FORMALISMO E INCOMPLETUD

CARLOS LUNGARZO
Consejo Nacional de Investigaciones
Científicas y Técnicas, Buenos Aires

I. *Introducción*

Las proposiciones que parecen establecer límites a la posibilidad de formalizar diversas teorías lógico-matemáticas, y proporcionan ciertos resultados interpretables como teoremas de incompletud, hacen reflexionar acerca de la relación entre la "mayor riqueza expresiva" de una teoría formal y del correlativo "mayor riesgo" de que la misma pueda volverse contradictoria. Aclararemos esta suposición con algunos ejemplos clásicos.

Consideremos, en primer lugar, un lenguaje formalizado cuyos únicos elementos son: variables proposicionales, conectivas, signos de puntuación, y las expresiones bien formadas (fórmulas) que se construyen a partir de ellos de la manera conocida. A esta "*morfología*" de nuestro lenguaje (en adelante, L), le agregamos una de las infinitas "*teorías*" (i.e., los axiomas y teoremas) que expresan la lógica proposicional clásica. Por otro lado, sea M una estructura que pertenece a la variedad de los *grupos*, más particularmente, de los que son isomorfos al grupo de enteros módulo 2.

Una primera tentación sería la de considerar a la clase básica de M (digamos D_M) como dominio de una interpretación que proveería un *modelo* para el lenguaje L. Una correspondencia natural sería la que a cada variable proposicional le asigna un objeto de D_M, al signo de bicondicional la diagonal de D^2_M y al conectivo definido por:

$$(\ldots) \vee (\text{- - -}) \cdot -((\ldots) : (\text{- - -}))$$

la suma de Z_2.

Sin embargo, advertimos enseguida lo siguiente:

(1) Al interpretar un lenguaje respecto de una estructura, los símbolos impropios (lógicos) como "si y sólo si" "o", ect., no pueden tener como correspondientes relaciones ni funciones, ya que esto está reservado para los predicados y operadores (de lógicas más "fuertes").
(2) Si las variables proposicionales "rangan" sobre objetos, ¿qué símbolos quedarán para que recorran valores de verdad?

En rigor, no estaríamos interpretando al cálculo proposicional, sino a una lógica muchísimo más fuerte (p.e., un lenguaje funcional de primer orden con igualdad), en la cual las relaciones de la lógica proposicional son expresadas desde "afuera". Este primer ejemplo, induce a pensar en la importancia del manejo de un lenguaje más fuerte que uno dado, para realizar afirmaciones (en este caso semánticas) sobre éste, desde afuera del mismo.

De todos modos, observando a L "desde arriba", la interpretación del mismo (o, mejor dicho, la interpretación de la teoría dentro de la cual formulamos a L) nos muestra que la estructura Z_2 sirve de "modelo"; en el doble sentido de que: (1) Si P es un predicado (operador) de L, entonces *existe* una relación R_P (función) en M, tal que ciertas variables "están vinculadas" por P si y sólo si los objetos asignados a ellas lo están por R_P (*morfológico*); y (2) Si E es un axioma o teorema de L, entonces su correspondiente E' es una proposición sorbe elementos de M, que es "verdadera", (*teórico*). De aquí se deduce que L es *coherente* respecto de M. Además, como es bien sabido, al valer la recíproca de (2), L es *completo* respecto de M.

Asimismo, lo que quizá, para los propósitos de nuestro ejemplo, sea más importante, L es *decidible,* pues M proporciona un método mecánico de decisión. Obviamente, la forma en que se determina la completud y coherencia de L es *constructiva*, y, por lo tanto, es de esperar que esas demostraciones provean, por sí mismas, un mecanismo para establecer la "teoremicidad" o no de una proposición.

En cambio, un segundo ejemplo, familiar en la literatura lógica, muestra que un aumento en la "expresividad" del lenguaje, puede llevar a perder algunas de las condiciones antes expuestas. Si L' es un lenguaje funcional de primer orden, es obvio que, morfológicamente, el espectro expresivo se amplía, pues L' puede interpretarse (*superyectivamente*, i.e., cubriendo íntegramente el dominio) sobre estructuras bastante generales, compuestas por un conjunto básico (en general, numerable) y una familia también numerable de relaciones y operaciones. Sin embargo, si bien la riqueza expresiva de L' nos lleva lejos de la pobreza de recursos del lenguaje proposicional L, y aun cuando la *coherencia* y *completud* se mantienen, sabemos, desde Church, que este sistema indecidible, como lo podía hacer sospechar, en principio, el hecho de que la demostración de los teoremas de Gödel-Tarski-Skolem-Löwenheim, etc., no sea necesariamente constructiva.

Estos ejemplos sugieren que, a medida que aumenta la "especificidad" morfológica de un lenguaje, algunas propiedades metalógicas se tornan más difíciles (o imposibles) de satisfacer. Si imponemos a los elementos de un sistema la condición de figurar en ciertos postulados *propios* (como sucede cuando aplicamos las teorías de primer orden a disciplinas matemáticas concretas), estamos exigiendo (dicho sea sin rigor) mayor "información" acerca de los elementos del posible modelo, y podría suceder que, cuando a un sistema se le fijan exigencias tan fuertes, no queden "grados" de libertad, a determinar, como serían: la posibilidad de que sea coherente, completo, la existencia de algoritmos de decisión, etc.

Un caso típico de limitación en el sentido de no satisfacibilidad de algunas de estas condiciones, es el revelado por el teorema de Gödel de 1931.

Si N es una estructura que, interpretada "intuitivamente", constituye un "representante" del conjunto de números naturales, con las propiedades habituales de *monoide ordenado*, y L es un lenguaje formal del cual se pretende que admita a N como modelo, entonces resultará que:

(1) Las condiciones tradicionales no se satisfacen, porque, si es, por ejemplo, omega coherente, entonces no es completo.
(2) *Si* el lenguaje es coherente, *entonces*, toda prueba P de dicha coherencia, es tal que no existe expresión alguna p, perteneciente al mismo, que constituya la formalización canónica de P.
(3) Existen fórmulas del lenguaje que son indecidibles.

Lo que el punto (1) expresa, es que hay proposiciones modelísticamente verdaderas, que no son teoremas, *siempre y cuando* se suponga que la teoría funcional de primer orden, en cuestión, admite alguna forma de coherencia. Decir que el sistema es incompleto, sin más, implicaría dar una prueba de su coherencia (por lo menos, en el sentido absoluto), lo cual es evidente que no puede realizarse por procedimientos "elementales".

El segundo punto es quizá el que ha inspirado mayores cavilaciones filosóficas sobre el carácter de las ciencias formales. Como es sabido, si queremos demostrar la coherencia de la lógica proposicional ordinaria, necesitamos utilizar la regla de inducción (no transfinita) que, desde luego, no es formalizable dentro de la débil "teoría" proposicional. Por su parte, la coherencia de la lógica de predicados requiere también el uso de la misma, y esto hace sospechar que la no contradicción de estos sistemas puede ser demostrada sólo con recursos formalizables, al menos, en una teoría de conjuntos débil o en una aritmética. De manera análoga, si A es la teoría de primer orden interpretable a través del monoide de los números naturales, resulta que su carácter no contradictorio requiere de una prueba que no puede ser formalizada dentro de ella misma, cualesquiera sean las extensiones no contradictorias que se hagan de su conjunto de postulados.[1]

De aquí surgió la idea, posteriormente profundizada, según la cual la prueba de no contradicción de una teoría o lenguaje lógico requiere de recursos que no son formalizables (a veces, ni siquiera morfológicamente) en el sistema analizado, y exigen el pasaje a un nivel "superior".[2]

En el célebre "manifiesto" de la escuela formalista,[3] Hilbert se expedía por la drástica formalización del conocimiento matemático disponible, en forma de sistemas de cálculo rigurosamente organizados mediante un estricto encadenamiento deductivo. Pero esa codificación no consistía solamente en la reducción de entidades conceptuales a sistemas simbólicos, sino que exigía el cumplimiento de que todos los procesos demostrativos pudiesen ser conducidos en la absoluta seguridad de no llegar jamás a contradicción. En particular, aun cuando las teorías mismas tratan de rescatar el famoso "paraíso de Cantor", sin embargo, las metateorías deberán hacer, a lo sumo, una apelación al infinito potencial (caso de la inducción corriente que se aplica a ordinales *finitos*).

El programa formalista parece encontrar en el teorema de incompletud de Gödel, una dificultad esencial. Porque, para dar cumplimiento a las pretensiones hilbertianas, sería necesario que existiese una demostración metamatemática que garantizase la no contradictoriedad del lenguaje aritmético, mostrando, por ejemplo, que una determinada fórmula del mismo (v.gr.: $(0 = sg(0))$)no es teorema; pero tal demostración debería ser "finitista", en el sentido de que pueda ser llevada a cabo utilizando reglas de inferencia, cuyos "argumentos" sean exclusivamente entidades finitas (v.gr., podría

[1] Gödel, *Monats. Math. Phys.*, 38; pp. 173 ss., (satz XI).
[2] Shoenfield, *Mathematical Logic* (Massachusetts, 1967), ch.8-9.
[3] Hilbert, *Math. Ann.*, 88; pp. 151 ss.

utilizarse libremente la inducción aritmética en el sentido de Peano, ya que los argumentos de la regla: "(x) ($P(x)$ entonces $P(sg(x))$), implica $P(y)$" son números naturales, que son interpretables como conjuntos finitos). A poco que se piense, se ve (como probara luego Gentzen) que lo "más probable" es que la inducción ordinaria "no alcance", pues para asegurarse que "$0 = sg(0)$" no es demostrable, será necesario "recorrer" todas las deducciones posibles en el lenguaje y verificar que ninguna de ellas "termina" en la fórmula prohibida. Sin embargo, aun cuando la cantidad total de esas deducciones es numerable, su tipo de orden no es el de los números naturales, como se advierte a simple vista (más aún, el ordinal hasta el cual habrá que llegar en la inducción es ϵ_0).

De aquí la dificultad para formalizar la prueba de no contradicción *dentro* del sistema mismo, porque parece muy extraño pensar en una demostración por inducción transfinita, que admita una formulación en términos del lenguaje de la aritmética usual. Además, tampoco podemos imaginarnos métodos deductivos finitistas que no admiten ser subsumidos en el lenguaje de las funciones recursivas. (V.gr. a partir de la llamada "*tesis de Church*").

Sin embargo, la prueba de Gödel no deja lugar a dudas: cualquiera sea la demostración de la coherencia del lenguaje, ella no es formalizable dentro del mismo.[4]

2. *Estructura de las Pruebas de Incompletud*

Las características de las demostraciones de los diversos teoremas considerados "límites", son suficientemente conocidas. Sin embargo, quizá valga la pena hacer algunas reflexiones sobre la estructura lógica de algunas de ellas, en particular de las proposiciones originales de Gödel de 1931.

En este último caso, la idea general estaba motivada en cierta medida por las formas de razonamiento utilizadas en

[4] Respecto del formalismo, comparar con Bunge, *Intuición y Ciencia* (Buenos Aires, 1965), p. 76.

las antiguas paradojas: construir un conjunto de enunciados que expresen propiedades sobre sí mismos, pero teniendo cuidado de que la relación entre esos enunciados y lo que ellos expresan, no implique la violación de ninguna cláusula de niveles.

Efectivamente, esta (aparente) autodenotación se realiza por camino indirecto. 1o. Sea F una fórmula de nuestro lenguaje (digamos L); 2o. Se considera una *proposición* f del lenguaje natural o del lenguaje de la lógica intuitiva que expresa propiedades sobre los elementos del modelo (es decir, sobre números) que constituye la interpretación "natural" de F; 3o. Se determina un enunciado E_f de la epiteoría de L, que se relaciona con f a través de la conocida aritmetización de la sintaxis; 4o. Eventualmente, podrá suceder que E_f haga referencia, desde la epiteoría, a la fórmula F de L.

A diferencia de lo que sucede en las paradojas propiamente dichas, F no es denotada por sí misma, sino por un enunciado E_f que está vinculado con F a través de la aritmetización; esto no constituye, desde luego, ninguna transgresión a la división en niveles.

El proceso que conduce a la construcción de la proposición crucial, se realiza de la siguiente manera:

(1) Se establece una correspondencia inyectiva entre la clase S de los símbolos de L, y los números naturales.

(2) Se extiende dicha correspondencia al caso de expresiones, mediante el conocido artificio de formar el producto de las exponenciales $P^{n}{}_{i}$ en donde P_i es el i-ésimo número primo, y ${}^{n}{}_{i}$ es la coordenada del *i*-ésimo símbolo de la expresión. La unicidad de la descomposición en números primos garantiza la permanencia de la inyectividad.

Sin embargo, esta extensión *no* es canónica, en el sentido de que la expresión (s^1) y el símbolo s^1 no pueden identificarse como debería ocurrir normalmente.

(3) Extendemos dicha correspondencia también a sucesiones de expresiones.

(4) A través de la aritmetización, un enunciado metateórico $E(\ldots f\ldots)$ que es función de una fórmula f, puede subsumirse en el lenguaje aritmético, en la forma de expresión $E(\ldots nf\ldots)$ siendo nf el número correspondiente a la fórmula f.

De esta manera, las relaciones entre expresiones y las propiedades de las mismas, son paralelizables mediante relaciones y propiedades de números (así, v.gr., "ser una subfórmula de" tiene su correspondiente en "dividir a").

(5) La relación de *deducción* (cuyo carácter es destacado en cualquier lenguaje metalógico) encuentra también su formulación numérica, y es necesario enfatizar cómo el carácter efectivo de la misma (cuando existe) se vincula con el carácter recursivo de una función.

Como es sabido, una fórmula A es *deducible* de un conjunto de hipótesis $A_1, \ldots\ldots, A_n$ si y sólo si existe una sucesión finita cuyo elemento final es A, y tal que, cada paso es una de las A_1 o un axioma de L, o es inferida directamente de pasos anteriores. De la misma manera, una función f es *primitiva recursiva,* si y sólo si existe una sucesión $f_1 \ldots\ldots; f_m$ de tal modo que la función final es f, y cada función es una función inicial o es *dependiente* directamente de anteriores.

(6) Finalmente, se construye una proposición X tal que:

(i) Si L es ω-coherente, X no es demostrable.

(ii) Bajo hipótesis adecuadas de coherencia, X tampoco es refutable.

(iii) X es indecidible, y, por lo tanto, la coherencia de L no es demostrable mediante una prueba cuya contrapartida aritmética constituya un teorema de L.

3. *Interpretaciones habituales de los Teoremas de Incompletud*

Al "enriquecer" los sistemas axiomáticos elementales, agregándoles las constantes específicas que los convierten en teorías aritméticas, se produce un deterioro respecto de la satisfacibilidad de los requisitos teóricos clásicos, como la completud y la decidibilidad. Por otro lado, la imposibilidad de demostrar "desde adentro" la coherencia del lenguaje, revela el carácter relativo de este tipo de pruebas metalógicas, y permite advertir que las demostraciones de esa naturaleza deben ser ejecutadas dentro de lenguajes de potencia mayor, sean o no axiomatizados.

Esta situación ha conducido a un gran número de filósofos y epistemólogos a extraer corolarios gnoseológicos y metafísicos, excesivamente espectaculares en relación con la "modestia" y particularidad del sistema y recursos utilizados en las pruebas de incompletud.

3.1 *Interpretaciones materialistas*

La eficacia de las explicaciones materialistas-dialécticas en el campo de las ciencias sociales (en el cual es decisivo su aporte), no se mantiene, al extrapolar los métodos del marxismo al área de las disciplinas formales, y, particularmente, a la de la matemática. De todos modos, los autores de esta tendencia cumplen una función adecuada al destacar los equivocados criterios del formalismo excesivo, que tiende a transformar a esta ciencia en un simple sistema de códigos radicalmente escindido de la aplicabilidad empírica, y a reivindicar la conexión (quizá la única relevante) entre la matemática y la física. En cambio, exageran notablemente al atribuir a los teoremas de incompletud una transcendencia filosófico-metodológica de la que obviamente carecen.

De todos modos, no es frecuente encontrar una formulación precisa de las tesis dialecticistas acerca de los problemas del antiformalismo, o que revista un carácter relativamente objetivo. Sin embargo, existen unos pocos trabajos rescatables.[5]

Las tesis dialecticistas pueden clasificarse gruesamente en varias proposiciones principales:

(3.1.1) Los teoremas límites del formalismo y, en general, todos los enunciados que involucran el incumplimiento de algunas de las cláusulas del programa de formalización total, revelan que existe un componente dialéctico que, si bien no aparece de manera explícita en la lógica simbólica, se hace patente a través de la mayor flexibilidad que presentan las nociones manejadas por esta lógica, respecto de la lógica clásica.[6]

Al parecer, este tipo de argumentaciones que deben ser incluidas entre las consignas más moderadas y razonables de los filósofos dialecticistas, se apoyan parcialmente sobre la hipótesis levemente exagerada, de acuerdo con la cual las pruebas de incompletud, indecidibilidad, etc., entrañan una palmaria refutación de algunas aspiraciones formalistas. Sin embargo, si analizamos los célebres "manifiestos" de los hilbertianos,[7] y comparamos el contenido de las afirmaciones allí formuladas, con expresiones de los propios autores de los teoremas,[8] advertimos que las mismas palabras de Gödel autorizan a concluir que los teoremas límites no establecen una derrota para la teoría de la prueba del formalismo, sino que enfatizan solamente la imposibilidad de ejecutar las demostraciones de coherencia *dentro* de los lenguajes mismos. O sea, queda abierta la posibilidad de que existan demostraciones de carácteres finitista, que no puedan ser "reflejadas" en el formalismo del mismo sistema cuya coherencia se intenta probar; aunque es evidente que tenemos poca idea

[5] Cfr., por ejemplo Stroie, *Analele Universitati Bucaresti,* 1963, p. 67.

[6] Esta es por ejemplo la tesis de Kollman, *Znachenie simbolicheskoi lóguiqui* (Moscú, 1959), *Passim.*

[7] Cfr. Hilbert, en *Math. Ann.,* 88, p. 151 y ss.

[8] K. Gödel, "Über formal..." p. 197, *ad. finem.*

de lo que serían semejantes pruebas.

De todos modos, debería computarse como un acierto de esta interpretación, el hecho de admitir el carácter dialéctico de la investigación lógico-matemática (que no sería sino un caso particular del carácter dialéctico de la producción y elaboración del conocimiento científico, el cual es subsidiario, en el mejor de los casos, de la (supuesta) dialéctica de las ciencias sociales) pero no el de postular que esta dialecticidad es intrínseca a los "objetos" lógicos mismos.

La idea central de la que depende la concepción dialecticista de las ciencias formales, y cuya apresurada interpretación ha contribuido a acentuar las diferencias existentes entre la epistemología de origen materialista y la de origen analítico-formalista, es que las disciplinas como la lógica y la matemática no trabajan con objetos cualitativamente distintos de las entidades reales, sino con cosas que, aunque posean una diferenciación funcional respecto de los entes físicos, participan de las características de los demás componentes del mundo fáctico. Debe insistirse en que los dialécticos no están enfrentados con los formalistas por el nominalismo de éstos, ni con los intuicionistas por su particular forma de constructivismo, sino que hacen un desafío simultáneo a todas las corrientes que intentan separar la "forma" de las proposiciones (y, por tanto, admitir la existencia de objetos formales), del contenido que las vincula con el mundo empírico, y que consideran a las "estructuras" lógicas como construcciones huecas y estáticas que reciben contenido mediante un proceso de interpretación que, además, es mantenido alejado del área de los procesos reales.

Si se toma en cuenta la reivindicación de los dialecticistas, de que los objetos lógicos son productos de una praxis simultáneamente empírica y mental, y se renuncia a toda distinción esencial entre objetos formales y fácticos (incluso metodológicamente), la postulación de una dialéctica subyacente a las ciencias lógico-matemáticas deja de mostrarse sin sentido. Pero, de todos modos, sería necesario justificar esta superposición de niveles, lo que, hasta el presente, no ha sido hecho satisfactoriamente por los representantes de esa tendencia.

Vale decir, entonces, que no son los teoremas de Church, Gödel, etc., los que muestran el carácter *no estrictamente formal* de la aritmética (ya que, ellos mismos constituyen enunciados de naturaleza tradicionalmente formal, y sus consecuencias se desarrollan dentro del nivel de lo abstracto, mediante procesos lógicos de inequívoca estructura formal), sino que, *bajo la hipótesis* (que, según acabamos de recordar, necesita todavía de justificación) de que la matemática *no es estrictamente formal,* podría inferirse de que esa naturaleza, por así decir "dialéctica" de la realidad matemática, se muestra en diversos cuerpos teóricos de la misma, v.gr., en el teorema de Gödel. Sin embargo, los dialécticos optan en general por el camino opuesto, y deducen ese carácter dialéctico de teoremas formales y sus respectivas demostraciones. Debe enfatizarse, al respecto, que el teorema de Gödel, el de Church y sus corolarios, no tienen un carácter *privilegiado* desde el punto de vista de la metodología de la matemática. Habría que preguntarse por qué son esas proposiciones las que revelan la "crisis" del formalismo, y no, por ejemplo, la imposibilidad de encontrar espacios vectoriales que sean cuerpos conmutativos y tengan dimensión continua, o la imposibilidad de encontrar normas no equivalentes sobre los reales. En todo caso, las conclusiones relativas a la dialecticidad deberían extraerse como resultado de una reflexión general sobre la tarea del matemático, y, fundamentalmente, sobre la relación *entre la matemática y las ciencias físicas* (que son, al fin y al cabo, las que le otorgan "sentido"), y no como corolario de algunas proposiciones lógicas en particular, ya que, entonces, sería plausible pensar que nuevos descubrimientos lógicos podrían modificar la tesis acerca de la naturaleza de esta ciencia, tesis que parece ser de carácter extralógico. (V.gr., ¿qué significaría, ontológicamente, una proposición que afirmara completud o decidibilidad?)

(3.1.2) Al probar la (parcial) dificultad para cumplimentar el programa formalista, el teorema de Gödel revela la existencia de áreas matemáticas cuya naturaleza dialéctica es inaccesible a la formalización total.[9]

Esta tesis privilegia excesivamente el valor filosófico (ontológico y gnoseológico) de los teoremas de las ciencias formales, y atribuye a determinadas proposiciones (que están formuladas *dentro* de un lenguaje, aun cuando sea necesario un metalenguaje no totalmente formalizado para "contener" a todos los niveles lingüísticos imprescindibles para el desenvolvimiento de las demostraciones) la virtud extralógica de poder decidir *si un sistema axiomático es o no adecuado a una cierta forma de "realidad" matemática.*

Al comprobar que un enunciado expresa *"su propia indemostrabilidad"*, para decirlo alegóricamente, el científico que opera con el sistema axiomático al cual este resultado concierne, tiene la oportunidad de advertir que ese mecanismo sintáctico, construido con la finalidad de formalizar la aritmética intuitiva, no satisface todos los requisitos establecidos en un principio para los sistemas de esa naturaleza, y, como natural consecuencia, se encuentra en la disyuntiva de (a) o moderar sus exigencias de tal modo que alguna de las condiciones prescritas y que el sistema no cumple, sea levantada, o (b) prescindir de los conceptos metodológicos o filosóficos que maneja actualmente, y cuyas propiedades hacen aparecer al resultado obtenido como paradójico.

La segunda alternativa conduciría a abandonar o, por lo menos, a mutilar severamente, ciertas nociones básicas y esenciales, como las de *verdad, deducción, completitud,* etc., lo que entrañaría una modificación muy grave en el puente que tradicionalmente la lógica ha tendido entre los lenguajes

[9] Problemas vinculados a esta clase de tesis dialecticistas, aparecen en UEMOV, "Ontologuíchesquiie predpos'ilqui lóguiqui", en *Vopros'i Filosofii,* año 1969, núm. 1, pág. 67 y ss. También Popóvich toca de cerca este aspecto: Popóvich, "Ob universall-nosti lóquiqui" (id. publ.), año 1969, núm. 7, pág. 103 y ss.

puramente formales y el sentido común y científico que les otorga inteligibilidad. Por tanto, frente a esta situación, la salida más plausible parece ser la de tomar las exigencias a cumplir, menos rigurosas, y fijarlas en todo caso, como condiciones deseables a las cuales se tiende "asintóticamente".

El sistema formal, entonces, debe ser pensado como una máquina a la cual el usuario le fija cierta tasa de producción, bajo ciertas condiciones de funcionamiento, lubricación, provisión de combustible, etc. Si esa tasa es inalcanzable, el industrial podrá elegir entre el abandono de la máquina y la adquisición de otra (que eventualmente podrá no responder a las exigencias de esta industria), o la moderación en cuanto al provecho que pretende obtener con la misma. Los teoremas límites, entonces, son *productos de la máquina* (y no enunciados externos, epistemológicos, gnoseológicos o metafísicos!), que el lógico obtiene con el auxilio de otras máquinas "menos automatizadas" (menos formales), como, v.gr., el lenguaje coloquial, la aritmética intuitiva, etc., y que el propio lógico interpreta *desde afuera,* decidiendo en función de ellos si su mecanismo debe ser abandonado, reemplazado o tratado de manera distinta. Esa actitud, equivalente a decidir "de qué manera la máquina formal se adecua al modelo intuitivo", es asumida por el lógico, y no por la máquina misma, que sólo sirve a aquél como un hecho más de la experiencia, y que es valorado de acuerdo con sus propias concepciones (filosóficas o científicas).

(3.1.3) Los teoremas límites, al conducir a situaciones paradójicas, debilitan la validez del principio de no contradicción, ya que esas situaciones obligan al científico a manejarse con teorías que se excluyen y complementan.[10]

[10] Entre los trabajos más significativos que tocan de alguna manera el tema, ver: J. Gabriel, "O predmetu dialektické a formalní logiki", *Sborník Pr. Fil. Fak.* (Univ. de Brno), Rocnik IX, p. 99; L. Toshchenovskii, "O dialektichescoi loguique..." id., Rocnik XV, p. 33 y K. Allexandrova, "Pa niakoi v'prosi na diallektikata..." (Academia de Ciencias de Bulgaria), tomo XV, p. 55.

Si no aceptamos totalmente una concepción "realista" de carácter dialéctico respecto de la naturaleza de los entes lógicos, resulta claro que la condición de *"paradójico"* que exhiben los resultados que estamos examinando, aparece solamente cuando juzgamos a los sistemas axiomáticos desde el punto de vista del cumplimiento de determinadas exigencias metalógicas. Así, por ejemplo, la existencia del conjunto de Russell es paradójica en la teoría de conjuntos cantoriana, pero deja de serlo, entre otras, en la lógica de Da Costa.

La paradojicidad de los teoremas de Gödel no proviene del origen dialéctico del lenguaje lógico (a menos que, lo que quizá pueda hacerce, extendamos el significado de 'dialéctico' más allá de sus connotaciones naturales) sino del manejo ("fuera" del lenguaje cuya coherencia se estudia, pero "dentro" de una familia más o menos rica de lenguajes lógicos y descriptivos) de una de terminada teoría de modelos, de una lógica bivalente de carácter clásico y de una concepción *canónica* de "demostración". Un trabajo interesante que podría realizarse, y que pese a no haberse concluido, constituye un ejemplo (*no una prueba*) de aceptación del teorema de Gödel como una paradoja más, sería el de *"completar"* la aritmética elemental, aún a costa de su coherencia, hasta obtener un sistema incoherente pero máximalmente no trivializable (si es que existe una modificación de la lógica subyacente que lo haga posible).[11]

Respecto de la complementariedad (y, en cierto sentido, contradictoriedad) de las teorías matemáticas que deben manipularse simultáneamente para compensar la falta de completud de cualquiera de ellas, hay que reiterar que se encuentra ligada al carácter espiroidal y complementario de la investigación científica y de la actividad social en general.

[11] La construcción de diversas teorías matemáticas incoherentes pero no trivializables, se propone en las memorias de: Arruda, *Consideracoes sobre os sistemas NF*, Curitiba, 1964. Da Acosta, *Calculs de Prédicats avec Egalité...* C.R.Ac.Sc., París, 258 (1964), pp. 1111-1113. L. de Moraes, *Sobre a lógica discursiva,* São Paulo, 1970.

3.2 *Interpretaciones "clásicas"*

Numerosas tendencias filosóficas (fenomenológicas, neorealistas, estructuralistas, etc.) cuyas especulaciones específicas se desarrollan al margen, y, a menudo, en oposición al método científico, han intentado, sin embargo, incorporar los resultados más espectaculares relativos a la incompletud de sistemas, a sus propias teorías, y utilizar las características más relevantes de aquéllos para abonar sus concepciones gnoseológicas, y, a veces, metafísicas.

Sería imposible formular una descripción exhaustiva de las tesis de las numerosas escuelas a las que rotulamos vagamente con el nombre de 'clásicas'. En general, lo que puede inducirse como concepción sobresaliente común a todas ellas, es la creencia de que los teoremas de incompletud e indecidibilidad entrañan una crisis para la filosofía de la lógica de todas las teorías que se restringen al plano de lo formal, aun cuando no sean estrictamente formalistas, y no tienen en cuenta la dimensión gnoseológica u ontológica de las ciencias formales. Más sugerentemente, *consiste en la refutación de la lógica que trabaja de manera científica y en posición neutral respecto de la filosofía* (v.gr. la de los farmalistas, los logicistas, y los intuicionistas, entre otros).

(3.2.1) Las pruebas de Gödel señalan la crisis del formalismo hilbertiano, y de sus pretensiones de codificar axiomáticamente todo el conocimiento matemático.

Esta afirmación puede ser correcta, si se calibra su alcance de tal manera que no se pretenda significar que los teoremas de incompletud señalan la existencia de una realidad absolutamente subsistente e independiente de la formalización (como el platonismo propugna, posición que concuerda con la del propio Gödel, aunque no es deducible de sus descubrimientos formales) sino solamente que el trabajo con los *sistemas axiomáticos formales* exclusivamente, ignorando los *sistemas axiomáticos "de contenido"* obliga al abandono de alguno de los requisitos que constituían la "garantía de sentido" para el sistema.

Es conocida la posición de Hilbert y sus colaboradores (en particular Bernays), expuesta en *Grundlagen der Mathematik,* de acuerdo con la cual la matemática pura usa esencialmente los sistemas axiomáticos formales, es decir, aquéllos en que los elementos primitivos, las fórmulas y los axiomas son propuestos *a priori,* de manera relativamente arbitraria, y no de acuerdo con la sugerencia de una disciplina ya conocida en "estado intuitivo". Así, por ejemplo, los sistemas axiomáticos para la mecánica lagrangiana, resultan de la selección de ciertas proposiciones básicas dentro del cuerpo de conocimientos de la física teórica, y de la organización de todos sus enunciados hasta formar un sistema deductivo. En cambio, los sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos, consisten en lenguajes formulados de acuerdo con ciertos requisitos puramente lógicos.

El programa formalista que, según sus detractores habría sido lesionado por el teorema de Gödel, tiene entonces dos facetas: una de ellas, la más "filosófica" de ambas, consiste en un conjunto de tesis y consignas que, en definitiva, implican la identificación de la matemática con la clase de todos los posibles sistemas axiomáticos formales, y la reivindicación de la actividad matemática, como la única esencialmente formal, con independencia de la lógica; la otra, más epistemológica, está compuesta por los requerimientos metodológicos a que esta formalización debe estar sujeta; en particular, la necesidad de que las pruebas matemáticas sean finitistas, con lo cual resulta que el infinito actual, que el formalismo conserva celosamente, debería poder ser tratado en "términos finitistas" (si es que la metateoría lo es, o sea, si tiene carácter constructivo).

En el sentido filosófico, el teorema de Gödel, más que oponer un obstáculo directo al plan formalista, se constituye en un elemento de atención lo suficientemente fuerte, como para obligar a los lógicos a reflexionar sobre el carácter antinatural y, en cierta medida, destructivo, de una filosofía de la matemática que no supedita la formalización a la previa obtención de conocimientos matemáticos por vía "empírica", sino que identifica a esa formalización con el conocimiento matemático mismo. Podría argumentarse que el teorema de Gödel muestra que la aspiración de trabajar con sistemas axiomáticos prescindiendo del aspecto "concreto" (*inhaltlich*) no puede llevarse a buen término. Esa afirmación es correcta, pero bajo la hipótesis de que los requisitos habitualmente exigidos para la formalización (coherencia, completud, etc.), son razonables, o sea, tienen sentido extraformal.

Los teoremas límites, entonces, no constituyen refutaciones para las proposiciones filosóficas de la escuela formalista, sino en todo caso, refutaciones parciales de alguno de los puntos del programa "metodológico": las conclusiones filosóficas son obtenidas tan pronto el observador científico compara las pretensiones del formalismo respecto de la organización de la matemática, con los aspectos histórico, técnico, cultural, etc., de esta disciplina, los cuales quedan distorsionados al ponerse en marcha "a toda costa" el plan hilbertiano.

Desde el punto de vista lógico-epistemológico, la valoración del grado en que los teoremas límites lesionan el plan formalista, depende de conocimientos matemáticos que aún no han sido definitivamente obtenidos, pese a que todas las evidencias hacen suponer que el requisito según el cual *la metateoría de todos los sistemas formales,* (incluso la de aquellos destinados a la sintactización de "teorías" en que intervienen transfinitos) *debe ejecutarse con el uso de recursos demostrativos que no vayan más allá del principio de inducción habitual,* es imposible de satisfacer. En principio, la prueba de Gödel sólo asegura la imposibilidad de "reflejar" la demostración de coherencia de un sistema L dentro del mismo L, dejando abierta la posibilidad de que existiese algún grado "intermedio" de demostración, la cual aún sin poder ser subsumida en L, trabajase solamente con los ordinales finitos; sin embargo, la existencia de semejante situación no parece verosímil.

(3.2.2) El logicismo, al pretender reducir la matemática a una lógica estrictamente formal, es igualmente perjudicado por los teoremas límites.

El logicismo constituye el blanco de algunos autores partidarios del regreso a una lógica transcendental, estructural, neoescolástica, etc., por el hecho de que, si bien sus defensores subordinan la matemática a la lógica, y no aceptan la autonomía del formalismo matemático como sucede con los hilbertianos, sin embargo, reivindican de todos modos la validez de una lógica estrictamente formal y "matemática", con absoluta neutralidad respecto de las especulaciones gnoseológicas que aparecían "mezcladas" con las consideraciones formales en las antiguas escuelas de lógica clásica.

En rigor, los logicistas se ven perjudicados en la misma medida que cualquier otra corriente epistemológica (entre las cuales existen incluso algunas estrictamente clásicas!!) que propugne la construcción de un lenguaje lógico universal, en el cual la noción de *deducción* se corresponda con el concepto semántico de *verdad*, pero, en cambio, no se ven obstruidos en ningún punto concreto de su programa a causa de la existencia de proposiciones indecidibles.

Por otro lado, la reducción de la matemática a la lógica implica subsumir morfológicamente las nociones de la matemática pura dentro del formalismo específico de la lógica simbólica, constituyéndola en una teoría (generalmente de primer orden) cuyo lenguaje subyacente es un cálculo lógico puro. De allí se sigue una parcial inmersión de la parte deductiva, ya que las demostraciones matemáticas pasan a ser combinaciones de deducciones lógicas puras y deducciones específicas realizadas con reglas aplicadas al manejo de determinadas constantes propias de la teoría matemática. Cualquiera sea el éxito atribuible a esta reducción logicista, es claro que su ejecución está ligada a una concepción por lo menos medianamente conceptualista, para la cual el segundo teorema de Gödel no constituye ningún obstáculo.

Finalmente, la escisión entre los criterios semánticos y los sintácticos (en particular, la imposibilidad de seguir considerando la *verdad* y la *deducibilidad* como correspondientes) podría alentar algunas aspiraciones platónicas concomitantes a cierta variante de logicismo, las cuales, si bien no se deducen del teorema de Gödel mismo, podrían (quizá forzadamente) hacerse plausibles sobre la base de un conjunto de resultados análogos; entendemos que estos corolarios platónicos son tan poco seguros como los dialécticos, pero, de todos modos, es obvio que los teoremas límites no estarían en oposición a ellos, y, menos aún, a la filosofía logicista considerada globalmente.

(3.2.3) Los autores clásicos se han mostrado más benignos con la corriente *intuicionista,* acaso por sus orígenes semikantianos, por su tendencia a poner el énfasis en problemas de contenido, y no sólo operatorios, y por su exigencia de constructividad (y acaso también por sus planteos exageradamente complejos y a menudo poco controlables).[12]

De todos modos, es conveniente analizar hasta qué punto los teoremas límites pueden acarrear interpretaciones que signifiquen una valla en el programa intuicionista. A primera vista podría pensarse que si la escuela de Brower lleva las exigencias de efectividad hasta sus últimas consecuencias, hasta el punto de no aceptar la existencia de una entidad, si no se dispone de un proceso estrictamente constructivo que permita "fabricar" el objeto cuya existencia se postula, entonces, cualquier señalamiento que muestre la no constructividad de una teoría bastaría para excluirla (por lo menos

[12] Entre los múltiples ejemplos de hipercomplejidad de la matemática intuicionista, recuérdese la difícil demostración del teorema de Heine-Borel, la definición de Integral de Brouwer, etc.

en la formulación no constructiva en cuestión) del área de interés del intuicionista. Sin embargo, hay que advertir que como los requisitos de efectividad son mucho más fuertes que los del formalismo, pues no se limitan a exigir que las pruebas metateóricas de coherencia sean realizadas mediante el uso de, a lo sumo, el principio de inducción habitual, sino que pretenden que las demostraciones constituyan al mismo tiempo un método generativo de las entidades utilizadas, y que incluso dentro de los sistemas no se admitan deducciones (y no sólo *metadeducciones!*) "indirectas", de esto se sigue que los intuicionistas rechazan *a priori* buena parte del proyecto formalista, y, por lo tanto, la imposibilidad de mostrar la coherencia de la aritmética con recursos formalizables dentro de ella *no afecta sus concepciones,* ya que, aun cuando hubiese existido una tal prueba (o sea, aun cuando el teorema de Gödel no fuese cierto) los intuicionistas dirían que ella no convalida su propia concepción de la matemática.

Por consiguiente, podemos concluir que los teoremas límites cuestionan uno de los puntos del proyecto *formalista,* e incluso podrían invalidarlo definitivamente (si, como parece, no hay prueba de carácter finito que no pueda reflejarse en la aritmética formalizada) afectan al *logicismo* y al *intuicionismo* no más que a cualquier corriente filosófica o lógica que pretenda la existencia de un lenguaje lógico universal para la ciencia que sea perfectamente cerrado y demostrablemente coherente, y dejan intactas las concepciones "ontológicas" de estas dos últimas escuelas, aunque nos parece que abre una vía de interpretación relativamente favorable al logicismo, sin que esto implique que tales interpretaciones puedan extraerse linealmente como corolarios de los teoremas. Hay que recalcar, con todo, que los teoremas límites no justifican el abandono de la lógica formal ni de los recursos particulares del formalismo de los sistemas axiomáticos, en beneficio de una forma distinta (que puede ser genética, estructural, idoneísta, eidética, transcendental, etc.), de lógica que estuviese al margen de los impactos causados por dichos teoremas. Semejante afirmación sería tan poco plausible como proponer el abandono del "álgebra moderna" (organizada como teoría funcional de primer orden con igualdad) y proponer su reemplazo por un álgebra de nuevo cuño, por la simple razón de que existen teoremas que demuestran que los grupos simétricos de orden mayor que 4 no son resolubles.

3.3 *Interpretaciones de escuelas psicológicas*

Algunas escuelas que cultivan una variante de epistemología que se desarrolla en estrecho contacto con la psicología, como por ejemplo la autodenominada *"psicología genética"* (y su correspondiente, la *"epistemología genética"*) encuentran en los teoremas límites cierta justificación para argumentar en contra de lo que ellos llaman "tendencias atomistas", primer paso hacia la liquidación del analitismo y la estimulación de las corrientes de carácter "globalista" (estructuralismo, genetismo, etc.). Al discutir las posiciones de los autores más representativos es considerable el riesgo de cometer injusticias, por ejemplo, refutando afirmaciones que aquéllos nunca quisieron formular, ya que los planteos de los mismos, participando de la ambigüedad de la filosofía tradicional y del rigor aparente de las tendencias "nomenclaturistas" (es decir, las que escriben con símbolos lo que se podría escribir con palabras, como si los símbolos *per se*, le otorgaran carácter científico) conducen a sutiles equívocos. Nos restringiremos a J. Piaget,[13] que muestra concepciones más elaboradas y conoce el tema de primera mano.

(3.3.1) Los teoremas límites entrañan una jerarquización de los sistemas respecto de la demostración de su coherencia, y ello implica que los sistemas, to-

[13] Piaget, J., *Essai sur les rélations entre la logique formelle et la pensée réelle* PUF, 1961, vol. XIV, de los Estudios de Epistemología Genética, par. 57 y 58.

mados globalmente, son los *únicos que poseen existencia autónoma.*

En primer lugar, Piaget supone que el atomismo (identificado por él con analitismo, según parece), tiende a descomponer sistemas complejos en sistemas simples, hasta llegar a elementos previos capaces de existencia autónoma. Cuando se "descompone" un sistema complejo, proceso inevitable si se quiere conocer minuciosamente su configuración, la única existencia que se está suponiendo con carácter independiente es la del sistema mismo; el recorrido analítico que conduce de ese sistema a sus "partes" tiene presente que dichas partes son constituyentes del sistema inicial y permanecen refiriéndose a él. Es cierto que a menudo se atribuye existencia autónoma a elementos "sueltos", pero ello obedece más bien a una concepción intuitiva detrás de la cual subyace su correlato formal. Por ejemplo, si queremos analizar el formalismo de los espacios de Hilbert sobre el cuerpo complejo, comenzamos considerando un sistema: distinguimos en su "interior", los sistemas más "simples" de los que habla Piaget, v.gr., el espacio vectorial subyacente, el espacio métrico inducido por el producto escalar y que, en combinación con el anterior, engendra un espacio normado, el cuerpo de escalares, etc. Si el proceso analítico es muy fino, llegamos a los elementos de ese espacio, de los cuales acostumbramos a "hablar como si existieran independientemente", pero sólo porque nos son familiares por otras teorías. Si decimos, "sea la función $f(y)$ del espacio H^5 de Sobolev", entendemos en general que esa función es conocida de alguna otra parte (v.gr., ha sido construida en la teoría intuitiva de variable compleja) o que ha sido "fabricada" en la teoría que consideramos, pero entonces remarcamos *"del espacio H^5 de Sobolev"* poniendo el acento en que la existencia de esa función depende del espacio.

Sin embargo, creo que hay una confusión no aclarada por los autores genetistas; cuando se habla de la existencia autónoma que no existiría sino para sistemas, y no por ejemplo, para fragmentos de un sistema dado, no se está haciendo referencia a la existencia de objetos (v.gr., abstractos) que organizados convenientemente servirían de modelo al sistema, sino de los entes *lingüísticos* con los cuales esos objetos son denotados. En nuestro caso, no se discute la existencia de $f(y)$ en H^5, sino del operador "F" (correspondiente a $f(\ldots)$), que integra el sistema axiomático definitorio de los espacios de Sobolev (axiomas de L^5 periódico). Aquí, entonces, es necesario realizar una distinción esencial: es obvio que sólo los sistemas tienen existencia autónoma en el sentido *deductivo,* pues los enunciados "sueltos" requieren de otros enunciados para integrar una deducción y una regla debe ser combinada con otra, etc. Pero, en cambio, no hay razón plausible para suponer que la existencia *sintáctica* en general, deba ser garantizada por un sistema global, mientras que no puede darse esta situación en el caso de elementos *atómicos.* Cuando definimos un sistema axiomático, lo podemos hacer desde diversos puntos de vista; podemos decir, v.gr., que ciertos elementos, digamos las letras x, y, z, y los símbolos complejos $\#x$, $\#\#x$, $\ldots$, $\#\#\#\#x$, $\ldots\ldots$, constituyen el alfabeto del sistema, y que tales entidades del alfabeto son fórmulas, tales otras son términos y además, que si determinadas expresiones son fórmulas (términos) determinadas combinaciones constituyen las únicas fórmulas (términos); y de la misma forma para los axiomas y teoremas. En este caso no hay ninguna razón para pensar que los pobres elementos listados al principio tienen menos derecho a la existencia que el sistema global que, *constructivamente,* generamos a partir de ellos. Por cierto que otras definiciones de un sistema axiomático (v.gr., las que construyen un sistema deduciéndolo como subsistema de un lenguaje más fino, previamente existente) podrían justificar un "*sistematicismo*" o "*estructuralismo*" como el que estamos poniendo bajo la lupa, pero es claro que existirán infinidades de lenguajes para los que esto no ocurre.

Se podría argumentar que la autonomía deductiva de un sistema axiomático es la realmente interesante y no la existencia autónoma, en el sentido de "posibilidad de existir independientemente como objeto potencialmente operativo". Si es así, quedan dos problemas por aclarar: *primero,* de qué manera se justifica el platonismo aparentemente defendido en algunas variantes de la epistemología matemática de los genetistas (v.gr., ¿en qué sentido existe un espacio de Tijonov apenas hemos formulado la definición?); *segundo,* ¿en qué lugar de la escala de importancia quedan las relaciones entre sistemas *distintos,* porque aunque dos sistemas sean perfectamente coherentes, es más que probable que su utilización científica obligue a compararlos continuamente, en cuyo caso habría que explicar qué es lo que pasa con la pretendida autonomía de ambos (o ¿existe una escala creciente de autonomías, carente de supremo?). La justificación del platonismo está lejos de ser un problema filosófico intrascendente, pero lo que mueve a preocupación es la dificultad para fundamentar sus tesis, como el mismo Piaget se apresura a detallar.

(3.3.2) El constructivismo genético interpreta los resultados de Gödel en el sentido de que la construcción indefinida de sistemas axiomáticos, yendo de lo 'inferior' a lo 'superior', se continúa incesantemente gracias a que ningún sistema *se basta a sí mismo,* ya que carece de una coherencia interna que garantice su propia falta de contradicción.

Esta tesis en un corolario redondo de las concepciones epistemológicas de la escuela genética y revela de manera patente la complejidad de la teoría que sus autores ofrecen como alternativa al platonismo. En ella se advierte un problema recurrente en las formulaciones de esta tendencia filosófica: la necesidad de acompañar toda explicación de una proposición formal (lógica o epistemológica) de su correspondiente correlato psicológico, e integrar el sentido estrictamente deductivo de la misma con los aspectos concernientes a su génesis. Como suele suceder, un intento tan meritorio y ambicioso suele resultar holgado en relación con la pequeña base de datos que justifica su enunciación.

¿Qué significa que un sistema se "baste a sí mismo"? Si juzgamos al sistema desde el punto de vista de su integración a otras teorías, de su inevitable comparación con otros lenguajes, etc., es correcto afirmar que "el uso científico de cualquier sistema requiere de su relación con otros semejantes, con diversas teorías, con modelos, etc.", pero no es fácil imaginar de qué modo ese corolario se deduce de los teoremas de Gödel, desde el momento en que la necesidad de *metateorías* desde las cuales son analizados varios sistemas simultáneamente, junto con sus (posibles) modelos, por ejemplo, no está motivada sólo por problemas de coherencia o completud. Un analista, desde luego, no se mueve sigilosamente *dentro* de un sistema axiomático para la teoría de operadores completamente continuos; apenas "escribe" la fórmula $T = I - L$, debe hacer referencia, desde un metalenguaje "externo" a un modelo también externo, respecto del cual "$-$" es el signo de diferencia, "I" indica al operador identidad y L *es* un adecuado operador diferencial. Vale decir que la falta de autosuficiencia de los sistemas axiomáticos no está determinada por teoremas sobre coherencia y completud, sino que constituye un hecho mucho más general del cual los teoremas de Gödel sólo dan un nuevo testimonio.

Pero cabe también la posibilidad de entender la falta de autosuficiencia de los sistemas, en un sentido más específico, relativo a la imposibilidad de demostrar *dentro* de ellos su propia coherencia. En este sentido, hay que insistir entre los distintos significados de *"ser coherente"* y *"ser capaz de expresar una demostración de coherencia"*.

En el sentido ordinario (clásico) de la palabra "coherencia" que estamos discutiendo, y que por lo menos es común a formalistas, logicistas y hasta a lógicos tradicionales que trabajan con lógica en estado natural (no axiomatizada), una "teoría" es coherente si dentro de ella resulta imposible demostrar una contradicción o justificar (en caso de que no existan procesos deductivos, v.gr., en el caso de no ser axiomatizada) dos proposiciones de las cuales una de ellas entrañe la negación de la otra. (Por ejemplo, una "teoría" no axiomatizada coherente, sería una lógica proposicional en la cual una fórmula queda justificada como válida si y sólo si es tautología). Con esta definición, la aritmética clásica, el cálculo funcional puro de primer orden, la lógica proposicional usual, etc., son *coherentes*. Que dicha coherencia no se pueda expresar dentro de su propio formalismo es otra cosa, pero para todos los fines lógicos, epistemológicos, de aplicación a otras ciencias, etc., esos sistemas son tan coherentes y satisfactorios como el que más.

Entonces, decir que estos sistemas carecen de coherencia interna para garantizar su propia no contradicción, no es afirmar algo falso, sino más bien aproximarse a un sinsentido. Dentro de la concepción clásica (otra cosa sería en las lógicas débilmente contradictorias) la coherencia no admite grados, y si los sistemas requieren de una "instancia superior" para dirimir su propia no contradictoriedad ello no se debe a que les falte un infinitésimo de consistencia, sino a una propiedad aparentemente esencial a todo proceso deductivo, a saber: que ningún lenguaje que reúna ciertas condiciones satisfactorias es *metateóricamente cerrado*. (Esto puede paralelizarse, gruesamente, con los problemas de las falacias semánticas, con la jerarquía de los metalenguajes, con las diversas teorías de tipos, y con muchas otras concepciones lógicas que muestran la misma necesidad de "apertura ascendente" pero que han sido menos explotadas por los epistemólogos.)

Los genetistas yerran al suponer que los sistemas están "orientados en el sentido de poder reforzar su propia consistencia". Por ejemplo, *si* la toría de grupos abelianos divisibles sin torsión, es coherente, poco importa que su coherencia requiera de una instancia superior para que dicha coherencia quede patentemente demostrada; el matemático que trabaje con ella podrá tener la certeza de que no encontrará contradicción alguna; si en cambio es incoherente, puede suceder que en algún momento se obtenga una contradicción, o bien que pueda utilizarse el sistema sin arribar a resultados falsos (por ejemplo, ¿qué persona que conoce los números naturales llegó alguna vez haciendo cuentas a advertir que la aritmética tenía una oración indecidible?). Sin duda que el paso a la instancia superior es importante para verificar la coherencia y tiene clara importancia metalógica, pero no es muy obvio que las operaciones que componen el proceso de "abstracción reflectora" generalizan una estructura dada en el sentido de reforzar su no contradicción. Pensar que la no contradicción queda reforzada en la medida en que podamos demostrarla, nos lleva a las fronteras mismas del *intuicionismo,* posición que quizá no sea tan vulnerable como parece pero que, después de todo, es lo suficientemente poco exitosa como para no construir réplicas disfrazadas de la misma.

Es justo reconocer con los genetistas que el sujeto accede a la no contrariedad del pensamiento a través de la reversibilidad del mismo, ya que la negación no es más que una operación involutiva que transforma al anillo de Boole de las proposiciones en un álgebra complementada. Pero si es que hemos entendido bien la tesis de estos filósofos, no es fácil coincidir con ellos en que la ampliación de las estructuras se hace en un sentido que extiende dicha reversibilidad. En el caso concreto de la coherencia de la aritmética, la ampliación (que no queda explicada por la tesis genetista, la cual entrañaría que la misma fuese única y en un sentido preciso) llega hasta incluir el segmento inicial de los ordinales determinado por ϵ_0, pero no por eso entraña un aumento de la reversibilidad, a menos que se suponga que por el hecho de existir más elementos hay menores "combinaciones" posibles para pensar en términos de "recíproco" e "inverso", pero entonces la afirmación sería un tanto banal.

Más bien, ese "prolongamiento" tiene que ver con que las propiedades aritméticas de los elementos del lenguaje, rebasan a aquellas que pueden expresar el lenguaje con su propio formalismo (v.gr., el ordinal que corresponde a la clase de todas las fórmulas con un buen orden inducido por la relación de deducción, no es un ordinal finito de los que "pertenecen" a la aritmética misma).

Creemos que no siempre las propiedades lógicas y las psicológicas se pueden paralelizar. Quizá puedan sacarse (con las debidas precauciones) consecuencias acerca de la psicología del conocimiento, de ciertas leyes físicas como el "*Unbestimmtheitprinzip*", pero las pruebas límites de la lógica sólo nos muestran limitaciones en nuestros métodos.

4. *Esquema de Interpretación*

4.1 *Aspectos ontológicos*

Como se señaló antes, los teoremas límites del formalismo sugirieron a varios autores la posibilidad de admitir una concepción *platónica* acerca de la naturaleza de las matemáticas pese a los inconvenientes evidentes para una tal posición, entre ellos, algunos correctamente señalados por la escuela de Piaget. Sin embargo, también cabía la alternativa de pronunciarse hacia un realismo platónico de carácter "intuitivo" cuyos postulados no se justifican o corroboran sobre la base de los teoremas matemáticos, sino que devienen evidentes tan pronto como un observador concentra la atención en la realidad matemática, en la de sus proposiciones particulares y en la naturaleza de los teoremas límites; un platónico intuitivo admite, por mera inspección, que hay una "realidad" conceptual tan obvia como la realidad física que no requiere justificación deductiva, sino que se vuelve patente a la simple contemplación. Es de esta naturaleza el platonismo del mismo Gödel;[14] este se encuentra psicológicamente muy robustecido por el hecho de ser el mismo autor de los más im-

[14] Gödel, K., *The philosophy of B. Russell*, Chicago, 1944, p. 137.

portantes teoremos en toda la historia de la lógica quien lo profesa. De todas maneras esta posición ontológica no está vinculada directamente a sus propios descubrimientos metalógicos, aunque tiene la ventaja de no estar sujeta tampoco a refutaciones "deductivas". Se trata, al fin y al cabo, de un problema perceptual: Gödel está entre los que "perciben" la existencia real de conjuntos, relaciones, funciones, etc., a diferencia de otros matemáticos que se inclinan por un nominalismo o conceptualismo, moderado o extremo, según los casos. Los últimos cien años de actividad matemática muestran una interminable lista de científicos descollantes que se alinean en los diversos bandos.

Sin embargo, otros autores intentan justificar su propio platonismo: frecuentemente, el científico maneja los entes formales sin postular propiedad ontológica alguna acerca de ellos; simplemente enuncia sistemas de proposiciones, y adscribe una determinada "categoría" objetal (v.gr., la de ser un *número*) a toda "cosa" que satisfaga ciertas propiedades, pero prescindiendo deliberadamente del problema que consistente en preguntarse por la naturaleza o esencia de esa "cosa".

El problema surge cuando comprueba, como en el caso del teorema de Gödel, Church y similares, que existen nociones semáticas, construidas en total adecuación a su uso cotidiano (v.gr., la noción de *verdad* cuyo empleo matemático es resultado de una rigorización del empleo vulgar, al cual hace perfecta justicia) que no pueden ser totalmente formalizadas sin desvirtuar esa correspondencia con el sentido común que es justamente lo que le otorga importancia (en caso contrario, la ciencia resultaría inútil para la técnica y para los requerimientos de las actividades del mundo real).

Por ejemplo, si el científico, llevando adelante la prescindencia respecto de la esencia de los objetos, define como *número* todo objeto que satisface los axiomas de la aritmética de Peano, como *suma, producto, divisibilidad, etc.,* las operaciones y relaciones que coinciden con las que se utilizan habitualmente y (aprovechando de paso la categoricidad de la teoría) con las que ocurren en *cualquier* modelo posible, es natural que defina como "oración verdadera" a aquélla que es teorema en su sistema, y como "oración falsa" a la que tiene una negación que es teorema en el mismo. El teorema de Gödel le mostraría, entre otras cosas, que no hay oraciones únicamente verdaderas o falsas, sino que existen algunas que no son lo uno ni lo otro. Si su lógica "viva" (la que maneja en la vida cotidiana) es más o menos razonable, podrá deducir que su definición de *verdad* (X es verdadero en S, si y sólo si X pertenece a $TEOR(S)$) no coincide con la definición semántica, ya que habrá proposiciones Y que son verdaderas respecto del modelo natural formado por la clase de los ordinales finitos con las operaciones y relaciones habituales, y sin embargo ni Y ni $\sim Y$ serán teoremas. (Por otro lado, *todo* Y, semánticamente será verdadero o falso.)[15]

Una de las alternativas es "abandonar" la concepción *absoluta* de verdad, o sea la que sirve para todos los lenguajes formalizados cuyos enunciados tienen una cierta estructura (v.gr., todos los que se han construido sobre la base de determinada teoría de tipos); la otra es renunciar a los infinitos conceptos de verdad (*ser verdadero en* S, *en* S' en S", etc.) y resignarse a la no formalización del modo semántico de definirla.

Sobre todo en el segundo caso, es comprensible la tentación de considerar que si la noción de verdad no es correctamente formalizable ello se debe a que, tanto la propiedad "ser verdadero", como los objetos abstractos que intervienen en su definición, *tienen existencia propia* y no quedan automáticamente "creados" por el sólo hecho de construirlos dentro de un lenguaje preexistente. Esta tentación está avalada por cierta extrapolación realizada desde el campo de lo fáctico hacia el formal y se puede ejemplificar con cualquier enunciado relativo a la "limitación" para ejecutar operaciones físicas. Si existe el consenso de que un fenómeno

[15] Ver, por ejemplo, Tarski, A., JSL, 4-3 (Sept. 1939), pág. 105 ss.

electromagnético se realiza mediante la descarga de algunas partículas subatómicas $p_1, p_2, \ldots, p_n$, consenso avalado por experiencias ejecutadas en cantidad suficiente y con la precisión adecuada, podemos inferir que si en una repetición voluntaria que supondremos idealmente idéntica, de dicho fenómeno, los aparatos registradores no consiguen detectar la presencia de las p_i, ello puede deberse a una limitación en la sensibilidad de los instrumentos, y la proposición que enuncia el umbral "perceptivo" de los mismos equivaldría a un *"teorema" sobre la limitación del aparato.*

La existencia de objetos que no son detectables por los mecanismos diseñados para ello, marca una ruptura en el paralelismo *realidad-instrumento* (análogo a *"realidad" matemática-formalismo*) pero la realidad de dichas partículas no es probada por la no aparición ante el contador, sino por las experiencias anteriores y por la creencia en el principio de causalidad; podría suceder, con hipótesis más débiles, que la conclusión natural fuese que a pesar de todo, "en esa nueva repetición de la experiencia *no se han desprendido las partículas* p_i".

Por otro lado, queda en pie la milenaria cuestión de elucidar el significado de la frase *"existen objetos matemáticos realmente"*. Si la aritmética elemental "se resiste" a ser formalizada de tal manera que siempre "queda alguna proposición intuitivamente verdadera sin demostrar" es claro que ésa es una propiedad, por así decir, *ontológica*: es típica de la "naturaleza" de esas proposiciones y de todas las que pertenecen a sistemas en donde ocurren situaciones parecidas. Pero debemos precavernos en contra de un apresurado realismo y preguntarnos si no se trata de un atributo ontológico, no de los "entes matemáticos" sino de los *símbolos* o los *conceptos* (¿por qué no?) a los cuales solemos tomar como sus representantes.

Por ejemplo, en cualquier lenguaje lógico con un mínimo de interés, el "principio" de identidad es un teorema. ¿Podríamos atribuir a alguna propiedad real de la relación de identidad, la ocurrencia de este suceso, o debemos considerarlo propio de la estructura de cada uno de los sistemas formales en los que tiene validez?

Como se ha señalado Goodstein,[16] cuando se contrasta la matemática formal con la intuitiva, no se compara una imagen con la realidad, sino un juego estrictamente gobernado por reglas con un "juego libre".

Si existiera una aritmética formal tan débil como para no poder demostrar la siguiente proposición ('P' indica "par" e 'I' "impar"):

$$(x)\ (y)\ (\ (P(x)\ \&\ I(y)\ )\ \rightarrow\ I(x+y)\ )$$

tendríamos una proposición que es *verdadera* respecto de cualquier estructura intuitivamente adecuada, pero que no es demostrable por hipótesis. Sin embargo: ¿en qué sentido es verdadera? ¿Acaso porque existe una realidad objetiva respecto de la cual esta oración nos dice algo, de tal suerte que podemos decidir su verdad mediante una confrontación con ella?

Sin embargo, no llamamos "par" e "impar" a propiedades exhibidas *espontáneamente* por ciertos entes a los que consideramos números, sino que *definimos* esas propiedades sobre la base de operaciones que son introducidas por ciertas reglas (en este caso, constructivas) que no aparecen necesariamente en estado formalizado. No sería correcto tratar de verificar la proposición enunciada mediante algún procedimiento empírico de conteo, v.gr., construyendo agregados de objetos, "sumando" físicamente (es decir, amontonando los agregados) los de cardinal par con los de cardinal impar, y determinado el cardinal del agregado "suma". Porque al contar un conjunto no estamos descubriendo una propiedad resultante de las características físicas de sus elementos, sino que le asignamos cierto rótulo a su "cantidad de elementos", rótulo al que llamamos 'número natural'.

[16] Goodstein, *Br. Journal Ph. of Science,* XIV, 55, p. 215.

En cambio, es lícito sostener que la verdad de la proposición se evidencia a partir del *manejo operatorio* de la aritmética cotidiana, sin que esto implique desconocer que la "pseudocorroboración" empírica efectuada por el conteo permite reforzar la creencia de que las definiciones de "par" e "impar" son, digamos, materialmente adecuadas.

(Porque si encontrásemos un caso que constituyese un contraejemplo de nuestra proposición, deberíamos concluir que los conceptos de "par", "impar" o "número" han sido incorrectamente utilizados; esta situación es análoga a la de muchos enunciados que contienen términos descriptivos, a pesar de lo cual no proporcionan información empírica; si hallamos que "existe un cuerpo negro que no absorbe una determinada radiación", tenemos que inferir que los conceptos de "negro", "absorción", etc., han sido mal utilizados y no que la definición de cuerpo negro es falsa).

Volviendo a nuestro ejemplo sobre los números naturales, debemos advertir que dichos números son "objetos" pertenecientes a un cierto "modelo natural" dentro del cual son generados mediante un elemento al que se elige como inicial y una operación que representa el proceso de "encontrar el sucesor" de un elemento dado; a partir de ella, es posible definir las demás operaciones y aún las relaciones no lógicas entre los componentes del dominio. Una vez caracterizadas intuitivamente las propiedades y funciones en cuestión, puede introducirse el predicado "*par*" ("*impar*") de una manera quizá no totalmente formalizada, pero al menos *rigurosa*; más aún, quizá sobre la base de esas descripciones, sea posible "demostrar" (también de un modo no formalizado) la validez de la proposición "la suma de un número par más un número impar, es un número impar" (correlato informal de nuestro enunciado formal) a través de un procedimiento análogo al que se realiza en geometría sintética, probando propiedades sin una formalización estricta y ateniéndose esencialmente a la condición de que las propiedades utilizadas no dependan de los objetos particulares que sirven de paradigma.

Para fijar ideas, supongamos un modelo construido dentro de la llamada "teoría intuitiva de conjuntos" (*Naive Set Theory*) provista de todos los recursos "lógico-naturales" del lenguaje cotidiano, aún a riesgo de caer en incoherencias. Se toma un conjunto cuyo carácter infinito (numerable en sentido intuitivo) se conoce y del cual existen múltiples "ejemplos" (o, si se prefiere, "modelos concretos") en la vida cotidiana: v.gr., la sucesión de todos los años desde el principio de la era cristiana prolongada indefinidamente; el conjunto de todos los objetos de un universo "sin límites" y en general todas las entidades surgidas alegóricamente por comparación con un proceso de contar que carecen de fin. Esta idea intuitiva, aunque nada rigurosa, es "rigorizable": nada hay de contradictorio en imaginar una cuenta infinita (y, por definición, tal tipo de infinito sería el numerable) en tiempo infinito: hay sobrados motivos para pensar que la idea kantiana de número natural estaba ligada a esa concepción del infinito potencial.

Cualquier proceso reiterativo serviría para definir un tal conjunto: si 0 es el elemento "inicial" y # es cualquier función inyectiva, la reiteración de la operación que consiste en aplicar # nos "genera" tal conjunto: 0, #0, ##0,###0, ... y así sucesivamente. Que ese conjunto es (intuitivamente) infinito, se puede mostrar fácilmente por un procedimiento también intuitivo: si sólo existiese una cantidad "finita" de estas entidades, como la operación # es inyectiva, al aplicarla a cualquiera de ellas (provisto que $\# x \neq 0$) se obtendrá un "nuevo" elemento, distinto de todos los demás.

Este pequeño sistema inductivo (que puede estar incluido en una quizá poderosísima teoría de conjuntos) es suficiente para permitir la definición de "+" y de los predicados "*par*" e "*impar*". El hecho de que nuestro proposición (*par* + *impar* = *impar*) sea "verdadera" se justifica por las propiedades de las operaciones del lenguaje manejado, que constituye una mezcla de lenguaje natural con diversos lenguajes formales y esencialmente con el lenguaje de la teoría intuitiva de conjunto.

Cuando nos proponemos verificar las propiedades de algún sistema axiomático construido para la aritmética elemental, digamos el muy débil sistema S, en el cual la proposición formal que nos interesa no es teorema, tenemos que:

(1) Por la morfología de S, podemos construir una fórmula como:

$$(x)\ (y)\ (\ (P(x)\ \&\ I(y)\ )\ \rightarrow\ I(x+y)\ )$$

(2) Por la verdad de su correspondiente no formal (que es una proposición acerca de "lo que pasa en el modelo") podemos afirmar que es *semánticamente verdadera* (en el sentido más riguroso del término).

(3) Por no ser teorema, concluimos que S es incompleto (bastante poco lúcidamente, por cierto).

Hemos comparado los objetos formales de S no con propiedades, relaciones, clases y objetos a los que atribuimos existencia platónica, sino con elementos de un lenguaje más amplio y menos formal dentro del cual se pueden caracterizar las estructuras que servirán como modelos, los sistemas de los cuales serán modelos, e incluso las relaciones entre ambos. Es decir que consideramos por un lado lenguajes con estructura específica muy rigurosamente determinada, y, por otro, lenguajes más generales en los que es dable expresar no sólo la metateoría de aquéllos sino también la teoría de la construcción de "modelos" que constituyen una aproximación abstracta a ciertos conceptos de los que poseemos una imagen mental previa. Esto no significa que haya formas de constructivismo que se vean más favorecidas por esta interpretación que el platonismo, sino que la concordancia o discordancia surge entre los juegos "estrictos" (sistemas de axiomas) y los juegos "libres" (teorías intuitivas), y no entre esos juegos y una realidad subsistente totalmente ajena al mundo físico o psíquico.

El hecho de que los juegos "estrictos" no puedan permitir tantas jugadas y tan ingeniosas como el juego "libre" se debe a que este último, justamente por su carácter "multinivelar" y propenso a la contradicción, es mucho más rico y permite expresar a través de reglas no del todo formales, pero relativamente bien establecidas, tantas jugadas como uno se proponga. De todos modos, los teoremas límites probarían que el ideal del juego libre es inalcanzable y que debemos conformarnos con *aproximaciones cada vez más satisfactorias* (entre las cuales hay, incluso, aproximaciones simultáneas con varios juegos "estrictos" usados de manera conjunta). Con todo, de estas reflexiones no puede inferirse que la falta de paralelismo *juego "estricto" —juego "libre"*, se deba a una autonomía de los entes matemáticos que justifica una concepción platónica. En todo caso, será correcto sostener que existen ciertas características propias de los sistemas formales que son responsables de que las cosas pasen de esta manera y no de otra (v.gr. ¿por qué son verdaderas ciertas proposiciones, entre ellas los teoremas límites, mientras que otras son falsas?); o sea, que no todo es convencional en la lógica moderna (tesis bastante trivial que no requiere de grandes resultados para ser demostrada con evidencia). Para saber si los límites a la convencionalidad entrañan alguna variante de platonismo, es necesario esperar a que los postulados platónicos sean formulados con mayor precisión de lo que lo han sido hasta el presente.

4.2 *Aspectos gnoseológicos y metodológicos*

Las consecuencias de carácter gnoseológico inferidas por algunos filósofos a partir de los teoremas límites del formalismo, no siempre son consideradas como proposiciones cuyo determinante esencial es una particular posición filosófica, y a las cuales dichos teoremas les brindan una nueva experiencia aprovechable, sino que a menudo son tomadas como auténticos corolarios de los mismos. Esto obliga a reflexionar sobre el hecho de que los métodos para el trabajo formal en lógica y en semántica, y en particular el método axiomático, no son métodos de conocimiento en sentido estricto, sino más bien la *racionalización* y *teorización* de un conocimiento al cual se logró previamente acceso con técnicas de otra naturaleza. Es frecuente argumentar que la transformación sintáctica de expresiones, la comparación de sistemas entre sí, el trabajo semántico, etc., proporcionan en sí mismos cierta información a la cual el investigador tiene acceso justamente en virtud de dicha axiomatización y de los recursos auxiliares que convergen a ella.

En este último caso, empero, los métodos formales (que constituyen auténticos *métodos* a nivel formal) pasarían a convertirse en particulares técnicas de algún método más general de conocimiento, que requiere de la transformación y rigorización adecuada de las entidades vinculadas con los objetos a conocer, antes de "poner en marcha" el mecanismo de conocimiento. En particular, si hablamos de métodos de conocimiento *científico,* habría que concluir que los recursos formales se convierten en técnicas indispensables de aquéllos en diversas etapas del circuito que va desde el dato bruto hasta el modelo teórico y vuelve luego al contexto de descubrimiento.

La divergencia que los teoremas límites establecen, entre otras, en el seno de la lógica clásica "separando" las nociones de verdad y de deducción, tiene como consecuencia "gnoseológica" más que una afirmación sobre nuestras "limitaciones en la facultad de conocer", una conclusión que nos advierte sobre la imposibilidad de valernos de un único sistema axiomático para intentar obtener todas las "verdades" que aparecen evidentes en lenguajes menos precisos y más intuitivos, y nos obliga a trabajar de manera "*asiontótica*" con toda una familia de sistemas formales con los cuales tratamos de conseguir aproximaciones cada vez menos deficientes al modelo ideal. Ello entraña, desde luego, una apertura hacia la consideración de los lenguajes formales como entidades "fácticas", y de sus proposiciones como "hipótesis" no respecto del mundo físico sino respecto de esos otros lenguajes menos precisos (los juegos "libres" de Goodstein).

Las proposiciones acerca de los límites internos de los métodos formales son más drásticas en lo que se refiere a los problemas *metodológicos*, en particular, a los que surgen de la teoría del lenguaje y más particularmente, a los vinculados a la construcción de un lenguaje universal.[17]

Efectivamente, si bien es posible construir un lenguaje cuya morfología exprese todas las nociones aritméticas y por lo tanto sea "universal" respecto de ella, en ese sentido, sin embargo, nunca se podrá disponer de un único lenguaje constructivamente axiomatizado en el cual sean demostrables todas las proposiciones (manteniendo la coherencia) que puedan reivindicarse verdaderas cuando el lenguaje es examinado "desde afuera" (es decir, desde un lenguaje "más grande", eventualmente paradójico). O sea que, manteniendo fijos los criterios generales para la definición de verdad, siempre se podrá estar en la siguiente situación: dado un sistema formal que se supone consistente, existe una fórmula X que es *verdadera* (con la interpretación usual para la morfología del sistema) y que no es teorema en el mismo. Más generalmente, es posible la construcción de una sucesión $S_1\, S_2\, S_3 \ldots\ldots S_n \ldots\ldots$ de sistemas, en donde S_1 es, v.gr. el PM de Gödel, y cada S_{n+1} coincide con S_n, excepto en que su clase de axiomas consta de una fórmula más, a saber, una cualquiera que *no* sea teorema en S_n y conserve la coherencia. (Obviamente existe si S_n no es completo).

La necesidad de manejarse con esta sucesión de lenguajes muestra una limitación esencial para la construcción de un lenguaje único, análoga a la que plantea la paradoja de Skolem,[18] y que llama la atención sobre la diferencia que

[17] Ver, por ejemplo, Carnap, *Filosofía y sintaxis lógica* (México, 1963), y más especialmente, el célebre *Logische Syntax.*

[18] Skolem, *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begrundung der Megenlehre* (Helsingfors, 1923).

existe entre los procesos deductivos *dentro* de un lenguaje (con las reglas y axiomas permitidos por el sistema) y *fuera* del mismo (cuando se considera al lenguaje como un objeto global).

Sin embargo, no vemos claro que los descubrimientos de Gödel y Church echen por tierra las ambiciones anti-"ocultistas" de Wittgenstein y otros positivistas[19] (frente a lo cual se regocija muy razonablemente Popper),[20] quizá porque esas ambiciosas tesis son lo suficientemente generales como para que su refutación sea más elemental.

Si, como dice Popper, la respuesta a determinadas preguntas (v.gr., la pregunta por la demostrabilidad de la conjetura de Goldbach) puede no conocerse nunca, eso hace presumir que las afirmaciones de Wittgenstein quedan desvirtuadas por la simple existencia de problemas indecidibles, pero esta es una cuestión epistemológica, más que propiamente lógica; es cierto que Gödel aporta el primer ejemplo importante de proposición indecidible, pero, sin embargo, un estudio epistemológico de la noción de "problema" puede mostrar que la posibilidad de decidibilidad no es lo que le da sentido a un problema, sino, más bien, el hecho de que *si existe solución,* entonces pueda verificarse realmente que lo es. La conjetura de Goldbach está bien planteada, porque si existiese respuesta seguramente podríamos comprobar si es correcta o no, en cambio, el "problema" expresado así: "Determínese la curvatura del ser-ahí" es obviamente sin sentido, pero no porque sea indecidible a la manera lógica sino porque, aun cuando alguien "*encuentre*" la respuesta, nos sería imposible verificar su corrección. O sea, entonces, que *aunque no hubiese ni un ejemplo de problema indecidible,* la posibilidad *a priori* de proponer un problema cuya solución, de existir, podría ser verificada como tal, pero que también es susceptible de no existir, es suficiente para mostrar la no plausibilidad del aforismo: "si se puede plantear una pre-

19 Cfr. Wittgenstein, *Tractatus* 6.5, 6.51, etc.
20 Popper, *El desarrollo del conocimiento científico,* Bs. As., 1967, pág. 312.

gunta; entonces también se la puede contestar". El hecho de que se disponga de un ejemplo concreto (teoremas de Gödel y Church) es un lujo.

Finalmente, quizá sea útil referirse a las afirmaciones que suponen que el conjunto de "teoremas límites" (a causa, v.gr. de esa necesidad de trabajar simultáneamente con varios sistemas), obliga al abandono de una concepción lógica totalmente "abstracta" y exige el estudio de lenguajes particulares *concretos*. Esta tesis, particularmente cara a una variante de la corriente estructuralista, proviene de una confusión evidente entre "*concreción*" y "*generalidad*". La noción de *grupo*, en general, es más "comprehensiva" que la de *grupo cíclico* (pues esta última excluye a los grupos no abelianos, entre otros) pero no es, sin embargo, más abstracta. Por su parte, el grupo (0,1) es menos general, aunque no menos abstracto, que (la familia de) los grupos cíclicos. Si tenemos una imagen concreta de este último es porque existe un particular modelo material (v.gr., dos puntos sobre un eje de coordenadas dibujados en un papel), que también es modelo de grupo cíclico, y de grupo en general y de estructura.[21]

Finalmente, sobre la base de las observaciones hechas anteriormente, puede concluirse que una valoración objetiva acerca del impacto producido por los teoremas de incompletud sobre una filosofía formalista de la lógica y la matemática, refuerza las siguientes tesis:

(a) Si bien es cierto que los resultados relativos a incompletud no constituyen una prueba para aserciones de carácter gnoseológico, sin embargo, puede decirse que ellos plantean una disyuntiva entre: (1) reconocer que la codificación mecánica de la aritmética está naturalmente restringida; o (2) insistir en esa codificación, pero sin hacer justicia a las nociones tradicionales de verdad y deducción.

[21] Desde luego, hay un sentido psicológico de "abstracto" en el cual esta afirmación sería correcta.

(b) Si se opta por la codificación total, el principio de Tercero Excluido debe ser abandonado, pues entonces el único criterio de validez sería la *demostrabilidad* y el único criterio de invalidez la *refutabilidad*, pero al existir oraciones que no son demostrables ni refutables, resultaría que hay proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas.

(c) El hecho de que no todas las fórmulas verdaderas a través de interpretaciones normales sean demostrables en un único lenguaje formal *S*, no implica una limitación para las facultades cognoscitivas de carácter "racional", sino sólo un obstáculo para una herramienta particular del método científico: la *axiomatización*, y aún así, un obstáculo que aunque no peda ser 'saltado", permite al menos dar un rodeo.

(d) Esta insuficiencia de un sistema axiomático único no obliga al abandono del método axiomático mismo, sino a la utilización de toda una batería de tales sistemas, a la manera de *sistemas hipotético-deductivos*, cuyos "referentes" no son ahora empíricos sino que son los modelos de las ciencias formales.

(e) Los "universales" finalmente, pueden jugar, dentro de esos sistemas, un papel similar al que desempeñan los *términos teóricos* de la física en las teorías fácticas.

NOTA: Deseo agradecer al Dr. Mario Bunge, de McGill University, las útiles observaciones que me formuló durante la lectura del primer original de este trabajo.

RESUMEN

The purpose of this article is to realize a philosophical evaluation (from an epistemological, as well as from an ontological point of view) of some of the most important logical theorems that have been discovered during the last 40 years. The theorems I want to refer to are those dealing with the properties of incompleteness and undecidability of formal systems. I fix my attention especially upon Gödel's theorem as it was stated in 1931.

The introduction of this article is dedicated to analyse the reasons why some strictly mathematical propositions (such as Gödel's theorem) have produced such a big philosophical perplexity. In the second section of this essay I offer a brief examination of the logical structure of Gödel's proof (assuming, of course, some knowledge of it). I especially emphasize those aspects of the proof which are essentially methodological: the construction of the Gödelian numeration, the parallel between the process of demonstration and the properties of recursive functions and, most especially, the structure of the "crucial" proposition whose meaning is indirectly studied all through the various sections of this article.

The third section of this study is intended to raise some critical questions against some rather hasty interpretations of the theorem that have been advanced from various different philosophical view points.

It is pointed out that the materialist positions, despite the fact of being the best philosophically oriented, in the sense that they take into account, and make use of, scientific results, overestimate the philosophical value of the theorems of the formal sciences, and assign extralogical powers to merely logical propositions. At the same time they give an excesive importance to the philosophical proyections of the schools of epistemology of mathematics.

It is also shown the incoherence and superficiality of various interpretations of the theorem coming from traditional philosophers who, in a rather extrapolative way, make use of the technical results of metalogic in order to deny the efficiency of formal and mathematical methods.

Finally, I analyse the point of view of different psychological schools, especially that of the so called "genetic psychology" and some other structuralist positions. I consider that these positions give a too complicated account of formal "*phaenomena*" and, very often, they treat certain mathematical constructions as if they were

the psychological processes leading to their acquisition.

The last section of the article is dedicated to characterize a set of statements with philosophical (ontological and epistemological) content. These statements can be validly asserted on the basis of achievements such as Gödel's and other logical theorems. These logical achievements, without having the nature of general philosophical thesis, force the logician to make a choice between: a) to recognize that the mechanical codification of arithmetics is naturally restricted, or b) to continue with that codification but changing the classical notions of truth and deduction.

If the choice is made in favor of the total codification, then the principle of the excluded middle must be abbandonned. The theorems we are dealing with can be considered as a serious obstacle only with respect to a particular method of scientific investigation: axiomatization; and even there, the obstacle is relative only to certain kinds of theories. We could say, in general, that it could be avoided through certain "asynthotical" procedures.

Axiomatic systems shouldn't be used from now on, as a unique language definitively closed, but as a series of particular systems so that the logicians and the mathematicians can modify their postulates any time they encounter some difficulties in the language they are working with.

Neither Platonism nor Intuitionism can be justified by the logical theorems we have being considering. My point of view is that it could only be justified a relative use of "universal" concepts, that is to say, the kind of use we give to theoretical terms of natural sciences.