CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXXI, No. 93 (diciembre 1999): 117–124

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

José Alfredo Amor Montaño, *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completud*, 1a. ed., Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.

> La formalidad rigurosa de la sintaxis sólo tiene sentido cuando detrás de ella se encuentra la riqueza creativa de la semántica (p. vii).

1. *Introducción**

Los Teoremas de Correctud y de Completud son considerados los resultados fundamentales de la lógica de primer orden, pues establecen la equivalencia entre la noción de derivabilidad formal ($\vdash$) y la de consecuencia lógica ($\models$), esto es, entre la sintaxis y la semántica de un lenguaje formal. En sus versiones originales, estos teoremas establecen que toda fórmula que es teorema es universalmente válida (correctud: "Si $\vdash\alpha$ entonces $\models\alpha$") y que toda fórmula universalmente válida es teorema (completud: "Si $\models\alpha$ entonces $\vdash\alpha$"). Mientras que la correctud era un resultado ya conocido en los años veinte, Kurt Gödel ofrece la prueba de completud hasta 1930 en su tesis de doctorado.[1] Como corolario del Teorema de Completud, Gödel prueba otro resultado, a

* Agradezco a José Alfredo Amor y a un dictaminador anónimo sus valiosos comentarios a esta reseña.

[1] Gödel prueba una formulación equivalente, a saber: "Cada fórmula de la lógica de primer orden es o refutable o satisfacible" (una fórmula F es refutable si y sólo si $\neg F$ es deducible). Además, Gödel generaliza este resultado a conjuntos infinitos numerables de fórmulas. *Cfr.*, K. Gödel, *Obras completas*, trad. de Mosterín, Alianza Editorial, España, 1981.

saber, el Teorema de Compacidad, el cual establece lo siguiente: "Para que un conjunto infinito numerable de fórmulas sea satisfacible es necesario y suficiente que cada subconjunto finito suyo sea satisfacible."

Como es usual en el quehacer matemático, resulta atractivo tanto reformular teoremas como generalizarlos y demostrarlos de manera distinta, y el Teorema de Completud no es la excepción en este sentido. Leon Henkin, matemático todavía activo, ofrece en 1949 una versión de este teorema extendido a consecuencias lógicas y deducciones formales (Si $\Sigma \models \alpha$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$) y prueba una formulación equivalente donde relaciona las nociones de consistencia y satisfacibilidad, a saber: "Si S es un conjunto consistente, entonces S es satisfacible" y da una prueba semántica constructiva que en sí misma sentó las bases de la teoría de modelos como la conocemos hoy en día.

La formulación de Henkin es más general que la original de Gödel y tiene la ventaja de que puede extenderse a lenguajes de cualquier cardinalidad e incluso de orden superior. Además, su prueba es más accesible. En este nuevo contexto, el Teorema de Compacidad se reformula como sigue: "Si un conjunto S es finitamente satisfacible (todo subconjunto finito de S es satisfacible), entonces S es satisfacible." Este teorema puede igualmente probarse como corolario del Teorema de Completud Extendido, pero lo novedoso de esta reformulación es que Compacidad puede también probarse sin hacer uso de Completud y más aún, las pruebas de estos dos teoremas resultan ser del mismo estilo.

La demostración semántica del Teorema de Compacidad hace que se independice, por decirlo de alguna forma, del Teorema de Completud y así goce de un *status* superior al de corolario. Sin embargo, a pesar de que hay varias presentaciones, aplicaciones y pruebas del Teorema de Compacidad, cuestión que nos muestra detalladamente el autor del libro que hoy nos ocupa, es difícil encontrarlo en otros libros de lógica como un teorema fundamental a la par con el de Completud.

Para José Alfredo Amor, el Teorema de Compacidad "*puede considerarse, desde el punto de vista semántico, el teorema fundamental de la lógica matemática*" (p. iii). De hecho, la contribución más original de este libro es que en él se explora, aunque no se resuelve en su totalidad, la implicación faltante para establecer la equivalencia entre Compacidad y Correctud-Completud, a saber, que lo primero implica lo segundo. Para ello, por un lado, el autor distingue entre dos versiones de Completud, la *Restringida* y la *Extendida*. Mientras que la primera es la original de Gödel, que establece que todas las fórmulas universalmente válidas son teoremas (Si $\models \alpha$ entonces $\vdash \alpha$), la segunda enuncia que toda consecuencia lógica a partir de un conjunto de enunciados es derivable a partir de dicho conjunto por medio de una deducción formal (Si $\Sigma \models \alpha$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$). El resultado, ya conocido y presentado en este libro, es el de que Compacidad implica Correctud-Completud Restringida, demostración que atribuye a Malitz (p. 106). Por otro lado, el autor resuelve negativamente la implicación de que Compacidad implica Correctud-Completud Extendida para el sistema SM de Malitz, pues encuentra que falla la Correctud del mismo. Para ello, nos ofrece una caracterización original de las reglas de inferencia de un sistema axiomático, la cual las clasifica de acuerdo con las propiedades semánticas que preservan. Por ejemplo, mientras que las reglas que preservan cualquier tipo de satisfacibilidad son consideradas como "muy buenas", las que sólo preservan validez universal son consideradas como "regulares". Así, esta caracterización sirve al autor para dar una explicación de la falla en la Correctud Extendida del sistema axiomático en juego. En particular, el autor sugiere que la incorrectud se debe a que una de las reglas, la de Skolem, es sólo "regular". Entonces propone, aunque no lo lleva a cabo, que una reformulación apropiada de la regla de Skolem haciéndola "buena" podría sentar las bases para una prueba semántica del Teorema de Correctud-Completud Extendido a partir del Teorema de Compacidad. En la última sección de esta reseña retomaremos este resultado y lo discutiremos en detalle.

Así, este libro tiene como protagonista al Teorema de Compacidad y alrededor de éste se organizan los tres capítulos y el apéndice que lo constituyen. En breve, en el capítulo 1 se dan las diversas versiones del Teorema de Compacidad, se muestra la equivalencia entre todas ellas y se demuestra en detalle una en particular. El capítulo 2 se dedica a presentar aplicaciones del Teorema de Compacidad, algunas de las cuales son ampliamente conocidas y otras, al contrario, resultan ser usos interesantes del Teorema de Compacidad para construir modelos para determinados conjuntos de enunciados en contextos fuera de la lógica. En el capítulo 3 se establece la relación semántica entre el Teorema de Compacidad y el Teorema de Completud, tratando por separado las versiones Restringida y Extendida. Por último, se ofrece un apéndice en donde se da una prueba sintáctica del Teorema de Completud Extendido. Pasemos a describir cada capítulo con más detalle.

2. *Contenido del libro*

En el primer capítulo se presentan tres versiones del Teorema de Compacidad, dos de las cuales ya se mencionaron, y además se demuestra la equivalencia entre todas ellas. Asimismo, se prueba en detalle el Teorema de Compacidad con una prueba semántica para la siguiente formulación: "Si S es finitamente satisfacible entonces S tiene un modelo de cardinalidad $|S| + \chi o$." Su demostración parece ser una adaptación a la lógica de primer orden de la prueba dada por Enderton para Compacidad en la lógica proposicional (prueba que a su vez se basa en la de Henkin). Esto es, se construye un conjunto S^* a partir del conjunto S finitamente satisfacible que cumple con lo siguiente: (i) S^* es finitamente satisfacible, (ii) S^* es completo y (iii) S^* es cerrado bajo testigos. Con esto se demuestra que S tiene un modelo A de cardinalidad $|S| + \chi o$. Esto es, se construye un modelo A tal que a es verdadera en A si y sólo si $a \in S^*$ y se muestra que cumple con la cardinalidad deseada. Finalmente, se mencionan algunas de las limitaciones del Teorema de Compacidad y se da una explicación topológica de porqué lleva ese nombre. El autor muestra que el hecho de que cierto espacio topológico sea compacto, es equivalente a que se cumpla el Teorema de Compacidad para la lógica de primer orden. El autor no menciona que el Teorema de Compacidad recibe también el nombre de Teorema de Finitud, pero ciertamente esta relación topológica que nos ofrece indica que es más apropiado el nombre de Compacidad.

En el segundo capítulo se presentan varias aplicaciones del Teorema de Compacidad que incluyen al teorema de Lowenheim-Skolem y al problema de los cuatro colores para mapas infinitos. Asimismo, usando Compacidad se prueba tanto que todo conjunto es totalmente ordenable así como también el Lema de Infinitud de König, resultados que usualmente se demuestran usando el Axioma de Elección (todo conjunto es bien ordenable). Con esto el autor nos sugiere que el Teorema de Compacidad puede considerarse como una forma débil del Axioma de Elección. Las otras aplicaciones conciernen a la construcción de modelos no estándar para la aritmética de los números naturales y para los números infinitesimales. En el primer caso se construye, usando Compacidad, un modelo no estándar que satisface a los enunciados aritméticos y a otros enunciados no contradictorios con los usuales. En el segundo caso se presenta una construcción basada en un resultado bien conocido de Abraham Robinson (1961), a saber, un sistema extendido de los números reales que incluye tanto a los números infinitamente pequeños como a los infinitamente grandes, y que posee todas las propiedades del sistema de los números reales expresables en un lenguaje de primer orden. Con estos dos resultados se muestra la utilidad del Teorema de Compacidad para obtener modelos no estándar que extienden a sistemas numéricos como lo son los naturales y los reales. Como el propio autor sugiere, esto nos muestra una *reivindicación* de los infinitesimales (p. 58).

En el tercer capítulo, para establecer la relación semántica entre los Teoremas de Compacidad y de Correctud-Completud se presentan los teoremas de Skolem y de Herbrand, que establecen por un lado, las condiciones de equivalencia entre las fórmulas y las *formas normales* de Skolem para satisfacción y para validez y, por el otro, el resultado de Herbrand establece la relación entre la validez universal de una fórmula existencial pura y las instancias cerradas de sustitución de la matriz de la fórmula. Estos resultados son usados para establecer un procedimiento efectivo para la validez universal de una fórmula. Es un procedimiento efectivo mas no un algoritmo, pues sólo hay garantía de respuesta para el caso afirmativo. Asimismo, el autor presenta la caracterización semántica de reglas de inferencia antes mencionada.

El resto del capítulo está dedicado por un lado, a establecer una prueba semántica del Teorema de Correctud-Completud Restringido, y por el otro, a explorar la pregunta de si existe o no una prueba semántica análoga para Correctud-Completud Extendida. Con respecto a lo primero, se da una demostración muy elegante a partir de los Teoremas de Compacidad de Skolem y Herbrand. En lo segundo, el autor nos muestra que el sistema axiomático SM es incorrecto. Así, con estos resultados se obtiene sólo una equivalencia parcial entre los Teoremas de Compacidad y Correctud-Completud. Por último, lo interesante de la demostración sintáctica del Teorema de Correctud-Completud Extendido que aparece en el apéndice, es que su estructura es totalmente análoga a la prueba de Compacidad del capítulo 2. Estas dos pruebas usan dos lemas en donde sólo se intercambia la noción de finitamente satisfacible (para Compacidad) por la de consistencia (para Correctud-Completud), sugiriendo así la equivalencia entre ellas.

3. *Crítica y conclusiones*

Este libro está claramente dividido en dos partes. La primera la constituyen los capítulos primero y segundo y la segunda parte el capítulo tercero y el apéndice. Estas dos partes se distinguen tanto por aspectos de presentación como de contenido. Mientras que la primera parte puede considerarse como un libro de texto, la segunda, sobre todo las dos últimas secciones, es de carácter exploratorio, provisional. La exposición de todas las secciones que componen la primera parte es precisa, clara y completa. La notación es muy limpia (aunque debo decir que no me gustó el símbolo de fin de prueba); se encuentran ejemplos así como algunos ejercicios y todos sus temas están expuestos de manera muy detallada. La segunda parte, por el contrario, aunque es de carácter más original y por esto resulta más interesante, es poco clara en algunas partes y deja la sensación de estar incompleta. Mencionaré algunas cosas que me parece que podrían mejorarse para una segunda edición. En primer lugar, creo que sería de gran utilidad comenzar el capítulo con una descripción de la estrategia a seguir para dar tanto las pruebas semánticas de Completud como la discusión de si el Teorema de Compacidad implica el Teorema de Completud. Esto último, además, merecería una sección especial independiente de la sección *3.3 Sistemas Axiomáticos*, en donde se encuentra actualmente. Otro detalle con respecto al contenido es la caracterización semántica de reglas de inferencia. Ésta es, como ya lo dije, original e interesante, pero pasa desapercibida hasta el final del capítulo cuando se refiere a ella como la explicación de que el sistema axiomático SM es incorrecto para la versión de Correctud-Completud Extendida. Además, me parece que esta idea debiera explotarse mucho más como sugeriré a continuación.

Recordemos que el problema para construir una prueba semántica de Correctud-Completud Extendida radica en que el sistema SM no es correcto, pues no valida ni la regla de Skolem ni el Metateorema de la Deducción. Así, se pueden derivar enunciados que no son consecuencias lógicas. El autor adjudica esta falla al hecho de que la regla de Skolem es sólo regular, de acuerdo con la caracterización semántica de reglas de inferencia. Entonces sugiere dar una refomulación de esta regla para hacerla "buena" y con esto concluye: "*Si esto es posible, sin afectar la prueba del Teorema de Correctud-Completud Extendido, se tendrá una prueba del Teorema de Correctud-Completud Extendido, de un modo semántico*" (p. 114). Con esta aserción parece que el autor está interesado no sólo en obtener una prueba semántica de Correctud-Completud Extendida, sino en una prueba a partir de un sistema axiomático lo más parecido a SM, el usado para la versión restringida. No hay una razón por la cual se quiera dar esta prueba con el sistema SM y no con otro (tal vez la motivación estriba sólo en poder extender la prueba para la versión Restringida). Si lo que se busca es Correctud-Completud, esto parece ser mucho pedir. Como el propio autor acepta enseguida, otra posibilidad para enmendar Correctud "*sería dando otro sistema S que cumpla Correctud-Completud Extendida*" (p. 115), aunque su interés, claro está sigue siendo dar una prueba semántica a partir de Compacidad, Skolem y Herbrand.

Lo extraño de este resultado es que por querer extender una prueba ya existente (Compacidad implica Correctud-Completud Restringida), el autor pareciera hacer las cosas al revés. Usualmente uno asegura primero que el cálculo axiomático es Correcto y sólo *después* intenta probar que es Completo. Aquí tenemos el caso de un sistema axiomático SM que satisface Completud Extendida pero no así Correctud Extendida. A mi juicio, el autor debiera distinguir claramente todas sus preguntas y tratarlas por separado. Esto es, si lo que quiere es usar una extensión del sistema SM, entonces debiera dar las razones de esta motivación y luego intentar complementar su caracterización semántica de reglas de inferencia para convertir tipos de reglas en unas y otras (un tipo de procedimiento que funcione por lo menos para la regla de Skolem).

Por otro lado, creo que este capítulo quedaría más completo si el autor explorara otros sistemas axiomáticos para la versión Extendida. Con esto quedaría muy claro que la falla de Correctud Extendida se debe al sistema axiomático SM en cuestión, aunque se dejara abierta la pregunta de su Completud Extendida.

En todo caso, no resultaría sorpresivo que un resultado positivo de que Compacidad implica Correctud-Completud Extendida para algún otro sistema axiomático requiera de una buena interacción entre la sintaxis y la semántica. Esto es, de la capacidad de formular un cálculo correcto que a su vez pueda ser usado semánticamente en el sentido que propone el autor. Este libro es un muy buen ejemplo de la utilidad y belleza del tratamiento de los problemas lógicos desde la interacción de la sintaxis y la semántica, los dos aspectos esenciales en la lógica clásica.

Este libro es altamente recomendable para estudiosos de la lógica y bien puede ser usado como libro de texto en un curso de teoría de modelos o en un seminario de temas avanzados en lógica. En conclusión, aunque en su primera parte no va mucho más allá de las obras clásicas de la materia, su enfoque en torno al Teorema de Compacidad lo hace muy interesante. En cuanto a la segunda parte, aunque no totalmente acabada, es original y propone nuevas líneas de investigación (en las cuales el autor está trabajando como parte de su proyecto de doctorado). Otra de sus virtudes es que no existe otro libro de esta naturaleza en castellano (sólo conozco una excepción, el libro *Teoría de Modelos* de María Manzano, publicado por Alianza Editorial, Madrid, 1989).

ATOCHA ALISEDA