CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXIV, No. 72 (diciembre 1992): 47–72

UN SISTEMA LÓGICO DE SEGUNDO ORDEN CONCEPTUALISTA CON OPERADORES LAMBDA RAMIFICADOS*

MAX A. FREUND
Departamento de Filosofía
Universidad Nacional
Heredia, Costa Rica

Introducción

Los sistemas lógicos de segundo orden, cuyo contexto filosófico es el conceptualismo ramificado, han sido enunciados, por ejemplo, en Cocchiarella (1986 y 1986b) y Freund (1989 y 1991). Estos sistemas introducen infinito número de cuantificadores, correspondientes al conjunto de niveles de formación predicativa de conceptos (igualmente enumerable en forma infinita) que postula el conceptualismo ramificado. Sin embargo, el operador lambda (operador en estos sistemas) no está igualmente ramificado: su alcance involucra la totalidad de los objetos del dominio. En la primera parte de este artículo construimos un sistema en el que esto no sucede, esto es, un sistema de segundo orden con un número infinito de operadores lambda, tal que el alcance de cada uno de éstos constituye el conjunto de todos los correlatos de conceptos formados predicativamente en cierto nivel. Denominamos este sistema "$RRC^*_{\lambda j}$" y

* He de agradecer al comité editorial de la revista *Crítica* algunas sugerencias a la primera versión de este escrito y a la Universidad Nacional de Costa Rica por haberme librado parcialmente de mis labores docentes, lo cual me permitió llevar a cabo la investigación cuyos resultados son descritos en este artículo.

mostramos su consistencia relativa. En la segunda parte desarrollamos una semántica formal de segundo orden, la cual no es del tipo estándar.[1] Respecto de la noción de validez, dada por la semántica, probamos un teorema de completitud relativo a ciertas extensiones de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$. En el artículo asumiremos que se tiene familiaridad con el contexto filosófico y el contexto lógico descritos en Cocchiarella (1986b) y Freund (1989).

1. *Sintaxis*

Entenderemos por un lenguaje L un conjunto enumerable de constantes de individuos y de predicados. Asumiremos la disponibilidad de una cantidad enumerable de variables de individuos tanto como de variables de predicados de adicidad n (para todo número natural n). También usaremos 'x','y','z', y 'w', con o sin subíndices, para referirnos en el metalenguaje a variables de individuo y 'F^n','G^n' y 'R^n' para referirnos a variables de predicados de adicidad n. A menudo omitiremos el supraíndice cuando, dentro del contexto, sea claro el grado de la variable de predicado o cuando no tenga importancia su adicidad. Por conveniencia, también usaremos "u" para referirnos a las variables en general. Como constantes lógicas primitivas tomaremos $\rightarrow$, $\neg$, λ^j, $=$, $\forall$ y $\forall^j$ (para todo entero positivo j).

Dado un lenguaje L, definimos recursivamente el conjunto de las expresiones significativas de tipo n de L (en símbolos, $ME_n(L)$) como sigue:

(1) Toda variable o constante de individuo está en $ME_0(L)$. Toda variable o constante de predicado de adicidad n está en $ME_{n+1}(L)$ y $ME_0(L)$.

(2) Si $a, b \in ME_0(L)$, entonces $(a = b) \in ME_1(L)$.

[1] Es importante hacer notar que la semántica desarrollada aquí es una modificación de la semántica formulada originalmente en Simms (1980). Esta última fue construida para un sistema de segundo orden cuyo contexto filosófico es el realismo lógico.

(3) Si $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $a_1, \ldots, a_n \in ME_0(L)$, entonces $\pi(a_1 \ldots a_n) \in ME_1(L)$.

(4) Si $\delta \in ME_1(L)$ y $x_1, \ldots, x_n$ son variables de individuo distintas (una con respecto de la otra), entonces $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \delta] \in ME_{n+1}(L)$.

(5) Si $\delta \in ME_1(L)$, entonces $\neg\delta \in ME_1(L)$.

(6) Si $\delta, \sigma \in ME_1(L)$, entonces $(\delta \rightarrow \sigma) \in ME_1(L)$.

(7) Si $\delta \in ME_1(L)$, x es una variable de individuo, F una variable de predicado y j un entero positivo, entonces $(\forall x)\delta$, $(\forall^j x)\delta$ y $(\forall^j F)\delta \in ME_1(L)$.

(8) Si $\delta \in ME_1(L)$, entonces $[\lambda^j \delta] \in ME_0(L)$.

(9) Si $n > 1$, entonces $ME_n(L) \subseteq ME_0(L)$.

Sea $ME(L) = \bigcup_{n \in \omega} ME_n$, esto es, el conjunto de expresiones significativas de L. Usaremos "δ", "μ", "σ", "π" y "α" para referirnos a las expresiones significativas de L.

Cuando $t \in ME_0(L)$, diremos que t es un término de L. Usaremos "a", "t" y "b", con o sin subíndices numéricos para referirnos a los términos en general. Por otra parte, para todo $n \in \omega$, entenderemos ME_{n+1} como el conjunto de predicados de adicidad n. Si $\sigma \in ME_1(L)$, entonces diremos que σ es una fórmula bien formada de L (o en forma abreviada, que σ es *fbf* de L). Nótese que por la cláusula (9), para $n > 1$, todo predicado de adicidad n puede ser transformado en un término. Para $n = 1$, sólo las *fbf* con el operador lambda como prefijo (esto es, de la forma $[\lambda^j \sigma]$, donde σ es una *fbf*) son términos.

Ahora bien, si $\delta, \mu \in ME(L)$, definimos "δ es una subexpresión de μ" ("subexp", para ser más breve) como sigue:

a) μ es una subexp de μ

b) si δ es una subexp de μ y es de la forma $\pi(t_1 \ldots t_n)$, donde $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $t_1 \ldots t_n \in ME_0$, entonces "π" y "t_1" ... "t_n" son subexp de μ

c) si δ es una subexp de μ y es de una de las formas $\sigma \rightarrow \alpha$, $\neg\sigma$, $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma]$, $(\forall x)\alpha$ o $(\forall^j u)\alpha$, entonces σ, α son subexp de μ.

Se dice que una aparición de una variable de individuo x en una expresión δ es una aparición ligada si es una aparición en una subexp de δ de la forma $(\forall x)\sigma$, $(\forall^j x)\sigma$ o $[\lambda^j y_1 \ldots y_n \sigma]$, donde $x = y_i$, para alguna y_i; de otro modo diremos que es una aparición libre. Se dice que una aparición de una variable de predicado F en una expresión δ es una aparición ligada si es una aparición en una subexp de δ de la forma $(\forall^j F)\sigma$; de otro modo, diremos que es una aparición libre. Una aparición de un término t en una expresión δ es ligada si alguna aparición de una variable en t es libre en t pero ligada en δ. Los términos libres y ligados de una expresión son los términos que tienen apariciones libres o ligadas en esa expresión.

Donde "t" y "a" son términos, entenderemos por $\delta(t/a)$ la expresión que resulta de reemplazar cada aparición libre de "a" por una aparición libre de "t", si tal expresión existe, en cuyo caso diremos que t está libre para a en δ; si tal expresión no existe, entonces $\delta(t/a)$ será δ misma.

El sistema $\mathrm{RRC}^*_{\lambda^j}$

Axiomas:

(A1) todas las *fbf* tautológicas

(A2) $(\forall x)(\mu \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\forall x)\mu \rightarrow (\forall x)\sigma)$

(A3) $(\forall^j u)(\mu \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\forall^j u)\mu \rightarrow (\forall^j u)\sigma)$

(A4) $\sigma \rightarrow (\forall x)\sigma$, donde x no aparece libre en σ

(A5) $\sigma \rightarrow (\forall^j u)\sigma$, donde u no aparece libre en σ

(A6) $(\forall^j u)\sigma \rightarrow (\forall^i u)\sigma \qquad i \leq j$

(A7) $a = a$

(A8) $(\forall x)(\exists y)x = y$

(A9) $(\forall^j x)(\exists^k y)(x = y) \qquad j \leq k$

(A10) $(\forall^j F)(\exists^k u)(F = u) \qquad j \leq k$

(A11) $(\forall^j x)(\exists y)(x = y)$

(λ^j-CONV) $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma](a_1 \ldots a_n) \leftrightarrow (\exists^j x_1) \ldots (\exists^j x_n)(x_1 = a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = a_n \,\&\, \sigma)$ (en el supuesto de que x_i no es libre en cualquier a_k $(0 < i, k \leq n)$

(Rw_j) $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma] = [\lambda^j y_1 \ldots y_n \sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n)]$, donde ninguna y_i aparece en σ

(LL*) $a = b \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \mu)$, donde μ viene de σ mediante la sustitución de una o más apariciones libres de a por apariciones libres de b.

($\mathrm{CP}_{\lambda^j}!^*$) $(\forall^j y_1) \ldots (\forall^j y_n)$ $(\forall^j F_1) \ldots (\forall^j F_n)$ $(\exists^j G)$ $(G = [\lambda^{j-1} x_1 \ldots x_n \sigma])$, donde: 1) σ es una *fbf* en la cual no hay constantes y no aparece signo de identidad alguno; 2) G es una variable de predicado de adicidad n que no es libre en σ; 3) para toda $k \geq j$, "$(\forall^k)$" no aparece en σ y $F_1, \ldots, F_r$ son todas las variables de predicados distintas (una con respecto a la otra) que aparecen libres en σ y $y_1 \ldots y_m, x_1, \ldots, x_n$ son todas las variables de individuo distintas (una con respecto a la otra) que aparecen libres en σ; 4) para toda $k \geq j$, ningún operador lambda ramificado λ^k aparece en σ.

Reglas:

Modus ponens (MP): si σ y $\sigma \rightarrow \delta$, entonces δ.

Generalización universal (UG): si σ, entonces $(\forall x)\sigma$ y $(\forall^j u)\sigma$.

Diremos que σ es un teorema de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda^j}$ (en símbolos, $\vdash_{\mathrm{RRC}^*_{\lambda^j}} \sigma$ si y sólo si existe una secuencia $\delta_1 \ldots \delta_n = \sigma$ de las *fbf* tal que, para cualquier $n \geq i \geq 1$, δ_i es un axioma o se sigue de miembros anteriores en la secuencia por una de las reglas. Definimos también las siguientes expresiones:

a) $\Gamma \vdash_{\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}} \sigma$ si y sólo si existen algunas *fbf* $\delta_1 \ldots \delta_n \in \Gamma$ tal que $(\delta_1 \,\&\ldots\&\, \delta_n) \rightarrow \sigma$ es un teorema de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$;

b) Γ es $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$-consistente si y sólo si no existe una *fbf* δ tal que $\Gamma \vdash_{\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}} \neg(\delta \rightarrow \delta)$;

c) Γ *es máximamente consistente* si y sólo si Γ es $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$-consistente y para toda *fbf* σ, $\sigma \in \Gamma$ o $\neg\sigma \in \Gamma$;

d) Γ *es ω-completo* si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones: 1) si $(\exists x)\sigma \in \Gamma$, entonces existe un término t, el cual es libre para x en σ, tal que $\sigma(t/x) \in \Gamma$ y $(\exists x)(x = t) \in \Gamma$, y 2) si $(\exists^j u)\sigma \in \Gamma$, entonces existe un término t del mismo tipo que u y libre para u en σ, tal que $\sigma(t/u) \in \Gamma$ y $(\exists^j u)(u = t) \in \Gamma$;

e) Σ *es una extensión normal de* $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ (en símbolos, Σ-$\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$) si sólo si Σ es una extensión axiomática de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ y se encuentra cerrada bajo las mismas reglas de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$;

f) Σ-$\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ *es una extensión propia* si y sólo si, para toda *fbf* σ, si σ es un teorema de Σ-$\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$, entonces, si "$t$" y "$a$" son términos del mismo tipo, $\sigma(t/a)$ es un teorema de Σ-$\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$; (definimos "teorema de Σ-$\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$" en forma análoga a como lo hicimos con "teorema de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$").

Los siguientes teoremas serán de utilidad más adelante:

T1. $(\exists^k x)(x = t) \rightarrow (\exists^j x)(x = t) \qquad k \leq j$
(Demostración: por A6, lógica proposicional y definiciones.)

T2. $(\exists^k F)(F = t) \rightarrow (\exists^j F)(F = t) \qquad k \leq j$
(Demostración: por A6, lógica proposicional y definiciones.)

T3. $[\lambda^m \sigma] \leftrightarrow [\lambda^n \sigma]$, para cualquier $m, n > 0$
(Demostración: por λ^j-CONV y lógica proposicional.)

Los siguientes principios pueden demostrarse fácilmente a partir de LL*, UG, lógica proposicional y definiciones de cuantificadores existenciales:

($\exists^j$/UI/o) $(\exists^j x)(x = u) \rightarrow (\forall^j x)\sigma \rightarrow \sigma(u/x)$, en el supuesto de que u sea libre para x en σ

($\exists^j$/UI/) $(\exists^j F)(F = G) \rightarrow (\forall^j F)\sigma \rightarrow \sigma(G/F)$, en el supuesto de que G sea libre para F en σ

($\exists$/UI/o) $(\exists x)(x = y) \rightarrow (\forall x)\sigma \rightarrow \sigma(y/x)$, en el supuesto de que y sea libre para x en σ

(EG/o/j) $(\exists^j x)(x = u) \rightarrow (\sigma(u/x) \rightarrow (\exists^j x)\sigma)$, en el supuesto de que u sea libre para x en σ

(EG) $(\exists^j F)(F = G) \rightarrow (\sigma(G/F) \rightarrow (\exists^j F)\sigma)$, en el supuesto de que G sea libre para F en σ

(EG/o) $(\exists x)(x = y) \rightarrow (\sigma(y/x) \rightarrow (\exists x)\sigma)$, en el supuesto de que y sea libre para x en σ

Consistencia relativa de $\text{RRC}^*_{\lambda j}$

Considérese el sistema RRC*, enunciado en Cocchiarella (1986b). Agréguese a la base axiomática de este sistema el siguiente esquema:

EXT $((\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\sigma \leftrightarrow \mu)) \rightarrow [\lambda x_1 \ldots x_n \sigma] = [\lambda x_1 \ldots x_n \mu]$.

Denominaremos este nuevo sistema "RRC* +EXT". De los resultados en Freund (1989), se sigue la consistencia relativa de RRC* +EXT al sistema T+EXT formulado en Cocchiarella (1986). Demostraremos ahora que el sistema $\text{RRC}^*_{\lambda j}$ es relativamente consistente al sistema RRC* +EXT.

Metateorema:

Si RRC* +EXT es consistente, entonces $\text{RRC}^*_{\lambda j}$ es consistente.

Demostración: asúmase la hipótesis del metateorema. Sea f la función con $ME(L)$ como dominio tal que, para toda $\delta \in ME(L)$:

1) si δ es una variable o constante, entonces $f(\delta) = \delta$;

2) si δ es de la forma $\pi(t_1 \ldots t_n)$, entonces $f(\delta) = (f(\pi)(f(t_1) \ldots f(t_n)))$;

3) si δ es de la forma $\neg\sigma, (\sigma \rightarrow \tau), (\forall y)\sigma, a = b, (\forall^j F)\sigma$ o $(\forall^j y)\sigma$, entonces $f(\delta) = \neg f(\sigma), f(\delta) = (f(\sigma) \rightarrow f(\tau))$, $f(\delta) = (\forall y)f(\sigma), f(\delta) = (f(a) = f(b)), f(\delta) = (\forall^j F)f(\sigma)$, $f(\delta) = (\forall^j y)\sigma$ respectivamente;

4) si δ es de la forma $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma]$, entonces $f(\delta) = [\lambda x_1 \ldots x_n (\exists^j y_1)(x_1 = y_1) \& \ldots \& (\exists^j y_n)(x_n = y_n) \& f(\sigma)]$ (donde, para todo m tal que $0 < m \leq n$, y_m es la m-ésima variable del conjunto de variables de individuo diferentes de cualquiera de las variables $x_1 \ldots x_n$).

Nota 1. Por inducción sobre el conjunto de expresiones significativas de L, fácilmente se puede mostrar que, para todo $\sigma \in ME(L)$ y variables de individuo $x, y, f(\sigma(x/y)) = f(\sigma)(x/y)$.

Nota 2. Si σ es una fbf y j el supraíndice más grande que aparece en cualquier cuantificador u operador lambda ramificado, entonces, por inducción sobre el conjunto de subexpresiones de σ, se puede mostrar fácilmente que, para cualquier subexpresión δ de σ, si k es un supraíndice en un cuantificador ramificado que aparece en $f(\delta)$, entonces $k \leq j$.

Nota 3. Los valores de f son evidentemente fórmulas de RRC*.

Mostraremos ahora que si $\vdash_{\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}} \sigma$, entonces $\vdash_{\mathrm{RRC}^*+\mathrm{EXT}} f(\sigma)$, para toda fbf σ. Supongamos entonces que $\vdash_{\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}} \sigma$. Por definición, existe una secuencia $\delta_1 \ldots \delta_n = \sigma$ de las fbf de $ME(L)$ tal que cada una de ellas es o bien un axioma de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ o se obtiene de las fbf anteriores en la secuencia por *modus ponens* o generalización universal. Sea $A = \{i \in \omega | \vdash_{\mathrm{RRC}^*+\mathrm{EXT}} f(\delta_i)\}$. Es obvio que $A \subseteq \omega$. Por inducción fuerte mostramos que $\omega \subseteq A$. De este modo supóngase que para todo $k < i, k \in A$. Tenemos que considerar tres casos:

Primer caso: δ_i es un axioma.

(i) Si δ_i es un axioma de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ del tipo A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A11 o LL*, entonces puede verse fácilmente que $f(\delta_i)$ sería un axioma de RRC*+EXT del tipo A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8, A11 y LL*, respectivamente.

(ii) Si δ_i es $(\forall^j x)(\exists^k y)(x = y)$ o $(\forall^j F)(\exists^k u)(F = u)$, para algunos $j, k \in \omega$ y $j \leq k$, esto es, un axioma de $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ del tipo A9 o A10, entonces en ambos casos $f(\delta_i) = \delta_i$. Pero δ_i en cualquiera de los dos casos es un teorema de RRC* +EXT, como ha sido mostrado en Cocchiarella (1989b).

(iii) Si δ_i es $(\forall^j u)\sigma \rightarrow (\forall^i u)\sigma$, para algunos $i, j \in \omega$ tal que $i \leq j$ y alguna *fbf* σ, esto es, un axioma $\mathrm{RRC}^*_{\lambda j}$ del tipo A6, entonces $f(\delta_i)$ sería $(\forall^j u)f(\sigma) \rightarrow (\forall^i u)f(\sigma)$, lo cual es un teorema de RRC* +EXT como ha sido mostrado en Cocchiarella (1986b).

(iv) Si δ_i es $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma](a_1 \ldots a_n) \leftrightarrow (\exists^j x_1) \ldots (\exists^j x_n)(x_1 = a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = a_n \,\&\, \sigma)$ (en el supuesto de que x_i no es libre en cualquier a_k, $(0 < i, k \leq n)$ y alguna *fbf* σ), entonces $f(\delta_i)$ sería

$$[\lambda x_1 \ldots x_n \, (\exists^j y_1) \, (x_1 = y_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j y_n) \, (x_n = y_n) \,\&\, f(\sigma)](a_1 \ldots a_n) \leftrightarrow (\exists^j x_1) \ldots (\exists^j x_n)(x_1 = a_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = a_n \,\&\, f(\sigma))$$

de lo cual se puede mostrar que es un teorema de RRC* +EXT mediante lógica proposicional elemental, los axiomas A9, A8, A11, λ-CONV de RRC*+EXT, los teoremas ($\exists$/UI*o/j), (EG/o/j) (esto es, los principios de instanciación existencial y generalización existencial de RRC* + EXT) y las reglas de *modus ponens* y generalización universal de RRC* +EXT.

(v) Si δ_i es $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \sigma] = [\lambda^j y_1 \ldots y_n \sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n)]$, donde ninguna y_i aparece en σ, entonces $f(\delta_i)$ sería

$$[\lambda x_1 \ldots x_n (\exists^j z_1)(x_1 = z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j z_n)(x_n = z_n) \,\&\, f(\sigma)] =$$

$[\lambda y_1 \ldots y_n(\exists^j w_1)(y_1 = w_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j w_n)(y_n = w_n) \,\&\, f(\sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n))]$,

donde

a) para todo $0 < i \leq n$, ninguna y_i aparece en σ

b) para todo m tal $0 < m \leq n, z_m$ es la m-ésima variable del conjunto de variables de individuo diferentes de cualquiera de las variables $x_1 \ldots x_n$

c) para todo m tal $0 < m \leq n, w_m$ es la m-ésima variable del conjunto de variables de individuo diferentes de cualquiera de las variables $y_1 \ldots y_n$.

Sean $k_1 \ldots k_n$ variables de individuo tales que, para $0 < m \leq n$, k_m es la m-ésima variable del conjunto de variables de individuo diferentes de cualquiera de las variables $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n, z_1 \ldots z_n, w_1 \ldots w_n$.

Por el axioma Rw de RRC* +EXT, la siguiente fórmula es un teorema de RRC* +EXT

(1) $[\lambda x_1 \ldots x_n(\exists^j k_1)(x_1 = k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(x_n = k_n) \,\&\, f(\sigma)] = [\lambda y_1 \ldots y_n(y_1 = k_1)(\exists^j k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(y_n = k_n) \,\&\, (f(\sigma))(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n)]$.

Pero, por la nota 1 a la definición de la función f, esta fórmula es igual a

(2) $[\lambda x_1 \ldots x_n(\exists^j k_1)(x_1 = k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(x_n = k_n) \,\&\, f(\sigma)] = [\lambda y_1 \ldots y_n(\exists^j k_1)(y_1 = k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(y_n = k_n) \,\&\, f(\sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n))]$.

Ahora bien, por el axioma EXT, lógica proposicional elemental, el teorema de intercambio de variables y generalización universal de RRC* +EXT, las fórmulas

(3) $[\lambda x_1 \ldots x_n(\exists^j k_1)(x_1 = k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(x_n = k_n) \,\&\, f(\sigma)] = [\lambda x_1 \ldots x_n(\exists^j z_1)(x_1 = z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j z_n)(x_n = z_n) \,\&\, f(\sigma)]$

y

(4) $[\lambda y_1 \ldots y_n(\exists^j k_1)(y_1 = k_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j k_n)(y_n = k_n) \,\&\, f(\sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n))] = [\lambda y_1 \ldots y_n(\exists^j w_1)(y_1 = w_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (\exists^j w_n)(y_n = w_n) \,\&\, f(\sigma(y_1/x_1 \ldots y_n/x_n))]$

son teoremas de RRC*+EXT. De (3), (4) y (2), por el axioma LL* de RRC*+EXT, se sigue que $f(\delta_i)$ es un teorema de este sistema.

(vi) Si δ_i es un axioma del tipo (CP$_{\lambda j}$!*), entonces fácilmente se puede ver, por la nota 2 a la definición de la función f, que $f(\delta_i)$ sería un axioma del tipo (RRCP*!).

Segundo caso: δ_i se obtiene por *modus ponens*, esto es, existen $k, m < i$ tal que $\delta_m = (\delta_k \rightarrow \delta_i)$. Este caso se sigue directamente de la hipótesis de inducción.

Tercer caso: δ_i se obtiene por generalización universal, esto es, hay un $k < i$ tal que δ_i es $(\forall x)\delta_k$, $(\forall^j x)\delta_k$ o $(\forall^j F)\delta_k$. Por la hipótesis de inducción $f(\delta_k)$ es un teorema de RRC*+ EXT y, entonces, por la regla de generalización universal de RRC*+ EXT, $(\forall x)f(\delta_k)$, $(\forall^j x)f(\delta_k)$ y $(\forall^j F)f(\delta_k)$ serían teoremas de RRC*+ EXT también. Pero, es obvio que $f(\delta_i)$ es $(\forall x)f(\delta_k)$, $(\forall^j x)f(\delta_k)$ o $(\forall^j F)f(\delta_k)$.

2. *Semántica formal para* RRC$^*_{\lambda j}$

Procedemos ahora a describir la semántica formal que hemos desarrollado para el sistema RRC$^*_{\lambda j}$.[2] Diremos que S es una estructura para conceptualismo ramificado (en forma abreviada, una estructura RRC*), si

$$S = \langle D, E, C_j, X_{(j,n)}, Y_n, H, f\rangle n \in \omega, j \in \omega^{-\{0\}}$$

donde

1) $E \subseteq D$,

2) $C_j \subseteq E$,

[2] Para una explicación intuitiva de esta semántica véase el último apartado de este artículo.

3) $C_j \subseteq C_k, \qquad j \leq k,$

4) $X_{(j,n)} \subseteq Y_n,$

5) $X_{(j,n)} \subseteq X_{(k,n)}, \qquad j \leq k,$

6) $Y_n \cap Y_m = \emptyset \quad$ si $n \neq m,$

7) $D \neq \emptyset,$

8) $Y_n \neq \emptyset, \qquad n \in \omega,$

9) $H \subseteq \bigcup_{n \in \omega}(Y_n \times D^n),$

10) f es una función de $D \bigcup_{n \in \omega}(\cup Y_n$ en D tal que

(a)$f(x) = x \quad$ si $x \in D,$

(b) para cualquier $j \in \omega^{-\{0\}}$, si $z \in \bigcup_{n \in \omega} X_{(j,n)}$, entonces $f(z) \in C_j$.

Continuamos ahora con la descripción de la semántica.

Sea L un lenguaje y g una función con L como dominio tal que: a) para cualquier constante $c \in L$, $g(c) \in D$; b) para cualquier constante de predicado $P^n \in L$ de adicidad n, $g(P^n) \in Y_n$. Entenderemos por un modelo conceptualista ramificado para L (en forma abreviada, un modelo RRC*-L) un par ordenado $M = \langle S, g \rangle$, en donde S es una estructura RRC*.

Por una asignación A en una estructura RRC* entenderemos una función con el conjunto de variables de cualquier tipo como dominio tal que:

(a) si x es una variable de individuo, $A(x) \in D$,

(b) si F es una variable de tipo $n+1, A(F) \in Y_n$ (para $n \in \omega$).

Si A es una asignación, entonces $A(d/u) = (A - \{\langle u, A(u) \rangle\} \cup \{\langle u, d \rangle\})$, esto es, $A(d/u)$ es una asignación que es exactamente como A con la excepción (y a lo sumo) de que asigna d a u (donde u es una variable de individuo o de predicado). Finalmente, por "$\langle\ \rangle$" queremos designar la secuencia vacía y, por conveniencia, escribiremos "$\langle a, b \rangle \in H$" como "$aHb$".

Si L es un lenguaje y $M = \langle S, g\rangle$ es un modelo RRC*-L, entonces diremos que M es una interpretación λ^jRRC*-L, si existe una función val_M definida para cada asignación A en S tal que $val_{M,A}$ es una función con $ME(L)$ como dominio y, para cualquier $\delta \in ME(L)$, $val_{M,A}$ cumple con las siguientes condiciones:

(1) si δ es una variable, entonces $val_{M,A}(\delta) = A(\delta)$; si δ es una constante de L, entonces $val_{M,A}(\delta) = g(\delta)$

(2) si δ es $\pi(a_1, \ldots, a_n)$ (tal que $\pi \in ME_{n+1}(L)$ y $a_1, \ldots, a_n \in ME_0(L)$ entonces, $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si $\langle val_{M,A}(\pi), \langle f(val_{M,A}(a_1)), \ldots, f(val_{M,A}(a_n))\rangle\rangle \in H$

(3) si δ es $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \Theta]$ (tal que $\Theta \in ME_1(L)$), entonces para cualquier $d_1 \ldots d_n \in D, val_{M,A}(\delta)H\langle d_1, \ldots, d_n\rangle$ si y sólo si $val_{M,A(d_1/x_1,\ldots,d_n/x_n)}(\Theta)H\langle\ \rangle$ y $d_1, \ldots, d_n \in C_j$

(4) si δ es $\neg\tau$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si no es el caso que $val_{M,A}(\tau)H\langle\ \rangle$

(5) si δ es $(\mu \rightarrow \tau)$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si o bien no es el caso que $val_{M,A}(\mu)H\langle\ \rangle$ o $val_{M,A}(\tau)H\langle\ \rangle$

(6) si δ es $(\forall x)\mu$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si para cualquier $d \in E, val_{M,A(d/x)}(\mu)H\langle\ \rangle$

(7) si δ es $(\forall^m x)\mu$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si para cualquier $d \in C_m, val_{M,A(d/x)}(\mu)H\langle\ \rangle$

(8) si δ es $(\forall^m F^n)\mu$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si para cualquier $p \in X_{(m,n)}, val_{M,A(p/F)}(\mu)H\langle\ \rangle$

(9) si δ es $[\lambda^j \mu]$, entonces $val_{M,A}\ (\delta)\ H\ \langle\ \rangle$ si y sólo si $val_{M,A}(\mu)H\langle\ \rangle$

(10) si δ es $a = b$, entonces $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si $f(val_{M,A}(a)) = f(val_{M,A}(b))$

Sea L un lenguaje, $M = \langle S, g\rangle$ una interpretación λ^jRRC*-L, A una asignación en S, $\delta \in ME_1(L)$ y Σ-RRC$^*_{\lambda^j}$ una extensión normal propia de RRC$^*_{\lambda^j}$. Definimos satisfacción, verdad y validez λ^jRRC*-Σ de δ en M como sigue:

(1) A satisface a δ en M si y sólo si $val_{M,A}(\delta)H\langle\ \rangle$;

(2) δ es verdadera en M si y sólo si para cualquier asignación en S satisface a δ en M;

(3) δ es Σ-λ^jRRC*-válido si y sólo si para cualquier M que sea una interpretación λ^jRRC*-L: si todo axioma de Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ es verdadero en M, entonces δ es verdadero en M;

(4) Γ es Σ-λ^jRRC*-satisfacible si y sólo si existe una asignación A y una M que es una interpretación λ^jRRC*-L, en la cual todo axioma de Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ es verdadero, y A satisface a δ en M, para cualquier $\delta \in \Gamma$.

3. *Completitud y validez de* Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ *con respecto a validez* Σ-λ^jRRC*

Sea Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ una extensión propia. Fácilmente se puede mostrar que, para toda *fbf* δ, δ es un teorema de Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ sólo si δ es Σ-λ^jRRC*-válida. De este modo, mostramos solamente la completitud de Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ con respecto a validez Σ-λ^jRRC*.

Teorema de completitud:

Sea L un lenguaje enumerable y $\Gamma \subseteq ME_1(L)$. Si Γ es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente, entonces Γ es Σ-λ^jRRC*-satisfacible.

Demostración: extiéndase L a un lenguaje L^+ agregando a L un conjunto enumerable de constantes distintas, por cada tipo $n \in \omega$. Puede mostrarse fácilmente que Γ es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente en L^+.

Asumimos una enumeración $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ de todas las *fbf* de L^+ ya sea de la forma "$(\exists^j u)\mu$" (donde u es una variable de individuo o de predicado) o de la forma "$(\exists x)\mu$". Definimos la cadena $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ por recursión:

(1) $\Gamma_0 = \Gamma$;

(2) si δ_{n+1} es $(\exists^j u)\mu$ y μ no es una identidad $(a = u)$ (donde a es del mismo tipo que u), entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{(\exists^j u)\mu \rightarrow (\mu(b/u) \,\&\, (\exists^j u)(b = u))\}$, donde b es la primera constante en L^+ del mismo tipo que u nueva a $\Gamma_n \cup \{\delta_{n+1}\}$;

(3) si δ_{n+1} es de la forma $(\exists x)\mu$, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{(\exists x)\mu \rightarrow (\mu(c/x) \,\&\, (\exists x)x = c)\}$, donde c es la primera constante de individuo nueva a $\Gamma_n \cup \{\delta_{n+1}\}$;

(4) si δ_{n+1} es $(\exists^j u)u = a$ (donde a es del mismo tipo que u), entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{(\exists^j u)u = a \rightarrow b = a, \neg(\exists^j u)u = a \rightarrow b = a\}$, donde b es la primera constante en L^+ del mismo tipo que u nueva a $\Gamma_n \cup \{\delta_{n+1}\}$.

Obsérvese que, por hipótesis, Γ_0 es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente. Por otra parte, mediante generalización universal, A8–A9, operaciones lógicas elementales y el supuesto que Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ es una extensión propia de RRC$^*_{\lambda j}$, puede mostrarse (por *reductio ad absurdum*) que Γ_{n+1} es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente, si Γ_n es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente. De acuerdo con esto, concluimos que $\Gamma^* = \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$ es Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente. Por el método de Lindenbaum, extiéndase Γ^* a un conjunto K, el cual es máximamente Σ-RRC$^*_{\lambda j}$-consistente. Nótese que, por construcción, K es ω-completo.

Sea $[t](t \in ME_0(L^+))$ la clase equivalencial determinada por la relación de equivalencia "$\approx$", definida como sigue:

$$t \approx t' \quad \text{si y sólo si} \quad t = t' \in K$$

Sea S^K la siguiente estructura: $\langle D, E, C_j, X_{(j,n)}, Y_n, H, f\rangle n \in \omega, j \in \omega^{-\{0\}}$, donde

1) $D = \{[t] \mid t \in ME_0(L^+)\}$

2) $E = \{[t] \in D \mid (\exists x)x = t \in K, x$ no es libre en $t\}$

3) $C_j = \{[t] \in D \mid (\exists^j x)x = t \in K, x$ no es libre en $t\}$

4) $Y_n = \{[t] \in D \mid t \in ME_{n+1}\}$

5) $X_{(j,n)} = \{[t] \in Y_n \mid (\exists^j F)t = F \in K, F$ no es libre en t y es del mismo tipo que $t\}$

6) f es la función de identidad en D, esto es, $f([t]) = [t]$, para todo $[t] \in D$

7) $H = \bigcup_{n\in\omega}\{\langle[\pi], \langle[t_1], \ldots, [t_n]\rangle\rangle \in Y_n \times D^n \mid \pi t_1 \ldots t_n \in K\}$

Demostramos que S^K es una estructura RRC*:

(1) $E \subseteq D, X_{(j,n)} \subseteq Y_n$ y $H \subseteq \bigcup_{n\in\omega}\{Y_n \times D^n\}$ (directamente de las definiciones);

(2) $D \neq \emptyset$ y $Y_n \neq \emptyset$ (dado que $t = t \in K$, para cualquier $t \in ME_0(L^+)$ y $ME_n(L^+) \neq \emptyset$);

(3) $Y_n \cap Y_m = \emptyset$ (pues $ME_{n+1}(L^+) \cap ME_{m+1}(L^+) = \emptyset$), para $m \neq n$;

(4) $C_j \subseteq E$.

Demostración: supóngase que $a \in C_j$. Por el supuesto y la definición de C_j, $a = [t]$ para alguna $t \in ME_0(L^+)$ tal que $(\exists^j x)x = t \in K$. Por $(\exists^j$/UI/o), A11 y *modus ponens*, $(\exists x)x = t \in K$ y, así, $a = [t] \in E$.

(5) $C_k \subseteq C_j$, si $k \leq j$.

Demostración: supóngase que $a \in C_k$. Por el supuesto y la definición de C_k, hay un $t \in ME_0(L^+)$ tal que $a = [t]$ y $(\exists^k x)x = t \in K$. Por T1 y *modus ponens*, $(\exists^j x)x = t \in K$ y, así, $a = [t] \in C_j$.

(6) $X_{(k,n)} \subseteq X_{(j,n)}$, si $k \leq j$.

Demostración: similar a la de (5), pero úsese T2 en lugar de T1.

(7) Dado que f es una función de identidad sobre D y $Y_n \subseteq D$ (para todo $n \in \omega$), solamente queda por demostrar la cláusula (b).

Demostración de la cláusula (b): supóngase que $z \in \bigcup_{n\in\omega} X_{(j,n)}$. Por el supuesto, para alguna $n \in \omega$, hay una $\pi \in ME_{n+1}$ tal que $z = [\pi]$ y $(\exists^j F^n)\pi = F \in K$. Entonces (por A10, ($\exists^j$/UI/o) y *modus ponens*) $(\exists^j x)\pi = x \in K$. Así, por la definición de f, $z = [\pi] = f([\pi]) \in C_j$.

Sea g la función con L^+ como dominio tal que para todo $c \in L^+$, $g(c) = [c]$. Sea $M^K = \langle S^K, g\rangle$. Claramente M^K es un modelo RRC*-L^+, pues ya se mostró que S^K es una estructura RRC*.

Nótese que (por la construcción de K) si t es un término de L^+ del tipo n, entonces existe una constante $b \in L^+$ del tipo n tal que $t = b \in K$. Por lo tanto, para toda asignación A en S^K y conjunto finito de variables $\{a_1, \ldots, a_n\}$, hay un conjunto finito $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de constantes tal que

(1) a_i es del mismo tipo que b_i, y

(2) $A(a_i) = [b_i]$.

Si $\delta \in ME(L^+)$, entonces sea $VL(\delta) = \{d_1, \ldots, d_n, x_1, \ldots, x_m\}$ el conjunto de todas las variables libres en δ y, relativo al subconjunto $VS(\delta) = \{d_1 \ldots d_n\}$ de $VL(\delta)$, sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ el conjunto de las primeras constantes que cumplen con las condiciones anteriores (1) y (2). Definimos $\delta_A^{(x_1 \ldots x_m)}$ como sigue:

$$\delta_A^{(x_1 \ldots x_m)} =_{\mathrm{df}} \delta(b_1/d_1, \ldots, b_n/d_n).$$

Cuando $VL(\delta) = VS(\delta)$, entonces escribiremos δ_A.

Sea VAL_A la función con $ME(L^+)$ como dominio tal que para todo $\delta \in ME(L^+)$:

(1) si δ es una variable, entonces $VAL_A(\delta) = A(\delta)$ si δ es una constante en L, entonces $VAL_A(\delta) = g(\delta)$

(2) si δ es $\pi(a_1, \ldots, a_n)$ (tal que $\pi \in ME_{n+1}(L^+)$) y $a_1, \ldots, a_n \in ME_0(L^+)$ entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1 \delta]_A]$

(3) si δ es $[\lambda^j x_1 \ldots x_n \Theta]$ (tal que $\Theta \in ME_1(L^+)$), entonces $VAL_A(\delta) = [\delta_A]$

(4) si δ es $\neg\tau$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

(5) si δ es $(\mu \rightarrow \tau)$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

(6) si δ es $(\forall x)\mu$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

(7) si δ es $(\forall^m x)\mu$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

(8) si δ es $(\forall^m F^n)\mu$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

(9) si δ es $[\lambda^j\mu]$, entonces $VAL_A(\delta) = [\delta_A]$

(10) si δ es $a = b$, entonces $VAL_A(\delta) = [[\lambda^1\delta]_A]$

Demostramos, por inducción sobre el conjunto de expresiones significativas de L^+, que VAL_A cumple las condiciones para $val_{M,A}$ en la definición de una interpretación λ^jRRC*-L:

Demostración: Sea $\delta \in ME(L^+)$.

(1) Claramente, VAL_A cumple las cláusulas correspondientes cuando δ es una variable o $\delta \in L^+$;

(2) si δ es $\pi(a_1, \ldots, a_n)$ (tal que $\pi \in ME_{n+1}(L^+)$) y $a_1, \ldots, a_n \in ME_0(L^+)$ entonces $VAL_A(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si (por definición) $[\lambda^1\pi(a_1, \ldots, a_n)]_A \in K$ si y sólo si (pues por (λ^j-CONV), $\sigma \leftrightarrow [\lambda^1\sigma]$ es un esquema que puede ser probado en $RRC^*_{\lambda^j}$) $\pi(a_1, \ldots, a_n)_A \in K$ si y sólo si (por definición) $[\pi_A]H\langle[a_{1A}], \ldots, [a_{nA}]\rangle$ si y sólo si (pues $f(VAL_A(a_m)) = [a_{mA}]$, para $1 \leq m \leq n$) $VAL_A(\pi)H\langle f(VAL_A(a_1)), \ldots, f(VAL_A(a_n))\rangle$

(3) si δ es $[\lambda^j x_1 \ldots x_n\Theta]$ (donde $\Theta \in ME_1(L^+)$) y $t_1, \ldots, t_n \in ME_0(L^+)$, entonces $VAL_A([\lambda^j x_1 \ldots x_n \Theta])H\langle[t_1], \ldots, [t_n]\rangle$ si y sólo si (por las definiciones) $[\lambda^j x_1 \ldots x_n\Theta]_A(t_1, \ldots, t_n) \in K$ si y sólo si (por λ^j-CONV y, si es necesario reescribir variables, Rw_j)$(\exists^j x_1) \ldots (\exists^j x_n)(x_1 = t_1 \,\&\, \ldots x_n = t_n \,\&\, \Theta_A^{(x_1 \ldots x_n)}) \in K$ (donde x_i no es libre en cualquier t_j, para $0 < i, j \leq n$) si y sólo si (por ω-completitud y EG/o) hay constantes $c_1 \ldots c_n$ tales que $(\exists^j x_1)(x =$

$c_1)$ & ... & $(\exists^j x_n)(x_n = c_n)$ & $(c_1 = t_1$ & ... $c_n = t_n$ & $\Theta_A^{(x_1 \ldots x_n)}(c_1/x_1 \ldots c_n/x_n) \in K$ si y sólo si (por LL* y def. de C_j) hay constantes $c_1 \ldots c_n$ tales que $\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in C_j^n$ y $c_1 = t_1$ & ... $c_n = t_n$ & $\Theta_A^{(x_1 \ldots x_n)}(c_1/x_1 \ldots c_n/x_n) \in K$ si y sólo si (por construcción de K, LL* y definiciones) $\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in (C_j)^n$ y $\Theta_{A([t_1]/x_1 \ldots [t_n]/x_n)} \in K$ si y sólo si (por (λ^j-CONV) y definiciones) $\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in (C_j)^n$ y $VAL_{A([t_1]/x_1, \ldots, [t_n]/x_n)}(\Theta)H\langle\ \rangle$

(4) si δ es $\neg\tau$, $(\mu \rightarrow \tau)$ o $[\lambda^j \mu]$, entonces fácilmente puede mostrarse que VAL_A cumple las cláusulas correspondientes mediante la hipótesis de inducción. El caso en el que δ es $a = b$ puede demostrarse por un argumento similar al de las fórmulas atómicas;

(5) si δ es $(\forall^m F^n)\mu$ entonces $VAL_A(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si (por definición) $[\lambda^1 (\forall^m F^n)\mu_A] \in K$ si y sólo si (por (λ^j-CONV)) $(\forall^m F^n)\mu_A \in K$ si y sólo si (por ω-completitud de K y $\exists^j$/UI), para todas las constantes c del mismo tipo que F, si $(\exists^m F)F = c \in K$, entonces $\mu_A(c/F) \in K$; si y sólo si (por LL*, construcción de K y (λ^j-CONV) para cualquier constante c del mismo tipo que F, si $(\exists^m F)(F = c) \in K$, entonces $VAL_{A([0]/F)}(\mu)H\langle\ \rangle$
Nótese que $d \in X_{(m,n)}$ si y sólo si hay una constante c del tipo n tal que $[c] = d$ y $(\exists^m F)F^n = c \in K$. Entonces, $(\forall^m F)\mu_A \in K$ si y sólo si para toda $d \in X_{(m,n)}$, $VAL_{A(d/F)}(\mu)H\langle\ \rangle$

(6) Por un argumento similar al anterior, se puede probar que VAL_A cumple con las cláusulas correspondientes cuando δ es $(\forall^j x)\mu$ o $(\forall x)\mu$

Por lo tanto, dado que VAL_A cumple con las condiciones para $val_{M,A}$, M^K es una interpretación λ^jRRC*-L^+. Sea A^K la asignación en S^K tal que $A^K(u) = [u]$, donde u es una variable de predicado o de individuo. Ahora bien, es obvio (por LL* y las definiciones) que $\delta_A^K \in K$ si y sólo si $\delta \in K$. Por otra parte, de la definición de VAL_A se sigue que $VAL_A(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si $\delta_A \in K$, para cualquier asignación A y *fbf* δ. Por lo tanto, $VAL_A^K(\delta)H\langle\ \rangle$ si y sólo si $\delta \in K$. De este modo A^K satisface a Γ en M^K. También todo axioma de Σ-RRC$^*_{\lambda j}$ es verdadero en M^K; asimismo MP y UG preservan la verdad en M^K. Restrínjase M^K a L. Obtenemos, entonces, una interpretación λ^jRRC*-L y asignación A^K que satisface a Γ.

Q.E.D.

4. *Aspectos filosóficos representados en la semántica*

Hay dos tendencias generales con respecto a la naturaleza de la predicación: una en la cual la predicación se toma como fundamental e irreductible, y otra en la que se interpreta en términos de pertenencias a un conjunto. Cuando la predicación se toma como fundamental, sus características estarán determinadas por el contexto filosófico presupuesto: diferentes teorías filosóficas de la naturaleza de los universales, tales como el nominalismo, realismo lógico y conceptualismo, resultarán en diversas concepciones de cuáles han de ser los aspectos esenciales en la predicación.[3]

La semántica estándar para lógicas de segundo orden, sea de modelos simples o generales, se ubica dentro de la segunda tendencia relativa a la predicación y, por esta razón, asigna conjunto a las variables y constantes de predicados. Es suficiente recordar que en esta semántica "$P(a_1 \ldots a_n)$" es verdadera si y sólo si el n-tuplo de los objetos designados por "a_1"... y "a_n" pertenece al conjunto que "P" representa. Esta perspectiva no está en concordancia con las características propias del conceptualismo realista ramificado, teoría filosófica que se ubica más bien dentro de la primera tendencia con respecto a la naturaleza de la predicación. En esta forma de conceptualismo, a

[3] Para detalles del modo en que esas teorías condicionan la predicación, *cfr.* Cocchiarella, 1986.

diferencia de lo asumido en la semántica estándar, los predicados representan conceptos y la predicación no se interpreta como una relación de pertenencia de un objeto en un conjunto, sino más bien como una relación irreductible: la relación que se presenta cuando un objeto cae dentro de un concepto. Por otra parte, de acuerdo con la misma teoría filosófica, los conceptos han de ser vistos como capacidades congnoscitivas para clasificar e identificar objetos, es decir, como entidades propiamente intensionales. Por los aspectos señalados, es evidente que cualquier semántica formal que trate de incorporar propiamente la perspectiva conceptualista de la predicación tendrá que separarse necesariamente de la estándar. De ahí que queramos explicar, a continuación, en qué forma la semántica que hemos formulado se diferencia de la estándar y mostrar hasta donde es que logra representar aspectos propios del conceptualismo.

De los diversos elementos que componen nuestra semántica hay varios cuya función es evidente: el conjunto D claramente constituye el conjunto de individuos, pues las variables y constantes individuales toman sus valores en ese conjunto; el conjunto E representa el conjunto de individuos existentes, ya que es el dominio del cuantificador universal de individuos y, finalmente, el conjunto Y_n es el conjunto de los universales correspondientes a predicados de adicidad n, debido a que las variables y constantes de predicado de adicidad n toman sus valores en este conjunto. La semántica exige, mediante la cláusula (6), que ningún universal de adicidad n ha de ser de adicidad m y viceversa, si $m \neq n$. Nótese que no hay nada en la semántica que nos obligue a pensar en los elementos de un conjunto Y_n de universales como entidades extensionales, como es el caso de los conjuntos. Es nuestra intención, más bien, que se piense en los universales de Y_n como conceptos y es, sobre esta base, que tienen sentido las cláusulas impuestas a los diversos elementos de la semántica.

De acuerdo con el conceptualismo ramificado, la formación de conceptos constituye una jerarquía infinitamente enumerable de niveles, en la cual los conceptos formados en un nivel son tomados como base para la formación del siguiente nivel mediante la cuantificación sobre todos aquellos conceptos y la clausura de lo resultante bajo las operaciones booleanas. Los conceptos formados en esta jerarquía los llamaremos "constructivos" o "predicativos" debido a que su desarrollo se da en concordancia con el principio de círculo vicioso de Russell, aplicado a la formación de conceptos. El conjunto de conceptos predicativos de adicidad n construidos en determinado nivel j de formación de conceptos estará representado en la semántica por el conjunto $X_{(j,n)}$. Evidentemente, cada concepto formado de acuerdo con los principios del conceptualismo ramificado ha de ser considerado como miembro del conjunto de conceptos (sean predicativos o no). Esta idea está expresada en la cláusula (4), en la que se afirma que el conjunto de conceptos de adicidad n debe contener el cojunto de conceptos predicativos de adicidad n formados en cualquier nivel. Otro aspecto importante de la estructura de la formación de los conceptos predicativos es el carácter acumulativo de cada nivel de formación, es decir, los conceptos construidos en determinado nivel constituirán conceptos de cualquier nivel superior de formación. De ahí la cláusula (3) de la semántica, en la cual se exige que $X_{(j,n)}$ sea un subconjunto de $X_{(k,n)}$ cada vez que $j \leq k$.

La versión de conceptualismo asumida en este artículo también postula objetos correlacionados con los conceptos predicativos. Tales objetos los llamaremos "constructivos" y constituirán la referencia de las nominalizaciones de los predicados que designan conceptos constructivos o predicativos. La correlación de conceptos predicativos con los objetos constructivos estará representada en la semántica por la función f. Precisamente, la cláusula (10b) en la caracterización de esta función expresará el supuesto de que habrá un correlato a todo concepto constructivo. Los objetos constructivos, de acuerdo con el conceptualismo realista ramificado, han de tomarse como existentes, supuesto que es expresado por la cláusula (2) de la semántica. Cada conjunto de estos objetos existentes correlacionandos con los conceptos de determinado nivel j se encontrará representado en la semántica por el conjunto C_j. Debido a la naturaleza acumulativa y jerarquizada de la formación predicativa de conceptos, los objetos constructivos han de verse en forma igualmente jerarquizada y acumulativa. Por ello, la cláusula (5) de la semántica, donde se exige que C_j sea un subconjunto de C_k en el caso de que $j \leq k$.

Mencionamos anteriormente que la forma de conceptualismo asumida en este artículo ve en la predicación una relación irreductible, no interpretable en términos de pertenencia a un conjunto. Esto es uno de los aspectos que nuestra semántica permitiría incorporar, pues la predicacíon en ella no se interpreta como la relación de pertenencia a un conjunto, sino que se deja abierta la posibilidad de que constituya una relación fundamental entre el universal y los objetos de los cuales éste se predica. Esta relación de predicación tomada en *sentido extensional* es la relación H definida por la cláusula (9) relativa a una estructura RRC*. Nótese que cada miembro en relación H constituye un par ordenado, donde el primer elemento de este par es un universal perteneciente a algún conjunto Y_n de universales de adicidad n y el segundo elemento es un n-tuplo de elementos del conjunto D. De este modo, el que un universal se relacione con un n-tuplo de individuos por la relación H indicará que ese universal se predica de los individuos pertenecientes al n-tuplo. Nuestra semántica, a diferencia de la estándar, interpretará la predicación no en términos de pertenencia a un conjunto, sino más bien respecto a la relación H : $P(a_1 \ldots a_n)$ será verdadera si y sólo si el n-tuplo de objetos designados por "a_1"... "a_n" se encuentran en la relación H con el universal designado por "P".

Hemos mostrado en qué forma los elementos en nuestra semántica permiten representar diversos aspectos del conceptualismo ramificado. El carácter jerárquico y acumulativo de los conceptos predicativos, la correlación de estos conceptos con ciertos objetos, la diferenciación de estos correlatos con otros objetos existentes son todos aspectos de esa versión de conceptualismo que se capturan en la semántica. Es importante hacer notar que la semántica no excluye la posibilidad de conceptos no predicativos de adicidad n, los cuales, si existieran, tendrían que ser miembros del conjunto Y_n. Esto significa que la semántica podría permitir representar algunos aspectos del llamado "conceptualismo ramificado holístico", según el cual la formación de conceptos incluye conceptos impredicativos, cuya construcción presupone la formación predicativa.

Además de mostrar aquellos aspectos del conceptualismo realista ramificado representados en la semántica, también hemos indicado dos de los aspectos esenciales que diferencian esta semántica de la estándar: el dejar abierto, por una parte, la posibilidad de que las variables y constantes de predicados designen entidades que no sean conjuntos y, por otra parte, la posibilidad de que la relación de predicación sea irreductible y diferente de la de pertenencia de un objeto a un conjunto. Estos elementos justifican el interés que posee esta semántica como alternativa de la estándar.

BIBLIOGRAFÍA

Cocchiarella, Nino, 1986, *Logical Investigations of Predication Theory and the Problem of Universals*, Bibliopolis Press, Nápoles.

——, 1986b, "Conceptualism, Ramified Logic and Nominalized Predicates", *Topoi*, no. 5, pp. 75–87.

Freund, Max A., 1989, *Formal Investigations of Holistic Realist Ramified Conceptualism*, tesis doctoral, Universidad de Indiana, Bloomington.

———, 1991, "Consideraciones lógico-epistémicas relativas a una forma de conceptualismo ramificado", *Crítica*, no. 69, pp. 3–25.
Simms, John, 1980, "A Realist Semantics of Cocchiarella's T^*", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, no. 21, pp. 1–32.

Recibido: 8 de julio de 1992

SUMMARY

We develop a second order logical system with ramified lambda operators, having ramified conceptualism as its philosophical background. Such a system is shown to relatively consistent. Finally, we construct a non-standard second order semantics and prove a completeness theorem with respect to a notion of validity, provided by the semantics, and certain extensions of the second order system.