ARTÍCULOS

CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXIII, No. 69 (diciembre 1991): 3–25

CONSIDERACIONES LÓGICO-EPISTÉMICAS RELATIVAS A UNA FORMA DE CONCEPTUALISMO RAMIFICADO

MAX A. FREUND
Departamento de Filosofía
Universidad Nacional
Departamento de Posgrado en Computación
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Introducción

En oposición al nominalismo y al realismo lógico, el conceptualismo postula conceptos como fundamento semántico de la predicación, esto es, de la aplicación correcta o incorrecta de predicados. Como toda teoría filosófica, el conceptualismo no es una teoría monolítica. Son posibles diferentes variantes, dependiendo, por ejemplo, de su concepción de lo que son los conceptos y de lo que se presupone con respecto a la formación de éstos.[1] Una gran mayoría de las versiones contemporáneas concibe a los conceptos como disposiciones de algún tipo. De éstas, dirigiremos nuestra atención al tipo de conceptualismo formulado y analizado en Cocchiarella (1986b): en el conceptualismo realista constructivo ramificado (CRCR). Esta versión interpreta a los conceptos como capacidades cognoscitivas o como estructuras cognoscitivas fundamentales sobre éstas, para clasificar, caracterizar, identificar y relacionar objetos. En

[1] *Cfr.* Cocchiarella, 1988c, para un resumen de las diferentes variantes.

este sentido, los conceptos no son objetos lógicos (esto es, propiedades y relaciones) como aquellos postulados por el realismo lógico. Tampoco son ideas o imágenes mentales en el sentido de sucesos o eventos mentales particulares.

Además de su concepción de la naturaleza de los conceptos, ha de agregarse la visión de CRCR de la forma que debe tomar la formación de éstos y su intepretación de lo que constituye la denotación de los predicados nominalizados (tales como "humanidad", "rojeidad" y "ser verde"). De acuerdo con CRCR, han de admitirse conceptos cuya formación obedece el principio de círculo vicioso de Russell-Poincaré (aplicado a los conceptos), es decir, aquellos cuya formación no involucra o presupone totalidades a las cuales ellos mismos pertenecen. Llamemos a éstos "conceptos predicativos" o "constructivos". Su construcción toma la forma de un proceso compuesto por una secuencia potencialmente enumerable de niveles: un conjunto de conceptos básicos o primitivos (esto es, aquellos cuya formación no presupone otros conceptos) es dado de alguna forma. A partir de éstos se inicia el proceso potencialmente denumerable. Los conceptos construidos en determinado nivel comprenden los construidos en niveles anteriores, la clausura de éstos bajo la operación (lógica) de cuantificación y la clausura de todos los conceptos en el mismo nivel bajo las operaciones booleanas. La transición de un nivel a otro es motivada por la conciencia de un desfase entre el conjunto de predicados y el subconjunto de éstos que verdaderamente representan conceptos. Esto es, la conciencia de que no todos los predicados representan conceptos motiva la transición a un nivel en el cual todos ellos sí representan. Sin embargo, en cada nivel siempre surge la posibilidad de cuantificar sobre los conceptos de este nivel y de expresar esto lingüísticamente, lo cual hace surgir nuevos predicados que no representan conceptos de ese nivel. Esto motiva de nuevo otra transición y así sucesivamente.

Es importante hacer notar que CRCR es compatible con formas de conceptualismo que admiten conceptos impredicativos, esto es, aquellos cuya construcción no obedece el principio del círculo vicioso, en tanto se asuma como base la formación predicativa. En Cocchiarella (1986, 1986b y 1988) y Freund (1989) se han descrito y analizado formas de conceptualismo que admiten conceptos impredicativos, cuya construcción presupone los predicativos de CRCR.

Como compromiso ontológico adicional de CRCR, se encuentra la tesis de que toda nominalización de un predicado, que representa un concepto predicativo, denota una entidad intensional. La denotación de tal nominalización es llamada el correlato del concepto (que el predicado representa). Esto debido a la conexión interna entre el concepto y esa entidad: el correlato corresponde a una reificación de las condiciones de verdad sobre las cuales un objeto cae bajo el concepto.[2]

La distinción entre conceptos predicativos e impredicativos sugiere distinguir el conocimiento expresable, solamente, en términos de conceptos predicativos de aquel que no lo es. El primer tipo de conocimiento fundamenta el operador epistémico "es cognoscible en forma constructiva que *p*" (donde *p* es una variable de enunciados). La idea de este operador ha sido sugerida por primera vez en Cocchiarella (1988b y 1989). Sin embargo, en estos artículos no se ha ahondado en la interpretación intuitiva ni se ha enunciado un sistema axiomático que formalice la lógica correspondiente a ese operador. En este artículo profundizamos en esa interpretación y, sobre esta base, formulamos un sistema lógico de segundo orden epistémico. Probamos también la consistencia relativa de este sistema y un corolario que se sigue de nuestros resultados en Freund (1989) y los de Cocchiarella (1986). Finalmente, mostramos posibles

[2] *Cfr.* Cocchiarella, 1988b, para detalles sobre los correlatos y su relación con los conceptos. Denominaremos los correlatos de conceptos predicativos "objetos constructivos".

limitaciones de la cognoscibilidad constructiva mediante la formulación de una aritmética intensional (cuya base lógica es el sistema construido en la primera parte) y un metateorema relativo a posibles extensiones de esa aritmética y el operador epistémico.

1. *Una interpretación del operador epistémico "es cognoscible en forma constructiva que p"*

Toda forma de cognoscibilidad incluye la idea de un cognosciente. De ahí que nuestra interpretación del operador epistémico se base en la caracterización de un cognosciente constructivo. Ésta nos guiará en la formulación del sistema formal que presentamos en este artículo. Esto es, la concepción del cognosciente constructivo será nuestro recurso heurístico en la construcción del sistema formal.

Antes de caracterizar al cognosciente constructivo, queremos enumerar aspectos de cognoscibilidad en general que asumiremos, sea ésta constructiva o no. Presupondremos el sentido clásico de conocimiento como creencia verdadera justificada. Sin embargo, no nos adscribiremos a criterio alguno de cuándo se tiene por justificada una creencia, tal como el del método de la confiabilidad, de la teoría de juegos, el probabilístico o el de la coherencia. De esta manera, el concepto de creencia justificada se mantendrá, hasta cierto punto, a nivel intuitivo. Asumiremos desde el comienzo, sin embargo, que la lógica clásica libre es la lógica presupuesta dentro de los medios para justificar un enunciado. De este modo, si E fuese un enunciado justificado y P una consecuencia deductiva de E con respecto a la lógica libre clásica, entonces P estaría justificado. El que hayamos escogido una lógica libre se debe a la idea, expresada en la introducción, de la posible existencia de predicados y términos singulares que no representan entidad alguna.

En un sentido obvio, es claro que cognoscibilidad de un enunciado verdadero E para cierto individuo B involucra modalidad. Esto es, cuando cognoscibilidad se interpreta como la posibilidad de llegar a justificar y creer que E, donde la expresión "llegar a justificar y creer que E" deberá ser entendida en el sentido de que existe un tiempo t tal que en t B justifica y cree que E. Sin embargo, no es claro cómo se ha de entender ese tipo de posibilidad. La forma en que aquí interpretamos esta noción está relacionada con las capacidades, limitaciones y evidencia que posee el cognosciente. De acuerdo con esta interpretación, el que un enunciado verdadero E sea cognoscible para B significará que la evidencia de la que B dispone (la cual llamaremos "la situación evidencial del cognosciente") es tal que el cognosciente puede llegar a justificar y creer que E, si suponemos que él posee ciertas capacidades y algunas de sus limitaciones se dejan de lado.

Las capacidades que adscribimos al cognosciente estarán determinadas por el contexto filosófico de CRCR. Relativo a este contexto, adscribiremos al cognosciente la capacidad de construir conceptos (como capacidades o estructuras cognoscitivas basadas en tales capacidades) a partir de otros conceptos, mediante las operaciones lógicas booleanas y procesos que involucran cuantificación sobre totalidades de conceptos. Esto es, el cognosciente posee mecanismos que le permiten formar conceptos a partir de otros conceptos ya sea por operaciones booleanas o mediante procesos que involucran referencia cuantificacional sobre una totalidad dada de conceptos. También, hemos de presuponer que él posee ciertos conceptos básicos o primitivos, esto es, aquellos cuya construcción no involucra otros conceptos. Estipularemos que es capaz de nominalizar predicados y reconocer que algunas de estas nominalizaciones denotan. Aquellas limitaciones relacionadas con factibilidad que se requieran para llegar a conocer algo (tales como tiempo, memoria, desarrollo tecnológico o complejidad, etc.) serán dejadas de lado. De este modo, cognoscibilidad estará directamente relacionada con la idea de un agente ideal.

Basados en las características que hemos adscrito a la cognoscibilidad en general, interpretaremos ahora la noción de cognoscibilidad constructiva. Esto es, además de otros rasgos, asignaremos al cognosciente constructivo todos aquellos que hemos asignado al cognosciente en general. Asumiremos, como aspecto particular del agente constructivo, el constante apego al principio del círculo vicioso de Russell-Poincaré, ya sea como un principio de formación de conceptos o como uno de introducción de correlatos de conceptos. De este modo, los conceptos que él pudiera formar no involucrarán en su formación totalidades a las cuales ellos pertenecen y, por otra parte, a conceptos por él construidos les asignará correlatos, como entidades reales. También supondremos que el cognosciente constructivo posee capacidades que le permiten pasar a un nuevo nivel $n + 1$ de formación de conceptos (proceso que involucra referencia cuantificacional sobre todos los conceptos de nivel n), toda vez que sea consciente de cualquier desfase entre predicados que verdaderamente representan conceptos del nivel n y el conjunto de expresiones de predicados. Finalmente, hemos de pensar que el cognosciente constructivo es capaz de reflexionar sobre el lenguaje. Esto le permitirá determinar, en cada nivel de formación de conceptos, aquellos predicados que no pueden representar conceptos de ese nivel, lo cual fundamenta, dentro del contexto de CRCR, la motivación del desarrollo enumerable de niveles de formación de conceptos predicativos.

Dada nuestra caracterización preliminar del cognosciente constructivo, diremos que un enunciado verdadero es cognoscible en forma constructiva con respecto a una situación evidencial sólo si el cognosciente constructivo puede llegar a creer y justificar la verdad del enunciado, una vez que no se toman en cuenta aspectos de factibilidad. Procedemos ahora a enunciar un sistema formal que rescata aspectos lógicos de esta interpretación.

2. *El sistema ERRC**

Describiremos primero la sintaxis lógica. Entenderemos por un lenguaje L un conjunto enumerable de constantes de individuos y de predicados. Presupondremos la disponibilidad de una cantidad denumerable de variables de individuos tanto como de variables de predicados de adicidad n (para todo número natural n). También usaremos "x", "y", "z" y "w", con o sin subíndices, para referirnos en el metalenguaje a variables de individuo y "F^n", "G^n" y "R^n" para referirnos a variables de predicados de adicidad n. A menudo omitiremos el supraíndice cuando, dentro del contexto, sea claro el grado de la variable de predicado o cuando no tenga importancia su adicidad. Por conveniencia, también usaremos "u" para referirnos a las variables en general. Como constantes lógicas primitivas tomaremos $\rightarrow, \neg, K, \lambda, =, \forall$ and $\forall^j$ (para todo entero positivo j). Las primeras tres constantes han de interpretarse, intuitiva y respectivamente, como la implicación, negación y el operador epistémico. Por otra parte, el operador lambda corresponde al operador de Church, el cual nos permitirá formar predicados complejos. El conjunto infinito de cuantificadores corresponden, intuitivamente, a cada uno de los niveles de formación de conceptos. Por ejemplo, $\forall^3 x$ y $\forall^4 F$ cuantificarían sobre los correlatos de los conceptos del tercer nivel y sobre los conceptos del cuarto nivel respectivamente.

Dado un lenguaje L, definimos recursivamente el conjunto de las expresiones significativas de tipo n de L (en símbolos, $ME_n(L)$) como sigue:

1. Toda variable o constante de individuo está en $ME_0(L)$. Toda variable o constante de predicado está en $ME_{n+1}(L)$ y $ME_0(L)$.

2. Si $a, b \in ME_0(L)$ entonces $(a = b) \in ME_1(L)$.

3. Si $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $a_1, \ldots, a_n \in ME_0(L)$, entonces $\pi(a_1, \ldots, a_n) \in ME_1(L)$.

4. Si $\delta \in ME_1(L)$ y $x_1, \ldots, x_n$ son variables de individuo distintas (una con respecto a la otra), entonces $[\lambda x_1 \ldots x_n \delta] \in ME_{n+1}(L)$.

5. Si $\delta \in ME_1(L)$, entonces $\neg\delta \in ME_1(L)$.

6. Si $\delta, \sigma \in ME_1(L)$, entonces $(\delta \rightarrow \sigma) \in ME_1(L)$.

7. Si $\delta \in ME_1(L)$, entonces $K\delta \in ME_1(L)$.

8. Si $\delta \in ME_1(L)$, x es una variable de individuo, F es una variable de predicado y j es un entero positivo, entonces $(\forall x)\delta$, $(\forall^j x)\delta$ y $(\forall^j F)\delta \in ME_1(L)$.

9. Si $\delta \in ME_1(L)$, entonces $[\lambda\delta] \in ME_0(L)$.

10. Si $n > 1$, entonces $ME_n(L) \subseteq ME_0(L)$.

Sea $ME(L) = \cup_{n\in\omega} ME_n$, esto es, el conjunto de expresiones significativas de L. Usaremos "δ", "μ", "σ", "π" y "α" para referirnos a las expresiones significativas de L.

Cada vez que $t \in ME_0(L)$, diremos que t es un término de L. Usaremos "a", "t" y "b", con o sin subíndices numéricos para referirnos a los términos en general. Por otra parte, para todo $n \in \omega$, entenderemos ME_{n+1} como el conjunto de predicados de adicidad n. Si $\sigma \in ME_1(L)$, entonces diremos que σ es una fbf de L. Nótese que por la cláusula 9, para $n > 1$, todo predicado de adicidad n puede ser transformado en un término. Para $n = 1$, solo fbfs con el operador lambda como prefijo (esto es, de la forma $[\lambda\sigma]$, donde σ es una fbf) son términos.

Ahora bien, donde $\delta, \mu \in ME(L)$, definimos "δ es una subexpresión de μ" ("subexp", para ser más breve) como sigue:

a) μ es una subexp de μ;

b) si δ es una subexp de μ y es de la forma $\pi(t_1, \ldots, t_n)$, donde $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $t_1, \ldots, t_n \in ME_0$, entonces "$\pi$" y "$t_1$",..., "$t_n$" son subexp de μ;

c) si δ es una subexp de μ y es de una de las formas $\sigma \rightarrow \alpha$, $\neg\sigma$, $[\lambda x_1 \ldots x_n\sigma]$, $(\forall x)\alpha$ o $(\forall^j u)\alpha$, entonces σ, α son subexp de μ.

Una aparición de una variable de individuo x en una expresión δ se dice que es una aparición ligada si es una aparición en una subexp de δ de la forma $(\forall x)\sigma$, $(\forall^j x)\sigma$ o $[\lambda y_1 \ldots y_n\sigma]$, donde $x = y_1$, para alguna y_1; de otro modo diremos que es una aparición libre. Una aparición de una variable de predicado F en una expresión δ se dice que es una aparición ligada si es una aparición en una subexp de δ de la forma $(\forall^j F)\sigma$; de otro modo diremos que es una aparición libre. Una aparición de un término t en una expresión δ es ligada si alguna aparición de una variable en t es libre en t pero ligada en δ. Los términos libres y ligados de una expresión son los términos que tienen apariciones libres o ligadas en esa expresión.

Donde "t" y "a" son términos, entenderemos por $\delta(t/a)$ la expresión que resulta de reemplazar cada aparición libre de "a" por una aparición libre de "t", si tal expresión existe, en cuyo caso diremos que t está libre para a en δ; si tal expresión no existe, entonces $\delta(t/a)$ será δ misma. Diremos que una aparición de γ en δ es epistémica si y sólo si aparece en una subexp σ de δ de la forma $K\theta$ (donde $\theta \in ME_1(L)$). De otro modo, diremos que es una aparición no epistémica. Si "K" no aparece en σ del todo, diremos que σ no es epistémica. Una fbf σ es básica cuando es de la forma $\pi t_1 \ldots t_n$, donde $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $t_i \ldots t_n \in ME_0(L)$.

Antes de describir el sistema formal, queremos justificar brevemente la introducción de algunos de los axiomas que involucran el operador epistémico. Téngase en cuenta que esta justificación se da relativa a lenguajes formales del tipo descrito anteriormente. Iniciamos con el supuesto, expresado en el apartado anterior, de que no se han de incluir aspectos de factibilidad en lo referente a cognoscibilidad y, en particular, a cognoscibilidad constructiva. Esto permite visualizar al cognosciente constructivo como un agente ideal capaz de conocer cualquier posible concepto predicativo de un nivel dado, así como de determinar si un predicado representa un concepto predicativo de ese nivel: por cada nivel j y posible predicado P *predicativo relativo a* j (esto es, en P las variables no estarían ligadas por cuantificadores de niveles superiores a j), el cognosciente constructivo siempre podría formar (ya que no estaría restringido por el tiempo) un concepto que P representaría. Este concepto gobernaría el uso de P, esto es, de sus posibles aplicaciones. A la vez, mediante el mismo proceso que asigna conceptos a los predicados, el agente constructivo llegaría a conocer cualquier concepto predicativo: la asignación es a la vez el proceso de formación del concepto. Debemos recordar, por otra parte, que el cognosciente constructivo asigna correlatos sólo a nominalizaciones de predicados que representan conceptos predicativos. De este modo, cada uno de los objetos constructivos puede ser conocido por ese agente constructivo ideal como la denotación de un predicado nominalizado que representa un concepto predicativo. Por lo tanto, él también será capaz de determinar cuáles nominalizaciones denotan objetos constructivos. Con base en las anteriores intuiciones debe ser clara la justificación de los siguientes principios:

$$(\forall^j F)((t = F) \rightarrow K(t = F))(\text{ donde } F \text{ no es libre en } t),$$
$$(\forall^j x)((t = x) \rightarrow K(t = x))(\text{ donde } x \text{ no es libre en } t),$$

así como el siguiente principio de comprensión:

$$(\forall^j y_1)\ldots(\forall^j y_n)(\forall^j G_1)\ldots(\forall^j G_r)(\exists^j F)K(G = [\lambda x_1 \ldots x_n \sigma]),$$

donde $\sigma, y_1, \ldots, y_n, G_1, \ldots, G_n$ cumplen condiciones enumeradas más adelante.

Recordemos que entre los supuestos relativos al agente constructivo se encuentra su capacidad reflexiva sobre el lenguaje. A esta capacidad asignamos la capacidad de determinar, en cada nivel j de formación de conceptos, cuáles predicados no representan conceptos de ese nivel. Éstos serían aquellos predicados que suponen cuantificación sobre conceptos de niveles superiores a j. Estas ideas fundamentan los siguientes principios:

$(\forall^j F)((a \neq F) \rightarrow K(a \neq F))$ (donde F no es libre en t),

$(\forall^j x)((a \neq x) \rightarrow K(a \neq x))$ (donde x no es libre en t),

$\neg(\exists^j F)(t = F) \rightarrow K(\neg(\exists^j F)(t = F))$ (donde F no es libre en t),

$\neg(\exists^j x)((t = x) \rightarrow K\neg(\exists^j x)((t = x))$ (donde x no es libre en t).

Aparte de los principios anteriores, incluiremos como axiomas también los siguientes:

$K\sigma \rightarrow \sigma$,

$K(\sigma \rightarrow \delta) \rightarrow (K\sigma \rightarrow K\delta)$,

$K(\forall^j u)\sigma \rightarrow (\forall^j u)K\sigma$ y

$K\sigma \rightarrow KK\sigma$.

La validez del primer principio es sólo una consecuencia del concepto de cognoscibilidad: sólo enunciados verdaderos son cognoscibles en forma constructiva. El segundo principio se justifica por lo que hemos asumido que ha de ser la lógica empleada (pues ésta incluye la regla del *modus ponens*). También por esta lógica, el primer principio y las intuiciones descritas en el párrafo anterior, es fácil ver que el tercer principio ha de ser válido. Con respecto al último principio, éste corresponde a un nuevo y último supuesto que queremos introducir: queremos suponer que el cognosciente constructivo es capaz, por reflexión, de llegar a conocer todos los principios anteriormente mencionados, asimismo de llegar a conocer que él conoce todo enunciado conocido por él.

Procedemos ahora a describir el sistema ERRC* (en donde $\sigma\mu$ son fbf y u es una variable de individuo o de predicado):

Axiomas:

(A1) Todas las fbf son tautológicas

(A2) $(\forall x)(\mu \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\forall x)\mu \rightarrow (\forall x)\sigma)$

(A3) $(\forall^j u)(\mu \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\forall^j u)\mu \rightarrow (\forall^j u)\sigma)$

(A4) $\sigma \rightarrow (\forall x)\sigma$, donde x no aparece libre en σ

(A5) $\sigma \rightarrow (\forall^j u)\sigma$, donde u no aparece libre en σ

(A6) $(\forall^j u)\sigma \rightarrow (\forall^i u)\sigma, i \leq j$,

(A7) $a = a$

(A8) $(\forall x)(\exists y) x = y$,

(A9) $(\forall^j x)(\exists^j y) x = y$,

(A10) $(\forall^j F)(\exists^j y) y = F$,

$(Id^*)[\lambda x_1 \ldots x_n R(x_1, \ldots, x_n)] = R$, donde R es una variable o constante de predicado,

$(\exists/\lambda - CONV)\, [\lambda x_1 \ldots x_n \sigma]\, (a_1 \ldots a_n) \leftrightarrow (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)$ $(x_1 = a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = a_n \,\&\, \sigma)$, en el supuesto de que x_i no es libre en cualquier a_j, $(O < i,j \leq n)$

$(Rw)[\lambda x_1 \ldots x_n \sigma] = [\lambda y_1 \ldots y_n \sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n)]$, donde ninguna y_i aparece en σ

(K-A11) $(\forall^j y)(\exists x) K(x = y)$

(A12) $(\forall^j u)((a = u) \rightarrow K(a = u))$, en el supuesto de que u no es libre en a

(A13) $(\forall^j u)((a \neq u) \rightarrow K(a \neq u))$, en el supuesto de que u no es libre en a

(A14) $\neg(\exists^j u)(a = x) \rightarrow K(\neg(\exists^j u)(a = u))$, en el supuesto de que u no es libre en a

(A16) $K(\forall^j u)\beta \rightarrow (\forall^j u)K\beta$

(A17) $K\beta \rightarrow \beta$

(A18) $K(\beta \rightarrow \sigma) \rightarrow (K\beta \rightarrow K\sigma)$

(A19) $K\beta \rightarrow KK\beta$

$(LL_b)a = b \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \mu)$, donde σ es básica y μ viene de σ mediante la sustitución de una o más apariciones libres y no epistémicas de a por apariciones libres de b.

$(LL_\lambda)K(a = b) \rightarrow [\lambda x_1 \ldots x_n\mu] = [\lambda x_1 \ldots x_n\sigma]$, donde $\sigma \in ME_1, \mu$ proviene de σ mediante la sustitución de una o más apariciones libres de a por apariciones libres de b

(KRRC!*) $(\forall^j y_1) \ldots (\forall^j y_n)(\forall^j F_1) \ldots (\forall^j F_n)(\exists^j G)K(G = [\lambda x_1 \ldots x_n\sigma])$, donde: 1) σ es una fbf en la cual no hay constantes y no aparece signo de identidad alguno; 2) G es una variable de predicado de adicidad n que no es libre en σ; 3) para todo $k \geq j$, "$(\forall^k)$" no aparece en σ; y 4) $F_1, \ldots, F_r$ son todas las variables de predicados distintas (una con respecto a la otra) que aparecen libres en σ y $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$ son todas las variables de individuo distintas (una con respecto a la otra) que aparecen libres en σ.

Reglas:

Modus ponens (MP): si σ y $\sigma \rightarrow \delta$, entonces δ.

Generalización universal (UG): si σ, entonces $(\forall x)\sigma$ y $(\forall^j u)\sigma$.

La justificación de los axiomas A6 y A10 se da con base en el contexto filosófico de CRCR (*cfr.* Cocchiarella, 1986b para detalles sobre cómo se da tal justificación). Los axiomas Id^*, (Rw) y $(\exists/_\lambda - CONV)$ corresponden a condiciones estándar del cálculo lambda.

Definimos un teorema σ de ERRC* ($\vdash \sigma$, en símbolos) como la última forma de una secuencia de fbf cada una de las cuales es o bien un axioma de ERRC* o se sigue de miembros anteriores en la secuencia mediante MP, RN o UG.

Procedemos ahora a demostrar varios teoremas. Sin embargo, por razones de espacio, enumeraremos solamente los axiomas, teoremas o reglas necesarias para su demostración.

3. *Teoremas*

Nótese que no hemos asumido como esquema de axioma la ley de Leibniz de sustitución de idénticos. La ley no puede ser justificada dentro del contexto epistemológico de CRCR, ya que tendría, entre otras, la indeseable consecuencia "$a = b \rightarrow K(a = b)$". Más bien, hemos asumido como axiomas dos casos de esta ley: LL_b y LL. Éstos son suficientes, dentro del contexto de ERRC*, para probar las siguientes dos formas más restringidas de la ley de Leibniz:

T1. $\vdash K(a = b) \rightarrow (\delta \leftrightarrow \mu)$, donde μ proviene de δ mediante el reemplazo de una o más apariciones libres de a por apariciones libres de b.

(Demostración: por inducción sobre las subfórmulas bien formadas σ de δ. Cuando σ es básica se prueba por (LL_b), A17, (LL_λ) y lógica proposicional básica. Los casos en que σ es $K\beta, (\forall x)\beta, (\forall^j u)\beta, \neg\beta, [\lambda\gamma]$ o $(\beta \rightarrow \gamma)$ (para algunas $\gamma, \beta \in ME_1$), se demuestra a partir de la hipótesis de inducción y las siguientes reglas o axiomas (en los casos en que sean aplicables): RN, A18, A19, $(\exists/_\lambda - CONV)$, UG, A2, A4, A3, A5 y lógica proposicional básica.)

T2. $\vdash (a = b) \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \mu)$, donde σ no es epistémica y μ proviene de σ mediante el reemplazo de una o más apariciones libres de a por apariciones libres de b.

(Demostración: por inducción sobre las subfórmulas bien formadas de σ.)

En otros términos, la sustitución de idénticos se permite generalmente dentro de contextos no epistémicos; dentro de contextos epistémicos, sólo si garantizamos el conocimiento constructivo de la identidad en cuestión.

Debido a que se tiene conocimiento constructivo de conceptos predicativos y sus correlatos, es posible sustituir idénticos dentro de cualquier contexto:

T3. $\vdash (\forall^j u)((u = b) \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \mu))$, donde μ proviene de σ mediante el reemplazo de una o más apariciones libres de u por apariciones libres de b y u no es libre en b.

(Demostración: por T1, UG, A3, A12 y lógica proposicional básica.)

Varios principios de ejemplificación universal (en forma cualificada) son derivables:

T4. $\vdash (\exists^j u)(u = b) \rightarrow ((\forall^j u)\sigma \rightarrow \sigma(b/u))$, en el supuesto de que b es libre para u en σ y u no es libre en b.

(Demostración: por T3, A2, A3, A5, UG, definiciones y lógica proposicional básica.)

T5. $\vdash (\exists x)(x = b) \rightarrow ((\forall x)\sigma \rightarrow \sigma(b/u))$, donde σ no es epistémica, b es libre para x en σ y x no es libre en b.

(Demostración: por T2, UG, A2, A4, definiciones y lógica proposicional básica.)

T6. $\vdash (\exists x)K(x = b) \rightarrow ((\forall x)\sigma \rightarrow \sigma(b/x))$, en el supuesto de que x no es libre en b y b es libre para x en σ.

(Demostración: por T1, A2, A4, definiciones y lógica proposicional básica.)

La naturaleza acumulativa de los conceptos predicativos se expresa en el siguiente teorema:

T7. $\vdash (\forall^j F)(\exists^j G)(F = G)$

(Demostración: por A17, A3, UG, K-RRC*, T3, A5, Id^* y lógica proposicional básica.)

Por otra parte, los axiomas RRCP!* y A8* del sistema RRC* formulado en Cocchiarella (1986b) son teoremas de ERRC*:

T8. $\vdash (\forall^j y_1)\ldots(\forall^j y_n)(\forall^j F_1)\ldots(\forall^j F_n)(\exists^j G)(G = [\lambda x_1 \ldots x_n \sigma])$, donde σ es como en K-RRC*.

(Demostración: por A17, UG, A3, definiciones, K-RRC!* y lógica proposicional elemental.)

T9. $\vdash (\forall^j y)(\exists x)(x = y)$

(Demostración: análoga a la de T8.)

Se pueden demostrar varios principios (cualificados) de generalización existencial:

EG/j. $\vdash (\exists^j u)(u = b) \rightarrow (\sigma(b/u) \rightarrow (\exists^j u)\sigma)$, en el supuesto de que u no es libre en b y b es libre para u en σ.

(Demostración: por T4 y lógica proposicional elemental.)

EG. $\vdash (\exists x)(x = b) \rightarrow (\sigma(b/x) \rightarrow (\exists x)\sigma)$, en el supuesto de que σ no es epistémica, x no es libre en b y b es libre para x en σ.

(Demostración: por T5 y lógica proposicional.)

K-EG. $\vdash (\exists x)K(x = b) \rightarrow (\sigma(b/x) \rightarrow (\exists x)\sigma)$, en el supuesto de que x no es libre en b y b es libre para x en σ.

(Demostración: por T5 y lógica proposicional básica.)

4. *Metateoremas*

Las reglas de ejemplificación existencial son derivables dentro del sistema:

EI/j. Si $\vdash ((\exists^j u)(u = a) \,\&\, \beta(a/u)) \rightarrow \gamma$, entonces $\vdash (\exists^j u)\beta \rightarrow \gamma$; donde "$a$" no es libre en γ y es una variable del mismo tipo que u pero diferente de u.

(Demostración: por UG, A3, A9 o T7 y lógica proposicional básica.)

EI. Si $\vdash ((\exists x)(x = y) \,\&\, \beta(y/x)) \rightarrow \gamma$, entonces $\vdash (\exists x)\beta \rightarrow \gamma$, donde "$y$" no es libre en γ.

(Demostración: similar a la de EI/j, pero úsese en este caso A2, T8 en lugar de A3, A9, T7.)

Definición: $\Gamma \vdash_{ERRC^*} \sigma$ si y sólo si hay fbfs $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Gamma$ tales que $\vdash_{ERRC^*} \delta_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \delta_n \rightarrow \sigma$.

Dada esta definición, obtenemos los siguientes metateoremas interesantes:

(I) $\Gamma \vdash_{ERRC^*} \sigma$ si sólo y si $\Gamma \vdash_{ERRC^*} K\sigma$, en el supuesto de que toda fbf $\sigma \in \Gamma$ es de la forma $K\gamma$.

(Demostración: de derecha a izquierda por A17; de izquierda a derecha por RN, A18 y A19.)

(II) Si $\Gamma \vdash_{ERRC^*} K(\sigma \rightarrow \delta)$, entonces $\Gamma \cup \{K\sigma\} \vdash_{ERRC^*} \delta$.

(Demostración: por A17, A18 y lógica proposicional básica.)

(III) Si $\Gamma \cup \{K\sigma\} \vdash_{ERRC^*} \delta$, entonces $\Gamma \vdash_{ERRC^*} K(K\sigma \rightarrow \delta)$, en el supuesto de que toda fbf $\sigma \in \Gamma$ es de la forma $K\gamma$.

(Demostración: por RN, A18, A19 y lógica proposicional básica.)

5. *Consistencia*

Considérese ahora el sistema RRC* expuesto en Cocchiarella (1986b). La consistencia de ERRC* está claramente relacionada con la de este sistema:

RRC* es equiconsistente con ERRC*

Demostración: si RRC* es consistente, entonces ERRC* también lo es: reemplácese "K" por "$\neg\neg$" en cualquier fbf de ERRC*. Se puede ver, en forma muy clara, que el resultado de efectuar tal reemplazo en cualquier teorema de ERRC* es un teorema de RRC*.

Si ERRC* es consistente, RRC* también lo es: en vista de T4, T14 y T15 y de los axiomas de ERRC*, es obvio que RRC*

es un subsistema de ERRC*; esto es: para todo β no epistémico, si $\vdash_{RRC^*}\beta$, entonces $\vdash_{ERRC^*}\beta$.
Q.E.D.

En Freund (1989) hemos mostrado la consistencia de RRC* relativa al sistema $T^* + Ext$ (descrito en Cocchiarella, 1986). Por lo tanto,

Corolario: Si $T^* + Ext$ es consistente, entonces ERRC* es consistente.

6. *Posibles limitaciones a la cognoscibilidad constructiva*

La posibilidad de que el cognosciente constructivo posea conceptos cuyos correlatos correspondan a entidades aritméticas, tales como los números y las funciones recursivas vistas en un sentido intensional, abre una perspectiva interesante en cuanto a posibles limitaciones de la cognoscibilidad constructiva. En Freund (1989) hemos logrado definir varios conceptos básicos que permiten construir otros conceptos cuyos correlatos serían las entidades aritméticas mencionadas. En el presente artículo asumimos una perspectiva diferente: presuponemos que ciertos conceptos son dados primitivamente de tal manera que puedan generar en el primer nivel de formación de conceptos todas las funciones recursivas.

En forma más precisa, asumimos que el cognosciente constructivo posee entre sus conceptos primitivos conceptos cuyos correlatos corresponderían al cero, las funciones de sucesor, suma y multiplicación. El cognosciente podría llegar a conocer varias de las propiedades relacionadas con esos conceptos (tales como los axiomas de Peano).

Expresaremos la idea anterior, formalmente, de la siguiente manera: considérense lenguajes que incluyen como constantes de predicados "N", "S", "$Mult$", "Sum" (predicados que corresponden intuitivamente a los conceptos de número natural, sucesor, multiplicación y suma) y como constantes de individuo a 0. Dado este tipo de lenguajes, formulamos el siguiente sistema de aritmética intensional epistémica (AIE):

(I) Los axiomas de ERRC*

(II) 1. $(N(x) \rightarrow (\exists^1 y)(y = x)$

2. $(S(z,x) \,\&\, N(x)) \rightarrow N(z)$

3. $(N(x) \,\&\, N(k)) \rightarrow ((S(y,x) \,\&\, S(z,k)) \rightarrow (y = z \rightarrow x = k))$

4. $(N(x) \rightarrow (S(y,x) \rightarrow 0 \neq y))$

5. $(N(x) \,\&\, 0 \neq x) \rightarrow (\exists y)(S(x,y))$

6. $(Sum(x,y,0) \leftrightarrow x = y)$

7. $(Sum(x,y,z) \,\&\, S(z,k)) \leftrightarrow (\exists w)(S(x,w) \,\&\, Sum(w,y,k))$

8. $Mult(x,y,0) \leftrightarrow (x = 0)$

9. $Mult(x,y,k) \,\&\, S(k,z) \leftrightarrow (\exists w)(Sum(x,y,w) \,\&\, Mult(w,y,z))$

10. $Sum(x,y,z) \rightarrow N(x)$

11. $Mult(x,y,z) \rightarrow N(x)$

12. $N(0)$

Reglas: MP, UG y RN.

Es claro que los axiomas 3-9 de II son versiones de la aritmética de Robinson. Éstos (junto con los teoremas de ERRC* y los axiomas 1, 2, 10, 11 y 12 de II) permiten ver, claramente, que es posible mostrar (mediante procedimientos ampliamente conocidos) que toda función recursiva es representable en AIE, asimismo como en cualquier extensión de ésta. Esto es, si T es una extensión normal de AIE, entonces:

Si $f(n_0, \ldots, n_m) = 1$, entonces existe un fbf σ tal que $\vdash (\forall y)(\sigma(r_0 \ldots r_m, y) \leftrightarrow y = k)$, donde $r_0, \ldots, r_n, k$ son los numerales en AIE correspondientes a los números $n_0, \ldots, n_m, 1$.

Asumimos una gödelización determinada de la aritmética. Si σ es una fbf de AIE, entonces $\sigma\#$ denotará su número de Gödel. Dado que todas las funciones recursivas son representables en

T, entonces (por procedimientos también de sobra conocidos) se puede mostrar que si σ es una fbf con exactamente una variable libre x, entonces existe una fbf μ tal que $\vdash_T \mu \leftrightarrow \sigma(\mu\#)$. Como T es una extensión normal de AIE, entonces, por RN: $\vdash_T K(\mu \leftrightarrow \sigma(\mu\#))$.

Con base en el resultado anterior, podemos demostrar el siguiente metateorema:

Si T es una extensión normal de AIE y σ es una fbf con una única variable libre x, tal que para cualquier fbf γ: o bien (i) $\vdash_T K(\sigma(\mu\# \rightarrow \mu))$ o (ii) $\vdash_T K(\sigma(\mu\#) \rightarrow K\mu)$, entonces hay una fbf β tal que $\vdash_T K\mu \,\&\, K\neg\sigma(\mu\#)$.

Demostración: Asúmanse los supuestos. Entonces como σ es una fbf con una variable libre, existe una fbf μ tal que

(1) $\vdash_T K(\mu \leftrightarrow \neg\sigma(\mu\#))$. Por otra parte, si (i), entonces

(2) $\vdash_T K(\sigma(\mu\#) \rightarrow \mu)$. Luego, por RN, A18 y lógica proposicional básica:

(3) $\vdash_T K(\sigma(\mu\#) \rightarrow \mu) \rightarrow K(\mu \leftrightarrow \neg\sigma(\mu\#)) \rightarrow K\mu$. Por lo tanto, por (1), (2) y (3), $\vdash_T K\mu$. De esto, por A18 y (1), $\vdash_T K\neg\sigma(\mu\#)$.

El metateorema demostrado puede ser interpretado como una versión del teorema de Gödel con relación a la cognoscibilidad constructiva:[3] si una teoría T demuestra que existe cognoscibilidad constructiva de la consistencia de cierto sistema S (esto es, cuando T cumple las condiciones (i) o (ii)), entonces T debe demostrar también que es cognoscible en forma constructiva que S es incompleto con respecto al conjunto de enunciados cognoscibles en forma constructiva (esto es, T debe probar de algún enunciado β, cognoscible en forma construc-

[3] Es importante subrayar que en Reinhardt se ha demostrado un metateorema, análogo a éste, relativo a una aritmética intensional epistémica con un contexto filosófico totalmente diferente al nuestro: el operador epistémico usado y la lógica subyacente son totalmente diferentes a la nuestra.

tiva, que es cognoscible en forma constructiva su no demostrabilidad en S).

3. *Consideraciones finales*

Basados en nuestra interpretación, hemos construido un sistema axiomático que formaliza aspectos lógicos del operador epistémico. Relacionados con este sistema, hay dos problemas, entre otros, que sería importante considerar y que dejaremos planteados aquí como problemas abiertos. El primero se refiere a la posibilidad de construir una semántica formal que proporcione una noción de validez tal que sea posible probar un teorema de completitud en relación con ERRC* o extensiones normales de éste. Pensamos, particularmente, en una semántica de segundo orden no-estándar del tipo que hemos desarrollado en Freund (1989). El segundo problema plantea la posibilidad de demostrar las siguientes tesis con respecto a AIE:

Si $\vdash_{AIE} K(\sigma \vee \gamma)$, entonces $\vdash_{AIE} K\sigma \vee K\gamma$.
Si $\vdash_{AIE} (\exists x)K\gamma$, entonces existe un término t tal que $\vdash_{AIE} (\exists x)(x = t \,\&\, K\gamma(t/x))$.

Demostrar estos metateoremas (conocidos como las propiedades de existencia y disyunción) establecería interesantes paralelismos de la cognoscibilidad constructiva con respecto a otras formas de constructivismo (tales como el intuicionismo), cuyas formalizaciones cumplen con esas propiedades.[4]

[4] *Cfr*. Shapiro, 1985 para detalles de cómo esas propiedades las cumplen diversos sistemas formales relacionados de alguna manera con el constructivismo.

BIBLIOGRAFÍA

Cocchiarella, Nino B., 1986, *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals*, Bibliopolis Press, Nápoles.

——, 1986b, "Conceptualism, Ramified Logic and Nominalized Predicates", *Topoi*, no. 5, pp. 75–87.

——, 1988, "Philosophical Perspectives on Formal Theory of Predication", en D. Gabbay y F. Guenthner (comps.), *Handbook of Philosophical Logic*, Reidel, Dordrecht.

——, 1988b, "Conceptualism, Realism and Intensional Logic", *Topoi*, pp. 75–87.

——, 1989, "Quine on Classes, Set Theory, and Higher-Order Logic: A Critique", ms.

——, 1988c, "Conceptualism", en *Handbook of Metaphysics and Ontology*, en prensa.

Freund, Max, 1989, tesis doctoral, Universidad de Indiana en Bloomington.

Reinhardt, W., 1986, "Epistemic Theories", *Journal of Philosophical Logic*, pp. 427–474.

Shapiro, S. (comp.), 1985, *Intensional Mathematics*, North Holland.

Recibido: 5 de diciembre de 1990.

SUMMARY

An intuitive interpretation of constructive knowability is first developed. Then, an epistemic second order logical system (which formalizes logical aspects of the interpretation) is constructed. A proof of the relative consistency of such a system is offered. Next, a formal system of intensional arithmetic (whose logical basis is the aforementioned second order system) is stated. It is proved that such a formal system of intensional arithmetic entails a theorem, whose content would show possible limitations to constructive knowability.