encima del segundo estadio, que parece más bien perteneciente a la concepción si-entoncista, parece que la estrategia de Wright es ahora tratar de compatibilizar la concepción de los números como objetos —después de todo para Frege lo eran en virtud de la verdades de la aritmética— con la, digamos, estructuralista. Pero esto lo lleva en seguida a una descripción plenamente formalista (con el clásico ejemplo de ajedrez incluido); podría decirse que los números naturales son objetos tales que, para conocer que ciertas características se les aplican, basta con reconocer una característica general de las progresiones (*ibid.*, p. 128).

Se trata de un movimiento que hemos bordeado ya más arriba y que podríamos asimilar a la concepción de la definición implícita: los números serían aquello que satisface las leyes de la aritmética, empezando precisamente por los axiomas de Peano, que rigen la estructura de las progresiones relevantes. Esto parece olvidar, a su vez, que la aritmética tiene modelos no isomorfos, por lo que no todos los objetos valdrían para la interpretación correspondiente (Russell, al fin y al cabo, tenía parte de razón al exigir —por otros motivos— una unicidad última). Aun sin recurrir a ello, entre otras cosas porque Benacerraf no contempló tal posibilidad, podría exigirse —máxime desde una postura platónica como la de Wright— que se diera algún criterio de individuación de los cardinales que fuese independiente del orden de las progresiones, aunque con ello volveríamos claramente a la polémica de los argumentos anteriores. A mí no se me ocurre, sin embrago, ninguna otra observación relevante para aclarar la postura de Wright. Quizá a él tampoco se le ocurrió, pues cierra su análisis con un claro rebajamiento de lo que podría esperarse que fueran sus exigencias originales (1983a, p. 129):

> El que es platónico en materia de números no necesita presuponer que la concepción de los números como objetos es de alguna forma indispensable para nosotros; aún menos que esa concepción es de alguna forma más cercana a la "verdad estructural" acerca de la realidad número-teórica que la concepción de las progresiones-en-general. Su posición es, simplemente, que si hay disponible un concepto clasificatorio [*sortal*] del número natural y hay criterios normales que determinen que ese concepto tiene instancias —esto es, que contextos de los tipos relevantes que contengan términos que pretendan denotar números naturales sean verdaderos— entonces *hay* tales cosas. Esto puede mostrar mucho acerca del *tipo* básico de entidad con que tratamos, tanto si los medios por los que el concepto clasificatorio se explica son ostensivos, descriptivos, postulacionales o contextuales; y tanto si el discurso acerca de tales entidades es prescindible para fines prácticos como si no. Pero estas consideraciones son completamente irrelevantes para la cuestión de si hay realmente tales cosas.

Ello le sirve a Wright para descalificar, de una vez, la posible enjundia de la tesis de Benacerraf con respecto al estatus de los números como objetos, a pesar de que de hecho el rebajamiento al que me refería consiste precisamente en arrojar ciertas dudas sobre el estatus de los números como objetos, que al fin y al cabo era el núcleo de la argumentación de Benacerraf.

Si lo entiendo bien, el argumento definitivo viene a decir: que los números son objetos (lo de los "*sortal concepts*" me parece sólo un intermediario prescindible) es indudable pues hay enunciados verdaderos que contienen numerales: luego tanto da que demos cuenta de ellos por un medio u otro. Evidentemente la fuerza de la conclusión descansa por completo en la de la premisa y ésta parece depender, a su vez, de un argumento que, aunque inspirado en Frege —que siempre pensaba en términos de verdad— se puede transformar en uno no muy diferente a la postura de Quine. En efecto, para éste el hecho de que los numerales figuren en un enunciado verdadero no les concede más referencia que la que dimane del papel que, como términos singulares, desempeñan en la teoría como un todo. Tales numerales podrían no ser más que abreviaturas de paráfrasis complicadas que los mostrasen como "construcciones lógicas" a base de materiales más seguros, por ejemplo clases. Y si recordamos que lo mismo puede decirse con respecto a elementos de ciertas progresiones, la premisa parece perder toda su fuerza.

Si, no obstante, quisiéramos valorar la conclusión por sí misma comprenderíamos rápidamente que muy a menudo, por no decir siempre, las cuestiones ontológicas se deciden con base en escoger entre diferentes métodos de introducción de conceptos; visto así es obvio que no es lo mismo postular un objeto que construirlo, como sabía muy bien Dedekind, y no digamos Russell, de quien derivan los mejores argumentos contra la postulación. Por tanto serían tales métodos los que tendrían que ser evaluados respecto a sus posibilidades de ofrecer ontologías aceptables. Y en el campo que nos ocupa ello nos lleva, una vez más, a escoger entre estructuras (o progresiones), es decir, ordinales, y correspondencias biunívocas, es decir, cardinales. El análisis de Wright no nos ha ayudado mucho, después de todo, a descifrar el problema de fondo que diagnosticamos en nuestro propio análisis.[15] Paso, pues, a abordarlo directamente.

6. *Ordinales versus cardinales*

Como he venido señalando en buena parte de lo anterior, es una lástima que Benacerraf no incluyera en su artículo una discusión directa sobre la alternativa cardinal-ordinal, prefe-

[15] Las ideas de Wright han traído cola. Se ha argumentado, por ejemplo, que la adscripción de la indeterminación de Benacerraf a la de Quine no es legítima, alegando ciertas diferencias, aunque de manera poco convincente (McGinn, 1984a; véase también Spinks, 1984a); por otra parte, Hale (1987a) ha señalado también ciertas dudas sobre las críticas de Wright, aunque no acabo de ver muy bien, en una primera lectura, la dirección de su alternativa. Para otras diferencias entre el problema del polimorfismo y el enfoque de Quine, véase Parsons (1971a).

rentemente con una base histórica. A muchos de sus desprevenidos lectores debió parecerles que su planteamiento era genuinamente original, aunque en cuanto se inserta en un marco histórico más amplio, que es lo que voy a hacer en esta sección, muchas de sus tesis aparecen simplemente como la repetición de otras mantenidas muchos años antes por otros.[16] Este problema es, pienso yo, típico del tipo de filosofía analítica que se desarrolla sólo, o principalmente, a través de artículos que escogen un pequeño punto como objeto de análisis y se despreocupan de situarlo en un contexto más extenso, incluyendo cierto respeto por la historia del problema. Desde un punto de vista histórico, como es el mío, es de la mayor importancia superar tales carencias, y éste es un tema donde al hacerlo hallamos sorprendentes antecedentes y clarificaciones.

A título de visión general podríamos decir que la concepción de los números como una realidad cuya esencia es el formar una progresión —que he llamado ordinalista— es la que ha prevalecido. Nació de forma explícita, situándonos ya en la época contemporánea, con Kronecker y Helmholz, aunque fue llevada al máximo rigor sólo con Dedekind y Peano, que la dotaron de una estructura axiomática. Después fue defendida por Peirce, Cassirer y Weyl —e incluso por Quine y Benacerraf—, pero lo que ha hecho que alcance una primacía casi definitiva ha sido que el enfoque basado en las estructuras —predominante en matemática a partir de Hilbert, después con Bourbaki, y ahora con el nuevo estructuralismo, salvando las distancias— enlaza de manera natural con ella. La concepción opuesta —la cardinalista— ve aquella esencia en los conceptos de elemento, clase y correlación entre clases. Nació con Cantor y Frege y fue desarrollada por Russell. Tenía ventajas matemáticas y filosóficas importantes, que he ido señalando aquí y allá

[16] Me moveré, no obstante, dentro de una perspectiva contemporánea. Sin embargo, se pueden hallar anticipaciones de la postura nominalista de Benacerraf en las ideas matemáticas de Berkeley, según ha mostrado claramente Robles (1989a).

en las secciones anteriores, pero ha decaído junto con la filosofía de la matemática —el logicismo— a la que se asoció. En lo que sigue trazaré brevemente algunos rasgos de la historia del enfoque ordinalista, para continuar después con la del cardinalista y terminar con unas reflexiones sobre la importancia de lo visto para nuestro problema general.

Como es bien sabido, Dedekind redujo los números a una estructura regida por las nociones de cosa (elemento), sistema (clase, conjunto) y aplicación (transformación, correspondencia) entre sistemas, y definida por los célebres axiomas llamados hoy de Peano (aunque sin la inducción matemática, que para Dedekind debía aprobarse). Tales axiomas determinaban la estructura llamada "sistema simplemente infinito" e hicieron posible definir los números como uno de tales sistemas, haciendo abstracción de la naturaleza de sus elementos y tomando el 1 como elemento básico. Ello suponía la consagración del ordinalismo, por cuanto la abstracción no afectaba al orden, que se mantenía como elemento definitorio. Así, para Dedekind los números naturales, o los números a secas, son los ordinales (1888a, §73):

> Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado mediante una transformación ϕ descartamos enteramente el carácter especial de los elementos, reteniendo simplemente su distinguibilidad y teniendo en cuenta sólo las relaciones mutuas en que la transformación ordenadora ϕ los coloca, entonces esos elementos se llaman *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números* [...] Las relaciones o leyes que se derivan enteramente de las condiciones [los axiomas] y por tanto son siempre las mismas en todos los sistemas simplemente ordenados, cualesquiera nombres pueda suceder que se les dé a los elementos individuales, constituyen el primer objeto de la *ciencia de los números o aritmética*.

Lo que equivale a decir: (i) que los números, en lo que respecta a la aritmética, no son más que elementos cuya naturaleza es sólo aquélla definida por sus lugares en la correspondiente serie; (ii) que tales lugares se determinan sólo a través de las relaciones entre ellos; (iii) que la aritmética tiene por único objeto el estudio de ese conjunto de relaciones o estructura. Ésta fue la base de la concepción contemporánea del ordinalismo. El resto de la construcción, que había exigido ya la introducción de la distinción finito-infinito (mediante la definición de Bolzano en términos de correspondencia), dimanaba de lo anterior: inducción matemática, operaciones fundamentales, número cardinal (el número de los elementos de un sistema finito en términos del número con el que se corresponde biunívocamente un sistema semejante al dado) y por fin la clase de los sistemas simplemente infinitos (ya con la inducción matemática).

Peano precisó este planteamiento añadiendo el axioma de la inducción matemática al conjunto de axiomas originario (renunciando así a su "prueba"), pero, desde un punto de vista más "modelístico", vio claro que hay una infinidad de sistemas que satisfacen tales axiomas, por lo que llegó a ofrecer una formulación de ellos en términos puramente abstractos, es decir, sin referencia alguna a las nociones primitivas aritméticas: número, cero y sucesor. Sin embargo defendió su postura, más o menos formalista, diciendo que los números es eso que se obtiene por abstracción de todos aquellos sistemas. La diferencia básica con Dedekind es que para aquél su construcción equivalía a una reducción logicista, mientras para Peano tal cosa no es posible: la noción de número es irreducible e intuitiva, así que sus axiomas estaban destinados sólo a caracterizarlos de manera formal. Peano conocía también algo de la obra de Frege y desde luego a Cantor, así que estaba al cabo de la calle del punto de vista cardinalista basado en la noción de correlación entre clases (e influyó decisivamente en Russell sobre este punto). Sabía por tanto también que era posible construir la aritmética evitando comenzar por los ordinales, pero prefirió siempre su enfoque axiomático.[17]

Peirce defendió el ordinalismo casi literalmente a la manera de Quine y Benacerraf cuando escribió (en 1905 y 1908): "la única cosa que los números enteros pueden expresar es el lugar relativo de los objetos en una simple y discreta serie lineal; [...] todo lo que es esencial para la matemática de los números es la *sucesión* y las relaciones definidas de sucesión, y ésa es precisamente la idea que los números ordinales desarrollan" (cit. en Levy, 1986a, p. 23).

Lo mismo podemos decir de Cassirer, que además ofreció ya en 1910 toda una exposición sistemática de la polémica. Según él Dedekind había ya mostrado que la esencia del número se agota en un conjunto de relaciones: "Lo que ella aspira a expresar es precisamente la existencia de una serie de objetos definidos por su idealidad, cuyo contenido total depende de las relaciones que mantienen entre ellos. La 'esencia' de los números se reduce a su situación" (1910a, p. 54). Esto lo llevó a describir magistralmente la caracterización ordinal como aquella según la cual (*ibid.*, p. 64)

> el número aislado no tiene jamás significación independiente y no recibe más valor que mediante el lugar que ocupa en el conjunto del sistema. La definición del número, sea la que sea, determina al mismo tiempo e inmediatamente la relación que mantiene con los otros elementos del dominio, relación que es imposible de suprimir sin rechazar al mismo tiempo toda la potencia que se le reconoce al número en cuestión.

Pero no se limitó a describir la postura ordinalista; la defendió explícitamente, alegando que la teoría ordinal representa la caracterización mínima que ningún otro punto de vista puede eludir, mientras que la cardinal es más útil de cara a las aplicaciones (*ibid.*, p. 69). Sin duda Cassirer estaba pensando aquí

[17] He desarrollado todo esto a fondo en mis 1988b y 1991a (capítulo 3).

en las aplicaciones del contar y medir, que requieren, al menos en su aspecto transitivo, el recurso a la correspondencia entre clases. Sin embargo, también tuvo la lucidez de añadir, aunque fuese en una nota, que comenzar por los cardinales permite, mediante la correspondencia, definir los números infinitos (*ibid.*, p. 70). Pero entonces no estamos ya ante una simple aplicación, sino más bien ante toda una construcción alternativa, es decir, una teoría.

También Hermann Weyl dedicó una discusión al tema en una obra muy conocida en Estados Unidos, publicada precisamente —en versión inglesa— en Princeton: su 1949a. Allí defendió el ordinalismo, pero no simplemente como Quine o Benacerraf, sino reconociendo la ventaja de la extensión al infinito e introduciendo un argumento que veíamos en las secciones 2 y 4: el de que la correspondencia entre clases presupone ya el número (1949a, pp. 34–35):

> el criterio de equivalencia numérica hace uso de la posibilidad de emparejamiento, que puede descubrirse sólo si los actos de correlación son llevados a cabo uno después de otro en sucesión temporal y los elementos de los conjuntos mismos son de ese modo dispuestos en orden. Incluso si uno sigue el camino de la abstracción y divide el acto de comparación numérica de dos conjuntos primero adscribiendo a cada conjunto un número y después comparando esos números, aún sigue siendo indispensable el ordenar cada conjunto individual mismo exhibiendo sus elementos uno a uno en sucesión temporal [...] por esta razón me parece incuestionable que el concepto de número ordinal es el primario.

También Weyl insertó su opción en el marco de una crítica general a la definición de Frege-Russell del número de una clase. Ya he comentado tales críticas en otra parte,[18] pero lo esen-

[18] Véase mi 1987a, donde aparece todo el contexto histórico de tal definición, así como su probable autoría en Peano (aparte de la obra de Frege, claro es), tras los esfuerzos de Pieri y Burali-Forti por superar los defectos de las definiciones por abstracciones y por postulados.

cial de ellas radicó en que tal definición, aunque eficaz para cumplir con las funciones del número en el marco de una concepción global, no proveía lo que sus autores buscaban: una representación concreta del número. El argumento es sin duda curioso, pues recuerda justamente la bien conocida crítica de Russell a la posición ordinalista, que veremos a continuación, tras una referencia a Cantor.

Sólo la gran construcción del genial alemán permitió mostrar los nexos que era posible establecer entre los pares cardinal-ordinal, finito-infinito, correspondencia-orden y conjunto-potencia, que subyacían de manera inextricable al concepto de número.[19] Ante todo introdujo el número cardinal (la potencia de un conjunto) como el concepto general derivado de un conjunto cuando se hace abstracción de la naturaleza de sus elementos y del orden en que se encuentran en él. Inmediatamente, la equivalencia entre conjuntos, en términos de correspondencia biunívoca, afecta también a sus potencias. Con sólo eso —es decir, sin los ordinales ni los axiomas de Peano— es ya posible definir los cardinales finitos:[20] resultan al subsumir un objeto bajo el concepto de un conjunto del cual se obtiene después la potencia correspondiente por abstracción, así como los cardinales transfinitos: son potencias de conjuntos transfinitos, que son aquellos equivalentes a alguna de sus partes (subconjuntos).

Ni siquiera ahora se pasa directamente a los ordinales: éstos se basan también en conceptos más generales: los tipos de or-

[19] Cuando la obra principal de Cantor se imprimió en 1895–1897, ya se había publicado la mayor parte de la de Frege, pero este último, además de ejercer escasa influencia, comenzaba también su construcción con los cardinales y definía el infinito de forma parecida. Prefiero, pues, limitarme aquí a Cantor para pasar en seguida a Russell. Además, Frege publicó su 1884a cuando ya había aparecido la idea esencial de la construcción cantoriana de los transfinitos en 1883, asociados a su concepción cardinalista: para ambos la distinción finito-infinito es puramente cardinal.

[20] A diferencia de Frege, para quien se vinculaban a la inducción matemática y, por tanto, a la serie ordinal.

den, que a su vez dependen de dos tipos de conjuntos: los simplemente ordenados y los bien ordenados. Un conjunto se halla simplemente ordenado cuando entre sus elementos se da un orden de precedencia determinado (que se define fácilmente). Un tipo de orden es el concepto general que resulta de un conjunto cuando hacemos abstracción de la naturaleza de sus elementos y retenemos sólo su orden de precedencia. Ello permite ya introducir la semejanza entre conjuntos ordenados con base en la correspondencia biunívoca. Y ahora es cuando aparece un primer nexo importantísimo: los tipos de orden de conjuntos ordenados finitos coinciden con los cardinales finitos correspondientes, mientras que para un mismo cardinal transfinito existen innumerables conjuntos simplemente ordenados diferentes. Aquí encuentran su inserción más natural los números racionales (el tipo de orden η) y los reales (el tipo de orden θ del continuo).

Un conjunto simplemente ordenado estará, además, bien ordenado si sus elementos ascienden en determinada sucesión, regida por ciertas leyes (que equivalen, en la práctica, a los axiomas de Dedekind). Llegamos ahora al número ordinal; es simplemente el tipo de orden de un conjunto bien ordenado. Aquí rige la misma característica que señalábamos para los cardinales: si son finitos, sus propiedades coinciden con las de los cardinales finitos, pero existe una infinidad de ordinales que corresponden al mismo cardinal transfinito. No necesitamos pasar aquí a las clases de números (que son totalidades de los números que hemos definido). Baste señalar la versatilidad de la noción de potencia, que permite ser utilizada eficazmente en combinación con los conceptos de conjunto, cardinal, finito, infinito y ordinal: potencia y ordinal coinciden en el caso de los números finitos, pues el número de sus elementos no cambia cuando el orden cambia, pero difieren en los transfinitos, donde la misma potencia puede dar lugar a diferentes ordinales. Como he señalado en otra parte,[21] ello supone la plena conciencia de que bajo las viejas nociones de número y orden latían muchos conceptos distintos, lo que hizo posible la construcción de una sola teoría que los abarcase a todos en el marco de la economía conceptual y el rigor. No es de extrañar que Russell quedara fascinado por semejante construcción hercúlea, sobre todo una vez que se cuenta con los medios de la potencia lógica peaniana. Tampoco lo es que, en tales circunstancias, una vuelta a las progresiones —los ordinales, en suma— como el fundamento de la aritmética pareciese una vuelta atrás.

Sin embargo, en su conversión cantoriana Russell contó con un precedente fundamental: Louis Couturat, con quien tuvo además una relación de muchos años. Couturat se había ya declarado cantoriano en su 1896a, obra en la subraya —en su análisis del número— precisamente los aspectos cardinalistas cantorianos (Cantor había introducido los ordinales antes que los cardinales en sus trabajos anteriores a 1895a). Con base en ello realiza una crítica feroz del ordinalismo, sobre todo lo que él llamaba la teoría "empirista" del número de Dedekind, Kronecker y Helmholz, que tilda además de positivista y nominalista, por más que sus defensores hablen del número como creación libre del espíritu.

El argumento central es que tal teoría reduce los cardinales a la serie ordinal, pero con el expediente de recurrir al contar (o numerar), por lo que independientemente de sus pretensiones aprioristas hace nacer el cardinal de la aplicación de una serie de signos a una colección de objetos reales, es decir, de una numeración en la experiencia. Para Couturat, en cambio, la idea de número cardinal esta ya implícita en la númeración (1896a, p. 327), aunque él lo formule en los términos kantianos usuales, a los que renunciaría precisamente con la ayuda de Russell. El resultado es claro y rotundo: "la idea primitiva de número es el número cardinal", en consecuencia, "el número

[21] Véase el capítulo 5 de mi 1987a y la sección 1.2 de mi 1991a.

entero es, en esencia, independiente de las ideas de orden y sucesión" (*ibid.*, pp. 354–355).

Su 1900a vino a perfilar mejor la primacía de la concepción cardinal sobre la ordinal (p. 29):

> Parece evidente a la reflexión que [la concepción ordinal] contiene un elemento adicional, que es la idea de orden. En efecto, el número ordinal se compone, en realidad, de *unidades ordenadas*; es pues primero una colección de unidades, es decir un número cardinal, con un dato más, que es la disposición de estas unidades. El número cardinal es pues más simple que el número ordinal; representa un grado superior de abstracción, como lo ha visto correctamente Cantor.

Couturat llevó más lejos todavía su cardinalismo en el mismo trabajo: llegó incluso a defender que el número cardinal es incluso anterior a la idea de correspondencia (quizá por la poco convincente definición cantoriana de conjunto). En todo caso, también en esto Russell habría de convencerlo con la aparición de sus *Principles* y *Principia*, auténtica síntesis del cardinalismo sobre los hombros de Frege y Cantor. Pero no cabe duda de que incluso en sus polémicas Couturat se adelantaba también a muchos de los argumentos que hemos repasado referentes a la problemática primacía del número, el contar, el orden y la correspondencia entre conjuntos. Sin embargo, como tantas veces en la historia, casi ningún recuerdo se ha guardado de él.

La construcción russelliana del número cardinal es la más conocida de las que hemos examinado, pero su celebridad en los ambientes filosóficos no suele pasar de la definición del número de una clase en términos de la clase de clases similares a ella, lo que impide ver la magnitud global de la construcción, cuya estructura es muy similar a la de Cantor. Tras algunas vacilaciones,[22] Russell construye los cardinales como

[22] Véase mi 1987b para un rastreo del proceso en los manúscritos inéditos y la dimensión de la herencia peaniana.

números de clases (o potencias de conjuntos como diría Cantor) en los bien conocidos términos de equivalencia entre clases, y el concepto de número cardinal —siguiendo a Frege— como aquello que es el número de alguna clase. Como esto vale para los números transfinitos, la introducción de la distinción finito-infinito se hace en los términos usuales de equivalencia con una parte propia. Por fin los ordinales se introducen como clases de series, una vez definido el orden, todo ello mediante la nueva lógica de relaciones, que lleva incluso a un tratamiento completo de la teoría de las progresiones en 1901. El mecanismo es estrictamente paralelo, sobre todo en la presentación de 1903a y posteriores: el número ordinal de una relación serial es la clase de relaciones semejantes a ella.[23] Todo ello le permite presentar una alternativa completa al ordinalismo, en la línea de Cantor, pero con todo el aparato argumentativo en defensa de una tesis esencialmente *filosófica*.

Un breve análisis de la toma russelliana de postura en la polémica cardinal-ordinal es de lo más instructivo, tanto por su valor clarificador intrínseco como por la luz que arroja sobre muchos de los problemas que hemos examinado en las secciones anteriores. Ante todo, veamos la relación entre sus cardinales y los axiomas de Peano. Para Russell la ventaja constructiva principal de su definición de los cardinales es, no sólo la que se deriva del logicismo (la búsqueda de un mayor rigor, seguridad intuitiva y logicización de las verdades aritméticas), sino también el lograr una determinación unívoca de los números, dado que según Peano sus axiomas poseían infinitos modelos. Russell no podía saber todavía que se trataba de una tarea imposible, pero lo cierto es que tal finalidad jugó un papel catalizador básico, no sólo justificativo.

Según él no era posible un proceso de abstracción partiendo de todos los sistemas que satisfacen los axiomas de Peano:

[23] Para un tratamiento histórico-filosófico de toda la construcción, véase mi 1991a, capítulo 4.

"todo término de una clase es el término que es, y satisface alguna proposición que se hace falsa cuando se sustituye otro término de la clase. Por tanto no hay ningún término de una clase que tenga simplemente las propiedades que definen dicha clase y ninguna otra" (1903a, §122). La consecuencia es que si definimos la clase de los modelos de los axiomas, sus primitivos adquieren el estatus de meras variables y entonces no significan nada. Russell demuestra fácilmente esto recurriendo a una definición nominal de tal clase de modelos que hace desaparecer en su seno tanto los indefinibles como los axiomas mismos (*ibid.*, §123), exactamente igual que haría en la geometría al no poder ofrecer una definición lógica nominal del punto.[24] Por último, su definición cardinalista pretende también aportar existencia a los números, cosa que no podríamos extraer de aquellas variables hueras: no hay más que demostrar que las propiedades esenciales exigidas son satisfechas por los números cardinales finitos tal como se han definido. De no ser así, la aritmética estaría vacía de contenido veritativo.

Podemos pasar ahora al problema de los ordinales. Ante todo, el contar queda rápidamente descalificado (1903a, §129). Primero desterrando las connotaciones psicológicas por irrelevantes; segundo reduciendo el proceso al de la correspondencia entre conjuntos. Es cierto que Russell no toca explícitamente el contar intransitivo, pero es seguro que lo reduciría al mero problema psicológico de contar objetos imaginarios o de señalarlos subrepticiamente: es la correspondencia con la serie de los números lo que daría sentido al contar intransitivo, no a

[24] Curiosamente, sin embargo, Russell no considera aquí que se presente el mismo problema de multivocidad. En todo caso vale la pena añadir que la ahora tan de moda definición por introducción de un predicado conjuntista no es sino un mecanismo parecido, inpirado en los usos matemáticos modernos (*cfr.* Bourbaki), pero claramente entroncada con métodos mucho más antiguos. Sobre el tema del rechazo por Russell de las definiciones por postulados, véase mi 1991a, capítulos 4 y 5, y también Jourdain (1910a).

la inversa. La prueba está en que para Russell ni siquiera el contar transitivo da información alguna sobre lo que son los números (sus leyes, su formar una serie, etc.).

Veamos ya la polémica prioridad ordinal-cardinal. Lo que quisiera destacar es que fundamentalmente para Russell se trata de una polémica en buena medida artificial, que debe ser resuelta en términos de simplicidad científica. Primero, las progresiones, cualquiera de las cuales valdría para desarrollar la aritmética, pueden definirse con independencia del número, que debe ser visto como un caso en particular de progresión (1903a, §229). Segundo, ello no obsta para que sean los cardinales, definidos en términos de correspondencia entre clases, los que usemos en la vida diaria, por más que la matemática se despreocupe de sus propiedades puramente lógicas y los reduzca también a progresiones. No hay, pues, prioridad lógica de ninguno de ellos (*ibid.*, p. 230):

> Los ordinales y los cardinales forman por igual una progresión, y tienen exactamente las mismas propiedades ordinales. Partiendo de cualquiera de ellos puede demostrarse toda la aritmética sin recurrir a los otros, siendo las proposiciones simbólicamente idénticas, pero diferentes en su significado [...] En realidad parece no haber posible elección en lo que respecta a la prioridad lógica entre ordinales y cardinales, excepto que la existencia de los ordinales se infiere de la serie de los cardinales.

Escoger entre ellos como punto de partida debe ser, pues, una *decisión* justificada por razones globales. El criterio que escoge Russell es el siguiente: aunque los ordinales pueden definirse sin los cardinales, una vez definidos se ve que los implican; por otra parte los cardinales, aun definidos independientemente, forman también una progresión. Entonces conviene atender a motivos de simplicidad: ¿Cuáles de ellos exigen menos ideas para ser introducidos? Sin duda los cardinales, pues aunque no estén presupuestos por los ordinales, éstos son más complejos, pues presuponen tanto las relaciones seriales como las biunívocas, mientras que los cardinales sólo presuponen las relaciones biunívocas (*ibid.*, p. 232).[25]

En efecto, un ordinal es para Russell algo independiente, no sólo de los cardinales, sino incluso de la naturaleza de los términos ordenados. Ello viene también a arrojar luz sobre la polémica desatada por Benacerraf al sostener que un número no es nada más que un lugar en una progresión. El secreto está en percatarse de que el orden, base de los ordinales, no es una propiedad de un conjunto dado de términos, sino de una relación serial, que, si está dada, determina su campo, pero no a la inversa (1903a, §231). Así, nuestra decisión en el problema de la prioridad constructiva no puede prescindir de los problemas de las relaciones seriales. Y con ello volvemos a la "esencia" de las progresiones, que no puede, según Russell, alegarse sin más como la estructura cuyos sistemas todos representan los números.

De ahí que Russell rechace también los axiomas de Dedekind como determinantes de los números. Su comentario al párrafo de Dedekind que transcribimos más arriba es (1903a, §242):

> Una progresión puede estar formada por puntos, o por instantes, o por ordinales transfinitos, o por cardinales, de los que [...] los ordinales no son elementos; [...] es imposible que los ordinales no sean otra cosa, como sugiere Dedekind, que los términos de relaciones que constituyen una progresión. Si son algo, deben serlo intrínsecamente; deben diferir de otras entidades, como difieren los puntos de los instantes, o los colores de los sonidos.

[25] Podría alegarse que los ordinales presuponen también las relaciones biunívocas, ya que Russell los ha definido en términos de clases de series, lo que exige la semejanza entre series, basada en la correspondencia biunívoca, pero ello no ocurriría en otra presentación. No sé lo que Russell respondería, pero me parece que ello no hace más que reforzar algo que Russell aprendió de Peano: que la definibilidad de un concepto, así como su prioridad, depende en buena medida del lugar que ocupe en una construcción global.

Las anteriores consideraciones llevan a Russell a su célebre doctrina del "ojo de la mente", pero eso no es más que un lastre de platonismo que Russell perdería en un par de años. Lo importante está en que, como consecuencia de todo este planteamiento, Russell se reafirma en la conveniencia de comenzar por los cardinales, pues éstos son independientes de la teoría general de las progresiones, mientras que debe demostrarse, y no meramente inferirse, que también forman una progresión, lo cual exige la introducción del orden, que es independiente del número: "En consecuencia, la cuestión de que si hay que comenzar por el orden o por los números se resuelve en una cuestión de conveniencia y simplicidad y, desde este punto de vista, los números cardinales deben tratarse antes que los problemas, muy difíciles, sobre las series [. . .]" (*ibid.*, §243).

A mí me parece que esto contribuye a clarificar nuestros problemas de fondo. Ante todo, no tiene nada de extraño y especial lo que hemos llamado polimorfismo conjuntista de los números. Es un fenómeno que tiene lugar allí donde hemos conseguido aplicar técnicas matemáticas; desde luego en lógica, pero también en física y en otras muchas ciencias. Se trata, simplemente de que podemos construir las mismas cosas de muchas formas matemáticamente diferentes, aunque conservando ciertas propiedades relevantes. Tanto si tales alternativas son compatibles como si no, escogeremos la que queramos, atendiendo a criterios generales de conveniencia, simplicidad, fecundidad, etc.

Desde luego ello exige la aplicación de un criterio con respecto a nuestras elecciones, pero eso no tiene nada que ver con el platonismo, ni constituye un problema particularmente ontológico. La prueba está en que Russell continuó defendiendo la misma construcción global de los números en los *Principia Mathematica* cuando, sin embargo, su platonismo se había quedado ya en el camino y había sido sustituido por toda una teoría de los símbolos incompletos, que comenzó con las descripciones pero alcanzó a las clases, las relaciones, los números y todos los demás objetos de la matemática y la física. Y, lo que es más curioso, su famosa reducción lógica del número tuvo lugar ya en 1903a, cuando su platonismo era de lo más exuberante, sin que ello sirviese para que el propio estatus ontológico del número sufriese ningún menoscabo. El tema de la eliminación, desde este punto de vista, es un tema relativo a la construcción dada, y en ello la postura de Quine parece irrebatible. Así, los problemas ontológicos tienen más que ver con criterios epistemológicos, que eran los que, en definitiva, tanto Russell como Frege pretendían aplicar en su versión del logicismo. En ella, precisamente para reforzar la verdad de la aritmética, y por tanto, también su ontología, convenía reformular las proposiciones en términos lógicos, supuestamente más seguros desde el punto de vista epistemológico. Pero ello exigía una teoría de la intuición, que debe, por tanto, tenerse en cuenta, y no simplemente dejarse de lado, como hace Benacerraf.

En una palabra: sin una *teoría* general de la construcción lógica, o de la definición constructiva, como yo prefiero llamarla, no es posible resolver el problema de la reducción y la eliminación; es decir, no es posible elegir, con sentido, en la polémica. De ahí que reprochase yo a Benacerraf tal carencia fundamental. Y ya hemos visto que para desarrollar esa teoría general hay que tener en cuenta criterios pragmáticos, así como epistemológicos. También Russell disponía de esa teoría general: siempre que sea posible sustitúyanse meras inferencias por construcciones lógicas realizadas con materiales más seguros. Es cierto que semejante teoría dependía en buena medida de una epistemología fundacionalista, pero es aplicable también con criterios más pragmáticos. Y no cabe decir, como sin embargo suele hacerse, que semejante teoría de la construcción era aplicable sólo a la construcción del mundo externo. Como he demostrado en otros lugares,[26] fue sistemáticamente aplicada a la construcción logicista de la mate-

[26] Véase mis 1987a y 1991a, capítulo 5.

mática, como puede comprobarse precisamente en lo que históricamente fue su origen: la distinción entre definiciones matemáticas y definiciones filosóficas. Termino esta sección recordando un olvidado pasaje de Couturat sobre la definición cantoriana de la continuidad, en el que veo uno de los precedentes de la teoría general russelliana (1896a, p. 653):

> Como la mayor parte de las definiciones matemáticas, puede ser considerada como la definición de una idea o como la definición de un término. Desde el punto de vista estrictamente científico es una definición de término, pues un concepto no existe, en matemáticas, más que cuando se introduce una definición clara y rigurosa. Desde el punto de vista filosófico, al contrario es una definición de idea, pues es incontestable que todos disponemos de la idea de continuidad, bajo una forma instintiva y espontánea, por más que confusa y vaga, que una definición matemática puede sin dudar precisar, pero no crear completamente. Desde el primer punto de vista, que es el de la lógica pura, la definición del continuo es esencialmente arbitraria, y por tanto tan legítima como cualquier otra. Desde el segundo punto de vista, que es el de la crítica , la definición del continuo puede ser más o menos valiosa, según que exprese, de manera más o menos completa, la idea racional de continuidad, de la que no es más que la traducción matemática. Es pues en este segundo punto de vista que es necesario situarse para apreciar lo justo y valioso de esta definición.

7. *A modo de conclusión: estructuralismo y platonismo*

El problema ontológico de los números es mucho más amplio de lo que mis limitados objetivos en este trabajo me han permitido examinar. He dejado sin utilizar trabajos relevantes (como White, 1974a; Hodes, 1984a o Wright, 1984a) e incluso libros dedicados a alternativas de carácter global en este campo (como Kitcher, 1978a y Field, 1984a). El tema no parece tener fin y sin descanso se dedican artículos a dar nuevas explicaciones de lo que los números "son" realmente; por ejemplo cualidades (Seidel, 1984a), objetos físicos concretos (Zemach, 1987a), propiedades de propiedades (Foster y Armstrong, 1987a), o exponentes de operaciones (Hand, 1989a).[27] Pero hay un nuevo movimiento estratégico en filosofía de la matemática que pretende sustituir, en cierto sentido, los números —e incluso todos los objetos matemáticos— por estructuras, como ya estaba más o menos sugerido por Benacerraf. Voy a terminar con algunas especulaciones sobre esa idea, aunque limitadas ya a abrir algunas vías de reflexión que deberán, en todo caso, ser completadas en un nuevo trabajo.

Estoy hablando del llamado "estructuralismo" —especialmente en su vertiente ontológica— tal y como lo entienden, por ejemplo, autores como Resnik (1981a, 1988a) y Shapiro (1983a, 1989a). Su idea central es que los objetos o entidades matemáticos (aquello que denotan las constantes matemáticas y los cuantificadores) no son más que "puntos sin estructura", o "posiciones en una estructura o patrón". Veo con simpatía la nueva corriente, en la medida en que pretende mantenerse a un nivel de abstracción sumamente general, pero creo percibir en ella ambigüedades parecidas a las que he ido señalando en secciones anteriores. Principalmente el que parezca ser sólo una generalización del punto de vista de Benacerraf, que, como hemos visto en detalle, no es sino la opción ordinalista tradicional. Sin embargo, aunque sus defensores reconocen el nexo con Benacerraf, no hallo en ellos muestra alguna de la conexión histórica con los autores que he estudiado en la sección anterior.[28] Por otra parte, me parece que la sustitución de las es-

[27] Valga en mi descargo la prolificidad con que se desarrolla en estos momentos la filosofía de la matemática, sobre todo en Estados Unidos. Para una muestra de ello basta con echar una ojeada a la bibliografía del artículo expositivo (Maddy, 1989a).

[28] Para colmo, hallo un autor que no mencionan, hasta donde sé, los estructuralistas, que ya había formulado anteriormente la tesis de un trabajo —incluso hablando de *patterns*— y la había generalizado remitiéndo a la teoría de categorías: Sapojnikoff, 1969a.

tructuras por patrones no es sino un recurso para mejorar las connotaciones epistemológicas del término, sin añadir mucha claridad a la idea central.

Sin embargo, la dificultad principal que veo en el estructuralismo es que da a entender que al definirse los objetos como meros "lugares" en las estructuras, son éstas las que vienen a "definir" a aquéllos. Eso es como decir que son las estructuras mismas las que han de convertirse en objeto de estudio único de la matemática, que es una tesis bastande antigua, al menos desde Bourbaki (1948a), y que deriva, como es sabido, del desarrollo del método axiomático de Hilbert (véase p. ej. Dieudonné, 1939a). Además, tal como la tesis suele ser defendida, da la impresión de que los estructuralistas admiten que los objetos nos son dados efectivamente con sus estructuras, y ello presenta muchos problemas; por ejemplo: ¿son, entonces, definidos implícitamente por ellas?, ¿puede un objeto formar parte de varias estructuras diferentes e incompatibles?, ¿significa la tesis central que las estructuras determinan su campo? Algunas de las respuestas a estas preguntas nos llevarían automáticamente a viejas polémicas acerca de los términos y las relaciones, que se retomarían hasta Russell y Bradley, como la de si podemos definir términos sin relaciones (y viceversa), si las relaciones determinan su campo (pero no a la inversa), o si podemos ver las relaciones como objetos sin paradoja.[29]

El problema tiene también otras ramificaciones, derivadas principalmente del uso poco claro que se suele hacer de términos como teoría, estructura, sistema y modelo, sin articularlos debidamente y eliminar lo que parecen redundancias, lo cual

[29] En todo caso, es sabido que para Bourbaki los objetos no nos son dados en ningún caso por sus estructuras, aunque supongo que ello se mantiene principalmente para cerrar el paso a ciertos accesos epistemológicos, al estilo de Russell. Quine estaría, en estas polémicas, más del lado de Russell, al menos cuando critica con energía la moda actual de la teoría de modelos de describir éstos como un par ordenado de un dominio y una relación; según él el dominio es innecesario ya que la relación lo determina.

se agrava al hablar a menudo de estructuras "abstractas" sin la debida explicación.[30] Lo razonable parece ser que una teoría es el estudio de la estructura de un sistema, con lo que una estructura sería lo que tienen en común varios sistemas. Pero entonces un modelo sería tanto un sistema como una estructura, y eso dejando del lado las dificultades de los modelos matemáticos, icónicos, físicos, etc.[31] Además, se suele describir tanto un sistema como una estructura a través de un cierto dominio afectado por una cierta relación (o función), con lo que la posible distinción entre ellos se oscurece, por mucho que especifiquemos el dominio.[32] Para colmo, la distinción sistema / estructura es en sí misma relativa: "muchas estructuras son ejemplificadas por sistemas cuyos 'objetos' son lugares en otras estructuras. Además, mucho de lo que se escribe sobre estructuralismo (incluyendo este artículo) habla de las relaciones entre estructuras; así, si el estructuralismo ha de aplicarse a su propia literatura, hay sistemas cuyos lugares son ellos mismos estructuras" (Shapiro, 1989a, p. 45).

Quizá el problema radique en que actualmente no hay más alternativa que la conjuntista a la hora de fundamentar la matemática, o, en un sentido más humilde, de clarificar sus objetos. Así por ejemplo, el intento más sistemático que conozco de definir un sistema termina, algo decepcionantemente, proponiendo una definición conjuntista que no es esencialmente diferente de la tradicional en términos de un conjunto de elementos bajo ciertas relaciones (Marchal, 1975a). Pero que la costumbre sea el presuponer el contexto conjuntista quizá oscurezca otras alternativas, tal vez más proclives a desarrollar una filosofía más esperanzadora. Ello tendría sin duda el efecto de no presuponer sistemáticamente que toda noción matemática es dudosa mientras no se dé de ella una traducción rigu-

[30] Un primer intento de aclarar esto último es Pollard (1987a).

[31] He tratado de aclarar algunas de estas nociones en mi 1989a.

[32] Véase la nota 29 para las ulteriores dificultades implícitas en ello.

rosa en términos conjuntistas, lo que podría ser nada más que un prejuicio.[33]

Si a esto añadimos las inevitables dificultades contenidas en el hecho de que las teorías interesantes en matemáticas son teorías axiomáticas, entonces hemos de admitir, además, el fenómeno de los modelos no estándar . Así, todavía está menos claro qué es un modelo de una teoría axiomática, o dicho en otros términos, qué es un objeto matemático, considerado como modelo semántico, en función de un sistema axiomático, considerado como modelo sintáctico. No se trata sólo de una cuestión de claridad o de método, sino de fondo. Hablar del polimorfismo de varios sistemas axiomáticos para un "mismo" sistema (o teoría), junto a la posibilidad de modelos no estándar para una misma teoría, significa, entre otras muchas cosas, negar definitivamente cualquier posibilidad de esperar que las nociones asociadas a cierto sistema nos sean dadas por un sistema axiomático determinado. Si ello exige o no el recurso a la intuición directa —pre-axiomática— de los objetos matemáticos, como no parece descaminado decir,[34] entonces quizá no quepa ninguna ontología en matemática sin la correspondiente epistemología. En todo caso no cabe duda de que semejante situación está llevando a la venerable especialidad de los fundamentos de la matemática a una especie de relativismo donde los conceptos se *suponen* como dados y donde el tratar de *afinar* nuestra comprensión de ellos parece ser todo lo que podemos esperar.[35]

Si echamos una ojeada a lo que los filósofos nos dicen sobre tales problemas no encontramos, creo yo, mucha más clarificación. Supongamos, como sugirió Putnam (1967a, p. 379 ss.),[36]

[33] Véase en este sentido, las observaciones de Goodman (1984, p. 30 ss.).

[34] Rota *et al.*, 1988a lo defienden así.

[35] Feferman (1985a) expone una visión de tales características.

[36] La sugerencia de Putnam estaba destinada a interpretar el logicismo,

que entendemos la matemática desde el punto de vista si-entoncista, en el sentido de estar destinada meramente a probar que si existe una estructura que cumple tales axiomas, entonces esa estructura cumple tales y cuales teoremas. Ya he considerado esa posibilidad al tratar de las objeciones de Steiner a Benacerraf (sección 4). Allí veíamos que inmediatamente aparece el problema de la existencia, que, si bien no es vital para la comprensión de la tesis misma, si lo puede ser de cara a sus aplicaciones. Pero ahora, interpretada como tesis general, se presenta la dificultad de los modelos no estándar. Putnam ha sugerido que la misma noción de modelo estándar debería entenderse siempre como precisable sólo como relación entre modelos, en el sentido de que un modelo estándar de, por ejemplo, la aritmética de Peano, no podría fijarse salvo relativamente a otro modelo, más bien que escogiendo arbitrariamente (empíricamente) un sistema cualquiera como *el* modelo estándar. Si ello es cierto, entonces un nuevo relativismo nos invade y perdemos toda posibilidad de considerar la estructura originaria como definidora de la clase de modelos que nos interesan, o incluso de entenderla como *un* modelo matemático en sí misma, salvo en el sentido técnico en que ello es innegable.

Consideraciones parecidas llevaron a Dummett (1963a) a rechazar incluso la noción de modelo semántico, salvo en el sentido relativo de algo dependiente de una descripción determinada, es decir, de un sistema concreto. Así, no deberíamos decir que el teorema de Gödel ha mostrado que, si bien poseemos el concepto de número natural, ninguna descripción finita de él logra dar cuenta completa de su estructura. Para Dummett eso es aplicar la noción de modelo de una manera incomprensible, pues si no podemos dar una caracterización completa de un modelo para la teoría de números, entonces no

pero aquí me interesa sólo en un sentido más general. Para un estudio de los problemas a los que da lugar en relación con el logicismo tradicional, véase Musgrave (1977a). Por mi parte, he estudiado su posible relación con el logicismo russelliano en mi 1990a.

hay ningún otro modo de llegar completamente a su estructura. Así, la conclusión habitual de que existe un modelo estándar de los números naturales en nuestra mente, a pesar de nuestra incapacidad de caracterizarlo completamente de manera formal, es errónea (*ibid.*, p. 193):

> Mi argumento ha sido, no que haya tal modelo estándar, aún menos que exista alguna incertidumbre sobre qué objetos particulares reconoceremos como números naturales, sino que la noción de "modelo" aquí usada es incoherente. Dentro de cualquier marco que haga posible el hablar coherentemente sobre modelos para un sistema de la teoría de números, será desde luego correcto decir que hay sólo un modelo estándar, y no muchos modelos no estándar; pero puesto que ese marco dentro del que modelo para los números naturales puede describirse envolverá él mismo o la noción de "número natural" o alguna noción equivalente o más fuerte como la de "conjunto", la noción de modelo, cuando se usa legítimamente, no puede servir para explicar lo que es conocer el significado de la expresión "número natural".

Como es sabido, Dummett ha concluido de aquí que la noción de número natural es inherentemente vaga y cualquier caracterización de ella envuelve una cierta extensibilidad indefinida que hace imposible apresarla completamente. Pero a mí me interesa más la lección que cabe extraer de las dificultades que su tesis arroja sobre las nociones de modelo y estructura, tal como él mismo se encargó de hacerlo en un trabajo posterior.

En efecto, en su 1967a Dummett insistió en la misma idea: decir que no podemos comunicar inequívocamente nuestra intuición de los números naturales por medio de un sistema formal sería aceptable si tuviésemos otra manera de comunicarla, lo cual no sucede.[37] Las consecuencias vuelven a ser fatales

[37] Tampoco serviría el principio de inducción matemática de segundo orden puesto que entonces tendríamos, a su vez, que formalizarlo, y cualquier formalización en la lógica de segundo orden poseería también interpretaciones no estándares (Dummett, 1967a, p. 210).

para la noción platónica de modelo. En efecto, tendemos a interpretar la completud de un sistema formal para la aritmética en términos de modelos no estándar, lo que para el platónico significaría que el sistema formal falla en capturar nuestra intuición de esa estructura, permitiendo otras interpretaciones (*ibid.*, pp. 210–211):

> Pero puesto que no podemos construir un sistema formal que no permita tales interpretaciones diversas, llegamos al dilema de que somos incapaces de estar seguros de si aquello a lo que alguien se refiere como el modelo estándar es realmente isomorfo con el modelo estándar que nosotros tenemos en mente. Éste es el resultado de concebir un modelo como algo que aprehendemos intuitivamente, y por referencia a lo cual podemos interpretar un conjunto de fórmulas de la lógica de predicados. Cuando más empleamos esta concepción, más estamos forzados a oscilar entre el hecho de que no podemos encontrar ningún método que transmita unívocamente lo que constituye el modelo estándar que tenemos en mente, y el hecho de que no haya nada en la práctica que pueda identificarse con seguridad sobre si un objeto matemático dado es o no un número natural. Estos dos hechos se combinan para hacer que nos refugiemos en el mito de la intuición inefable del modelo estándar, trascendiendo la descripción y liberándonos de la vaguedad que tiene cada descripción.

Y así volvemos a lo dicho más arriba: no podemos describir un modelo no estándar de la aritmética sin hacerlo como tal, lo cual se deriva de que para describir un modelo para el sistema necesitamos hacer ya uso de la noción de número natural, que garantiza nuestra intuición de lo infinitamente numeroso. Resumiendo: no podemos concebir un modelo salvo mediante alguna descripción particular de él. Si corregimos un poco las ambigüedades del lenguaje de Dummett, que usa algo alegremente los términos estructura, sistema y modelo, lo que podemos concluir de aquí es que ninguna estructura es concebible salvo a través de un sistema particular, y eso se parece mucho a la tesis de que al universal llegamos sólo a través de algún particular. Si tenemos en cuenta que algunos estructuralistas (p. ej. Shapiro) tienden a interpretar las estructuras como universales, la conclusión relativista y escéptica está servida, bastante lejos ya de cualquier platonismo.[38]

Pero Dummett ha llevado más lejos sus conclusiones, incluso hasta involucrar a Frege en sus tendencias constructivistas y, de paso, a arrojar luz sobre la relación misma entre objetos y proposiciones en la defensa del logicismo clásico (o "veritativo", como podríamos llamarlo): "si la existencia de los referentes de los términos matemáticos depende de la legítima provisión *previa* de determinadas condiciones de verdad para los enunciados que los contienen, la forma de estipular aquellas condiciones de verdad no puede sin circularidad presuponer a su vez que sabemos lo que son los objetos así referidos o lo que significa que un término arbitrario denote [*stand for*] uno de ellos" (1967a, p. 213). Es decir, no podríamos especificar tranquilamente las condiciones de verdad para los enunciados de un lenguaje dado, entendiendo por ello que cierto dominio de objetos nos es dado primeramente y que conocemos las condiciones bajo las cuales las variables denotan los objetos. Deberíamos ser capaces, primero, de saber qué procesos tienen lugar con objeto se asignar un término a un objeto particular del dominio, así como qué condiciones hacen posible que los enunciados que contengan ese término sean verdaderos o falsos.

Ello, si he entendido bien a Dummett, tendría como consecuencia que o bien adoptamos una estrategia plenamente constructivista, que garantice plenamente de qué estamos hablando, o bien aceptamos el escepticismo total sobre los objetos de nuestras teorías. Con ello la relatividad ontológica de Quine vendría a ser el Escila y el intuicionismo el Caribdis; lo que, en lo tocante a nuestra posibilidad de determinar estructuras in-

38 Hunter (1980a) cree poder mostrar, con desigual fortuna por cierto, que los argumentos de Dummett sobre los números no son convincentes.

teresantes, significaría el fracaso total. Y lo sería precisamente porque no podríamos saber qué determina qué: si los objetos a las estructuras o éstas a sus objetos. Con ello vendríamos a caer en el mismo problema que señalábamos más arriba: el de la vieja dificultad de saber si son los términos los que determinan sus relaciones o éstas a aquéllos. Lo que, como ya he señalado más de una vez, conecta de forma natural con el problema de la caracterización unívoca de las entidades.

Si dudamos incluso acerca de qué es un término (un objeto) y qué es una relación, entonces nos será difícil digerir, desde el punto de vista filosófico, el hecho de que todas las caracterizaciones conocidas de nociones como las de relación, propiedad, función, clase, e incluso proposición, sean relativas y a menudo interdefinibles.[39] Así, el problema de fondo del polimorfismo conjuntista (o cualquier otro) no es muy distinto de otros problemas similares: en realidad todos ellos parecen sugerir que nuestra caracterización de los objetos no es más que algo relativo a una teoría, así que las conclusiones quineanas relativistas y holistas no deben ser muy exageradas.[40] Yo no sé si eso ha de dar pie o no a un cierto escepticismo, que sin duda tendría un estrecho nexo con el relativismo que ya defendió Skolem, pero parece estar contribuyendo a ver la matemática bajo una luz dominada por la incertidumbre.[41]

[39] En mi 1991a, capítulo 3, he mostrado cómo Peano manejaba sin muchos problemas tales fenómenos relativistas. Para un sorprendente intento de mostrar que también las relaciones pueden reducirse a propiedades, siguiendo a Leibniz, véase Royse (1980a).

[40] El ejemplo del par ordenado es muy significativo desde el punto de vista de las muchas reducciones conjuntistas propuestas; véase Quine (1960a y 1966a), así como mi estudio citado en la nota 1, aunque según Dipert (1982a) ninguna de las reducciones propuestas parece satisfactoria desde el punto de vista de una teoría global de las relaciones.

[41] No por casualidad Benacerraf parece haber llevado su relativismo hasta posiciones escépticas en su 1985a. Sobre la "incertidumbre" de la matemática véase mi 1989a.

Desde este punto de vista me sorprende que, por lo que sé, los estructuralistas no concluyan viendo las estructuras, no sólo como el objeto de la matemática que al fin y al cabo es algo ya antiguo, sino como los objetos mismos de sus operaciones y sus transformaciones, como parece que se infiere de la teoría de las categorías.[42] Sin embargo, hay una propuesta concreta para una salida del estructuralismo en esa dirección, aunque formulada antes de la aparición del propio estructuralismo (al menos en su sentido actual). Así, entendiendo una categoría como compuesta de objetos, que serían conjuntos con una estructura en particular, y morfismos, que serían funciones que preservan la estructura, podríamos suscribir lo siguiente (Spojnikoff, 1969a):

> Una categoría, pues, unifica todas las manifestaciones de un tipo particular de estructura y aporta un formalismo conveniente para estudiar los patrones en esa estructura —y, desde luego, la estructura de ese patrón— mediante la investigación de los diversos ejemplos de objetos y morfismos dentro de la categoría. Este análisis constituye la teoría de esa estructura. Dentro de una categoría se investiga de nuevo acerca de aquellos patrones que pueden surgir como teoremas y técnicas que revelen características de la estructura. Siguiendo nuestra metodología, primero se trataría de descubrir los "ejemplos atómicos" de objetos y morfismos en la categoría: los ladrillos más simples y genéricos de los que la mayor (o una gran) parte de la categoría puede construirse mediante procesos convenientes de mezcla y vinculación. Este análisis de una categoría lleva a la formulación de "invariantes" que caractericen los átomos y al estudio de cómo los invariantes son afectados por el proceso de construcción. Así, de nuevo, se están buscando patrones que puedan exhibirse mediante los invariantes, y que permitan su determinación y análisis.

[42] También es sorprendente que los estructuralistas no parezcan tener interés en las posibilidades del estructuralismo de Sneed, Stegmüller y compañía. Máxime cuando uno de sus representantes ha tratado de ampliar su conocido enfoque a la misma aritmética: Balzer 1979a.

El problema de semejante estrategia estaría en que el estructuralismo, como filosofía de la matemática, desaparecería pasando a ser un nombre innecesario para el lenguaje, el de las categorías, ya establecido en matemáticas. Y desde el punto de vista funcionalista ello llevaría a plantear el problema directamente en términos de la propia teoría de categorías. Por lo que sé, no parece que esta teoría pueda presentarse, sin más, como un nuevo fundamento de la matemática, al menos no si es vista como algo completamente independiente de la teoría de conjuntos, a pesar de que sea lo suficientemente potente como para definir sus nociones básicas (Bell, 1981a). Quizá sea temprano para saberlo. En todo caso, incluso si la aceptáramos como nueva filosofía, también tendríamos que enfrentarnos a un nuevo relativismo, estrechamente emparentado con los de Quine y Skolem, pues la caracterización de un concepto matemático en términos de lenguaje de categorías puede determinarse sólo en relación con una categoría que sirva de contexto, la cual puede variar (Bell, 1986a, p. 411). Llegamos, así, a un relativismo final, que parece destinado a convertir la matemática en una especie de reinos de taifas, donde los conceptos sólo tengan valor local, algo ya muy lejano del ideal del absolutismo que reinó durante siglos. En semejante contexto el polimorfismo conjuntista tan destacado por Benacerraf no es más que un pequeño grano de arena perdido en una inmensa playa.

BIBLIOGRAFÍA

Aimonetto, I., 1969a, "Il concetto di numero naturale in Frege, Dedekind e Peano", *Filosofia*, no. 20, pp. 580–606.

Balzer, W., 1979a, "On the Status of Arithmetic", *Erkenntnis*, no. 14, pp. 57–85.

Benacerraf, P., 1965a, "What Numbers Could not Be", en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), 1983a, pp. 272–294.

——, 1973a, "Mathematical Truth", en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), 1983a, pp. 403–420.
——, 1985a, "Skolem and the Skeptic", *Proceedings of the Aristotelian Society. Supplementary Volume*, no. 59, pp. 85–115.
Benacerraf, P., y H. Putnam (comps.), 1983a, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press.
Bell, J. L., 1981a, "Category Theory and the Foundations of Mathematics", *British Journal of Philosophy of Science*, no. 32, pp. 349–358.
——, 1986a, "From Absolute to Local Mathematics", *Synthèse*, no. 69, pp. 409–426.
Bourbaki, N., 1948a, "L' architecture des mathématiques" en Le Lionnais, 1962a, pp. 35–47.
——, 1969a, *Elementos de historia de las matemáticas*, trad. cast. J. Hernández, Alianza, Madrid, 1972.
Cantor, C., 1895a, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. ing. P. E. Jourdain, Open Court, Chicago, 1915.
Cassirer, E., 1910a, *Substance et fonction*, trad. franc. P. Caussat, Minuit, París, 1977.
Couturat, L., 1896a, *De l'infini mathématique*, Alcan, París.
——, 1900a, "Sur une définition logique de nombre", *Revue de Métaphysique et de Morale*, no. 8, pp.23–36.
Chihara, C.S., 1973a, *Ontology and the Vicious Circle Principle*, Cornell University Press, Ithaca (N.Y.).
Cheng, C.-Y., 1968a, "On Explanation of Number Progression", *Notre Dame Jrn. Form. Log.*, no. 9, pp. 329–334.
——, 1970a, "Referential Involvements of Number Words", *Notre Dame Jrn. Form. Log.*, no. 11, pp. 487–496.
Dedekind, R., 1888a, "The Nature and Meaning of Numbers", en *Essays on the Theory of Numbers*, trad. ing. W.W. Berman, Dover, Nueva York, 1963.
Dieudonné, J., 1939a, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", en Le Lionnais, 1962a, pp. 543–555.
Dipert, R.R., 1982a, "Set-Theoretical Representations of Ordered Pairs and their Adequacy for the Logic of Relations", *Canadian Journal of Philosophy*, no. 12, pp. 353–374.
Dummett, M., 1963a, "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem", en M. Dummett, 1978a, pp. 186–201.

——, 1967a, "Platonism" en M. Dummett, 1978a, pp. 202–214.
——, 1978a, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres.
Feferman, S., 1985a, "Working Foundations", *Synthèse*, no. 62, pp. 229–254.
Field, H., 1974a, "Quine and the Correspondence Theory", *Philosophical Review*, no. 83, pp. 200–228.
——, 1984a, *Science without Numbers*, Princeton University Press, Princeton (N.J.).
Forrest, P., y D.M. Armstrong, 1987a, "The Nature of Number", *Philosophical Papers*, no. 16, pp. 165–186.
Frege, G., 1884a, *Fundamentos de la aritmética*, trad. cast. C.U. Moulines, Ariel, Barcelona, 1972.
Goddard, L., 1961a, "Counting", *Australasian Journal of Philosophy*, no. 39, pp. 223–240.
Goodman, N.D., 1984a, "The Knowing Mathematician", *Synthèse*, no. 60, pp. 21–38.
Hand, M., 1989a, "A Number is the Exponent of an Operation", *Synthèse*,no. 81, pp. 243–265.
Hale y P. Benacerraf, 1987a, *Abstract Objects*, Basil Blackwell, Oxford.
Hodes, H.T., 1984a, "Logicism and the Ontological Commitment of Arithmetic", *Journal of Philosophy*, no. 81, pp. 123–149.
Hunter, G., 1980a, "Dummett's Arguments about the Natural Numbers", *Proceedings of the Aristotelian Society*, no. 80, pp. 115–126.
Benacerraf, P. y P. E. Jourdain, 1910a, "Transfinite Numbers and the Principles of Mathematics", *Monist*, no. 20, pp. 93–118.
Kitcher, P., 1978a, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press.
Le Lionnais, F. (comp.), 1962a, *Les grands courants de la pensée mathématique*, Blanchard, París.
Levy, S.H., 1986a, "Peirce's Ordinal Conception of Number", *Transactions Ch. S. Peirce Soc.*, no. 22, pp. 23–42.
Maddy, P., 1981a, "Sets and Numbers", *Noûs*, no. 15, pp. 495–511.
——, 1989a, "The Roots of Contemporary Platonism", *Journal of Symbolic Logic*, no. 54, pp. 1121–1144.
Marchal, J.H., 1975a, "On the Concept of a System", *Philosophy of Science*, no. 42, pp. 448–468.
McGinn, M., 1984a, "Wright's Reply to Benacerraf", *Analysis*, no. 44, pp. 69–72.

Musgrave, A., 1977a, "Logicism Revisited", *British Journal of Philosophy of Science*, no. 28, pp. 99–127.
Parsons, C., 1965a, "Frege's Theory of Numbers", en Parsons, 1983a, pp. 150–175.
——, 1971a, "Ontology and Mathematics", en Parsons, 1983a, pp. 37–62.
——, 1983a, *Mathematics and Philosophy*, Cornell University Press, Ithaca (N.Y.).
Pollard, S., 1987a, "What is Abstraction?", *Noûs*, no. 21, pp. 233–240.
Putnam, H., 1967a, "La tesis de que las matemáticas son lógica", *Homenaje a Bertrand Russell*, trad. cast. C.U. Moulines, Oikos-Tau, Barcelona, 1968.
Quine, W.V., 1960a, *Palabra y objeto*, trad. cast. M. Sacristán, Ariel, Barcelona, 1968.
——, 1964a, "Ontological Reduction and the World of Numbers", en *The Ways of Paradox and other Essays*, Random House, Nueva York, 1966.
——, 1966a, "On Ordered Pairs and Relations", en *Selected Logic Papers*, Ramdom House, Nueva York, pp. 110–113.
——, 1969a, "Ontological Relativity", en *Ontological Relativity and other Essays*, Columbia, Nueva York.
Resnik, M.D., 1980a, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca (N.Y.).
——, 1981a, "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference", *Noûs*, no. 15, pp. 529–550.
——, 1988a, "Mathematics from Structural Point of View", *Rev. Intern. Phil.*, no. 42, pp. 400–424.
Robles, J.A., 1989a, "Berkeley y Benacerraf: matemáticas y estructura", inédito amablemente facilitado por el autor. (Este texto es el publicado por José A. Robles en este número de *Crítica*. N.E.)
Rodríguez Consuegra, F.A., 1987a, "El método en la filosofía de Bertrand Russell. Un estudio sobre los orígenes de la filosofía analítica a través de la obra de Russell, sus manuscritos inéditos y los autores que más le influenciaron", tesis doctoral, Universidad de Barcelona, X + 800 pp. (Copias en microficha disponibles sobre pedido.)
——, 1987b, "Russell's Logicist Definitions of Numbers 1899–1913: Chronology and Significance", *Hist. Phil. Log.*, no. 8, pp. 141–169.

——, 1988a, "Bertrand Russell 1898–1900: una filosofía de la matemática inédita", *Mathesis*, no. 4, pp. 3–76.
——, 1988b, "Elementos logicistas en la obra de Peano y su escuela", *Mathesis*, no. 4, pp. 221–299.
——, 1988c, "Bertrand Russell 1900–1913: los principios de la matemática, I", *Mathesis*, no. 4, pp. 355–392.
——, 1988d, "Bertrand Russell 1900–1913: los principios de la matemática, II", *Mathesis*, no. 4, pp. 489–521.
——, 1989a, "La pérdida de la certidumbre en la matemática y la ciencia contemporáneas", de próxima aparición en *Mathesis*.
——, 1990a, "El logicismo russelliano: su significado filosófico", *Crítica. Revista hispanoamericana de filosofía*, vol. XXIII, no. 67.
——, 1990b, "La primera filosofía de Moore", *Ágora*, en prensa.
——, 1990c, "Bertrand Russell and Bradley's Ghost: Evolution and Significance of Russell's Views Concerning Relations", enviado a *Synthèse*.
——, 1990d, "La interpretación russelliana de Leibniz y el atomismo metodológico de Moore", *Diánoia. Anuario de filosofía*, vol. XXX.
——, 1991a, *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development*, Bibliopolis, Nápoles, de próxima aparición.
——, 1992a, "Mathematical Logic and Logicism from Peano to Quine", en I. Grattan-Guinness (comp.), *Encyclopœdia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, Londres, de próxima aparición.
Rota, G.-C., D.H. Sharp y R. Sokolowski, 1988a, "Syntax, Semantics, and the Problem of the Identity of Mathematical Objects", *Philosophy of Science*, no. 55, pp. 376–386.
Routley, R., 1965a, "What Numbers Are", *Logique et Analyse*, no. 8, pp. 196–208.
Royse, J.R., 1980a, "Leibniz and the Reducibility of Relations to Properties", *Studia leibnitiana*, vol. XII, no. 2, pp. 178–204.
Russell, B., 1903a, *Los principios de la matemática*, trad. cast. J. Barrio, en *Obras Completas*, vol. II, Aguilar, Madrid, 1973.
Sapojnikoff, V. K., 1969a, "Structures in Mathematics", *Philosophia Mathematica*, no. 6, pp. 1–21.
Seidel, A., 1984a, "Numbers as Qualities", *Philosophica*, no. 14, pp. 99–110.

Shapiro, S., 1983a, "Mathematics and Reality", *Phil. Science*, no. 50, pp. 523–548.
——, 1989a, "Logic, Ontology, Mathematical Practice", *Synthèse*, no. 79, pp. 13–50.
Spinks, G., 1984a, "McGinn on Benacerraf", *Analysis*, no. 44, pp. 197–198.
Steiner, M., 1975a, *Mathematical Knowledge*, Cornell University Press, Ithaca (N.Y.).
Weiher, C., 1970a, "Three Notions of Number", *Philosophia Mathematica*, no. 7, pp. 26–56.
Weyl, H., 1949a, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton (N.J.).
Wright, C., 1983a, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.
——, 1988a, "Why Numbers Can Believably Be: a Reply to Hartry Field", *Rev. Intern. Phil.*, no. 42, pp. 425–473.
Zemach, E.M., 1985a, "Numbers", *Synthèse*, no. 64, pp. 225–239.

SUMMARY

Introduction. This paper is principally a critical exposition of the celebrated article by Benacerraf, indicating briefly its antecedents, emphasizing its accomplishments, problems and basic insufficiencies, followed by an evaluation of the main criticisms to which Benacerraf's article has been subjected, as well as a study of the historical framework in which a new global criticism is meaningful. The paper ends with the examination of a possible connection with the structuralist philosophy of mathematics, which is in part inspired by the work of Benacerraf.

Mathematical reduction according to Benacerraf (sections 2 and 3). It is here shown that the fundamental "objective" antecedents to Benacerraf's work are Quine, along with Parsons, and the nominalism of Goddard; and some important differences are also pointed out. Discussed is Benacerraf's rejection of the identification of numbers and objects, and its substitution by progressions in the framework of the typically Quinean argument of set polymorphism, as well as his difficult theory of identity, all of which without a clearly relativist ontological context. His reduction of numbers to positions in a progression is situated in the now old debate between the cardinal and the ordinal, and is a step in the direction of the nascent structuralism, although it lacks sufficient justification.

Some criticisms (sections 4 and 5). An evaluative study is made of the criticisms that seem to me most accurate, or the most revealing of underlying problems. Reviewed are the most relevant among such criticisms in the literature: Steiner, Resnik, Maddy, Wright, and Hale along with others of the enormous quantity of articles discussing this topic that have appeared over the last twenty years. Common lines are traced out, and some possible defenses of Benacerraf are indicated, although again the weaknesses of his position are pointed out, weaknesses stemming from its unresolved problems (the historical framework, the ill-defined ontology, the nascent structuralism, etc.).

Essential criticisms (section 6). Beginning with the problem of counting, the axis of Benacerraf's work, an historical excursion is presented, in which it is shown that the problem pointed out above (cardinal versus ordinal) can be seen as the center of the indicated difficulties. The theory of Dedekind-Peano is compared with that of Cantor, and the epistemological and constructive advantages of the

latter are noted. It is shown how positions very similar to Benacerraf's were already held by Cassirer and Weyl (without mentioning Berkeley!); meanwhile, the Cantorian approach of Couturat and Russell is shown to be superior, at least from the point of view of a global conception. Finally, the connection between constructions and polymorphism —a problem shared by logic, mathematics and physics— is pointed out.

The structuralist tendency and platonism (section 7). The antecedents of the structuralism of Resnik and Shapiro are traced to Benacerraf himself —and the historical trace is further extended back to the ordinalists, Bourbaki and Quine— in the hope of shedding light on the basic problem: the supposed antithesis between terms and relations (already familiar in Bradley and Russell). Further, I suggest and examine a parallelism with the relativism of mathematical entities such as this appears after the limitations of (at least first order) axiomatization. The paper ends making a connection of the subject with the theory of categories, which, surprisingly, still has not been considered by the structuralist, despite the fact that it is quite clearly a natural extension of the structuralist point of view.

[*Traducción de Raúl Orayen y Mark Rollins*]