CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXV, No. 75 (diciembre 1993): 85–103

NOCIONES LOGICISTAS EN FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

ÁNGEL NEPOMUCENO FERNÁNDEZ
Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad de Sevilla

1. *Introducción*

El punto de vista según el cual la lógica es prioritaria respecto de la matemática, como Church ha señalado en [3], se ha mantenido por filósofos y matemáticos en un sentido fuerte, unas veces, y en uno débil, otras. El primero identifica lógica y matemáticas o las entiende como un todo cuyo desarrollo parte de aquélla y culmina en éstas; en el segundo, en cambio, se considera que la naturaleza de las teorías matemáticas se conoce a través del estudio de la lógica, por la cual se determinan las consecuencias de un sistema de postulados o axiomas. El éxito de la doctrina logicista como *programa metafísico de investigación*[1] habría dado el espaldarazo definitivo al punto de vista fuerte, pero los sucesivos intentos de reducción de las matemáticas a la lógica han terminado resultando vanos, de aquí que haya prevalecido más bien el punto de vista débil.

Cualquiera de los dos sentidos corresponde al logicismo. Frege en sus últimos escritos, años después de haber sido descubierta la paradoja de Russell, expresó su opinión de que en matemáticas tal vez haya postulados específicos

[1] Véase Nepomuceno [9], donde aparecen diversos sistemas formales representativos.

pero, una vez establecidos, no tienen un comportamiento distinto de los puramente lógicos.[2] En cualquier caso, el fracaso de Frege se intentó paliar con el sistema de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, de una lógica de teoría de los tipos, el cual, a su vez, se pone en tela de juicio más tarde. Las críticas que surgen a partir del denominado *teorema de incompletitud* de Gödel y otras que puedan hacerse (planteamientos intuicionista y formalista, grado de complejidad de algunas partes de la matemática, etc.) no significan la muerte del logicismo.

Para mostrar lo fructífero de algunas ideas inherentes al logicismo, tras introducir brevemente las consecuencias para la lógica del resultado de Gödel, propondremos un sistema de lógica de predicados de segundo orden, haciendo una presentación no genuinamente logicista, aunque perfectamente compatible con esta doctrina. El lenguaje formal de tal sistema permite la formalización de una expresión cuyo significado sea la paradoja de Russell, aunque las consecuencias de ello pueden evitarse. Por último, obtendremos algunos teoremas interesantes para la discusión de la validez de aquellas ideas en su tiempo.

2. *La incompletitud esencial de la lógica de segundo orden*

El teorema de incompletitud de Gödel se puede expresar en los siguientes términos: *Si* AP *es ω–consistente, entonces existe al menos una fórmula γ del lenguaje de* AP *que no es demostrable* ni *refutable*. γ —la fórmula de Gödel—, puesto que, interpretada, afirma su propia indemostrabilidad, es, además, aritméticamente verdadera. Aquí AP representa un sistema de aritmética de axiomas de Peano con una lógica de predicados de primer orden como lógica subyacente, siendo γ una fórmula tal que no es demostrable en

[2] *Nagelschriften*, editados en parte en español en [6].

AP, a pesar de tratarse de una consecuencia lógica de los axiomas de AP, puesto que es aritméticamente verdadera o verdadera cuando lo son los axiomas y teoremas de AP, y tampoco $\neg\gamma$ es demostrable; la noción de ω–consistencia es la usual, aunque esta condición de la hipótesis se puede generalizar a simplemente *consistente* (como hiciera Rosser).

Para mayor facilidad usaremos las siguientes abreviaturas: $\vdash$ por "demostrable en un sistema", $\models$ por "consecuencia lógica" (en su caso, según la disposición de las fórmulas, "validez universal"). En cuanto al citado teorema de Gödel, veamos en primer lugar que su tesis es compatible con la completitud de los sistemas de lógica de predicados de primer orden. Consideremos que Δ es el conjunto de los axiomas no lógicos de AP; este conjunto es infinito —pues son axiomas todas las fórmulas del lenguaje de AP instancias de los esquemas axiomáticos de Peano.[3] Establecido el teorema, si AP es consistente, entonces no AP $\vdash \gamma$, es decir, no $\Delta \vdash \gamma$; como γ es aritméticamente verdadera, todo modelo de Δ ha de ser modelo de γ, por lo que $\Delta \models \gamma$ y, de aquí, si Δ fuera finito, $(\wedge_{i \in I} \alpha \in \Delta) \models \gamma$, donde $\wedge_{i \in I} \alpha \in \Delta$ representaría (si ello fuera posible) la fórmula resultante de la conjunción de todas las fórmulas de Δ. De lo anterior se llegaría a que $(\models \wedge_{i \in I} \alpha \in \Delta) \rightarrow \gamma$ y, por la completitud de la lógica de primer orden,[4] $\vdash (\wedge_{i \in I} \alpha \in \Delta) \rightarrow \gamma$, de donde $\wedge_{i \in I} \alpha \in \Delta \vdash \gamma$. Pero Δ no es un conjunto finito y, por tanto, no existe la fórmula $\wedge_{\subset \in I} \alpha \in \Delta$.

[3] En realidad son cuatro axiomas: 1) todo número tiene un sucesor; 2) si los sucesores de dos números son idénticos, entonces tales números son idénticos; 3) si dos números tienen un mismo sucesor, entonces los dos números coinciden; 4) existe un número que no es sucesor de ningún otro número, y un esquema axiomático, a saber, el principio de inducción completa (cuyas instancias son tantas como fórmulas posibles, es decir, infinitas).

[4] Probada, por ejemplo, [2]; las primeras pruebas se deben a Gödel y Henkin.

Dado un lenguaje formal de primer orden, es posible definir una ampliación a segundo orden sin restringir la cuantificación a variables individuales; asimismo, los correspondientes sistemas formales serán ampliables. Tomando uno de estos sistemas formales de segundo orden, y expresando en su lenguaje los axiomas de Peano, obtenemos un conjunto finito de fórmulas; en este caso el principio de inducción se representa mediante una fórmula cuyo signo lógico principal será un cuantificador universal que liga una variable predicativa. Sea Δ' este conjunto, entonces $\Delta \cap \Delta'$ estará integrado por los axiomas de Peano distintos del principio de inducción; con Δ' y el sistema formal de segundo orden como lógica subyacente, se establece el sistema AP$'$. En general, cada fórmula del lenguaje de AP es una fórmula del lenguaje de AP$'$, por ello γ es una fórmula del lenguaje de AP$'$. Si AP$'$ es consistente, ¿se verifica que $\Delta' \vdash \gamma$ o $\Delta' \vdash \neg\gamma$? Veamos que no.

Planteamos como hipótesis que $\Delta' \vdash \gamma$. Entonces hay una deducción de γ en el correspondiente sistema; es decir, hay una secuencia finita de fórmulas $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, para $\aleph_0 > n \geq 1$, tal que δ_i, para cada $i \leq n$, es un axioma o se obtiene de algún axioma o de alguna fórmula precedente (que es axioma o se obtiene a su vez de fórmula precedente) por aplicación de las reglas del cálculo, y δ_n es la propia γ. Realicemos las siguientes operaciones: para cada $i \leq n$, 1) si $\delta_i \in \Delta \cap \Delta'$, o se obtiene desde axiomas miembros de $\Delta \cap \Delta'$, entonces δ'_i es δ_i; 2) si δ_i es el principio de inducción o se obtiene desde este axioma, δ'_i es la fórmula resultante de sustituir dicho principio por instancias del mismo (por eliminación del cuantificador universal); 3) si δ_i se ha obtenido mediante una regla de generalización de predicados aplicada a δ_{i-k}, entonces δ'_i es δ_{i-k}. Eliminando las posibles repeticiones de la secuencia δ'_1, δ'_2, $\ldots$, δ'_n se obtiene la secuencia $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, para $m \leq n$, la cual verifica lo siguiente: cada una de ellas es un axioma de Δ o se obtiene de algún axioma de Δ o de otra fórmula precedente (que es axioma o se obtiene a su vez de fórmula precedente) y, por último, η_m es γ;[5] es decir, hay una deducción de γ, por lo que $\Delta \vdash \gamma$, lo cual es imposible, de acuerdo con el teorema de Gödel. Mediante un planteamiento similar se infiere que tampoco $\Delta \vdash \neg\gamma$. Concluimos, pues, que si AP$'$ es consistente, entonces es incompleta.

Teniendo en cuenta que es finito, $\Delta' = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \wedge\alpha_k\}$, para $k \geq 1$; sea la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \alpha_k$, la cual, como es obvio, es una fórmula del lenguaje formal de AP$'$. Puesto que AP$' \models \gamma$, se verifica que $\Delta' \models \gamma$ y, en consecuencia, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \models \gamma$, de donde $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rightarrow \gamma$, asimismo fórmula del lenguaje formal de AP$'$ y, por lo visto anteriormente, no se dará que $\vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rightarrow \gamma$. Entonces, hemos hallado una fórmula del lenguaje formal de segundo orden que sería aritméticamente válida y, sin embargo, no demostrable en el correspondiente sistema, por lo que éste no es completo; ahora bien, dada la generalidad con que ello se ha establecido, de un lado, y la categoricidad de los axiomas de Peano respecto de los modelos aritméticos estándar,[6] de otro, podemos concluir que, cualquiera que sea el sistema lógico, hay una fórmula —la citada $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rightarrow \gamma$— que es universalmente válida pero no demostrable. Más aún, si incorporamos γ como nuevo axioma, siguiendo el método de Gödel hallaríamos otra fórmula γ_* tal que se verificaría $\models \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \gamma \rightarrow \gamma_*$ pero no $\vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \gamma \rightarrow \gamma_*$; así se procedería sucesivamente, de manera que los sistemas formales de segundo orden son incompletables.

[5] Nótese que γ no se ha podido obtener por generalización predicativa, puesto que es una fórmula del lenguaje de AP, de primer orden, por tanto.

[6] *Cfr.* Church [2].

Esta limitación esencial de sistemas formales suficientemente expresivos representa un serio inconveniente para el punto de vista de la prioridad de la lógica en sentido fuerte. Que los teoremas matemáticos hayan de ser de carácter lógico es una exigencia acerca de la naturaleza de los mismos, y, en primer término, ello es independiente de la incompletitud del sistema; pero que ninguna lógica permita demostrar todas las expresiones consecuencia lógica de sus axiomas puede interpretarse como un argumento contra la proposición *toda verdad matemática es una verdad lógica*, con lo cual, si dice algo, lo dice contra tal punto de vista.

3. *Sistema formal de segundo orden*

El *logicismo*, como doctrina filosófica, se puede sostener aunque se presenten diferentes sistemas como formas del mismo. No se trata de identificarlo con el formalismo, aun cuando se seleccione un sistema formal, sino que, como hiciera Frege,[7] el sistema lógico en cuestión será el marco en el cual se efectuaría la reducción de matemáticas a lógica; el sistema de Frege fue el de *Grundgesetze*; el de Russell y Whitehead, el de *Principia Mathematica*. Aquí propondremos un sistema de lógica de segundo orden con nominalización de predicados, por las siguientes razones, entre otras:

1) La reducción se haría —si ello fuera posible— mediante un sistema cuyo lenguaje fuese suficientemente expresivo. La opción estaría así entre una teoría de conjuntos —tipo ZF o NBG—, como sistema especial de primer orden, o una lógica de predicados de segundo orden, siendo esta última preferible para representar las leyes de la lógica, sin restringir la cuantificación a términos individuales, frente a una teoría tipo ZF o NBG, que sería una teoría

[7] Véase Cocchiarella [1].

matemática más, de acuerdo con los planteamientos logicistas.

2) El tratamiento de símbolos representantes de objetos abstractos, necesario al efectuar la reducción, requiere previamente un tratamiento lógico de la nominalización, ya sea mediante una teoría de los tipos o mediante algún otro artificio, como, por ejemplo, el de implantar una notación especial para tales objetos (aquí expresados como λ-abstractos) y considerar los términos, en general, según la posición, argumental o funcional.

3) Un sistema de segundo orden con nominalización permite expresar las leyes lógicas de manera que su forma sea independiente de la propia nominalización y de la posición de los términos. Además, por la naturaleza insaturada del predicado, los términos predicativos no estarán formalmente organizados en una jerarquía de tipos lógicos.[8]

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje que consta de los siguientes conjuntos de signos: $T(\mathcal{L})$ o conjunto inicial de *términos*, formado por *variables individuales* y *parámetros*, como términos individuales, y *variables predicativas* y *relatores* —uno de los cuales es la *identidad*—, como términos predicativos de aridad o tipo $n \geq 1$; CL es el conjunto de las constantes lógicas, las usuales incluyendo el signo "λ", aunque son suficientes $\neg, \rightarrow$ y $\forall$ (las restantes se usarán como abreviaturas, $\exists x\alpha$ de $\neg\forall x\neg\alpha$, etc.); se emplean algunos signos auxiliares (como paréntesis, corchetes, puntos, etc.); $F(\mathcal{L})$ es el conjunto de las fórmulas que se define de acuerdo con las siguientes cláusulas:

1) si $a, b \in T(\mathcal{L})$, entonces $a = b \in F(\mathcal{L})$;

2) si R es un término de tipo $n \geq 1, b_1, b_2, \ldots, b_n$, son n figuraciones de términos —pudiendo haber repeticiones—, entonces $R(b_1, b_2 \ldots, b_n) \in F(\mathcal{L})$;

[8] En una jerarquía tal, si P y X son términos distintos y X no es del tipo de P —es decir, no es de un determinado campo de argumentos— entonces $P(X) \vee \neg P(X)$ es una expresión sin sentido.

3) si $\alpha, \beta \in F(\mathcal{L})$, entonces $\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \rightarrow \beta \in F(\mathcal{L})$;

4) si $\alpha \in F(\mathcal{L})$ y s es una variable de cualquier tipo, $\exists s\alpha \in F(\mathcal{L})$.

$T'(\mathcal{L})$ es *el conjunto final de los términos*, definido de acuerdo con las reglas: 1) si $X \in T(\mathcal{L})$, entonces $X \in T'(\mathcal{L})$; 2) si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son $n \geq 1$ variables distintas y $\varphi \in F(\mathcal{L})$, entonces $[\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n \cdot \varphi] \in T'(\mathcal{L})$, se denomina λ-abstracto y se dice que es de tipo n.

Las nociones de subfórmula, figuración libre de una variable, figuración ligada, etc., son las habituales. En un λ-abstracto como $[\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n \cdot \varphi]$, las figuraciones de x_1, x_2, ..., x_n en φ se dice que están ligadas (por λ) y si en φ no figura ningún cuantificador ni λ, entonces cualquier variable distinta de éstas figura libre en φ. $\beta(r/s)$ representa la fórmula resultante de sustituir en β las figuraciones libres de la variable s por el término r, siempre que s no figure en ninguna subfórmula de la forma $\forall r\alpha$ o $\exists r\alpha, r$ y s sean del mismo tipo y resulte una fórmula estratificada —lo que se define más abajo— si la primera era de esta clase.

En $\mathcal{L}$ se puede formalizar un enunciado que no es más que una versión de la paradoja de Russell. En efecto, sea "hay un predicado que si se predica de sí mismo, entonces no se predica de sí mismo" y la fórmula $\exists P(P(P) \rightarrow \neg P(P))$, cuyo sentido se puede parafrasear como dicho enunciado; incluso determinados sistemas de cálculo lógico permiten su demostración como teorema, y éstos resultan, por tanto, inconsistentes.[9] Habiendo desechado la formulación de un sistema con jerarquía de tipos, para evitar los problemas derivados de la paradoja se establece un mecanismo que supone una teoría de tipos lógicos: la estratificación de las fórmulas del cálculo, junto con las restricciones impuestas a la operación de sustitución. En lugar de esta

[9] Véase Cocchiarella [1] y Nepomuceno [8].

vía, que mantiene una jerarquización de los tipos en un nivel metalingüístico, se puede adoptar una semántica para $\mathcal{L}$ en la cual fórmulas como $\exists P(P(P) \to \neg P(P))$ no se consideren verdaderas o falsas bajo cada interpretación, sino denotando un tercer valor de verdad (*indeterminado* o *desconocido*, por ejemplo); es decir, considerando una semántica trivalente, aunque ello no es necesario para el objeto del presente trabajo.

Una fórmula α se dice que está *estratificada* si y sólo si existe una asignación τ de números naturales al conjunto de todos los términos de α que verifica las siguientes condiciones:

1) Para todos los términos x, y, si $x = y$ es una subfórmula de α, entonces $\tau(x) = \tau(y)$.

2) Si $R(b_1 \ldots b_n)$ es una subfórmula de $\alpha, \tau(b_1) = \cdots = \tau(b_n)$ y $\tau(R) = \tau(b_1) + 1$, para $n \geq 1$.

3) Si $[\lambda x_1 \ldots x_n \cdot \varphi]$ figura en α, entonces $\tau(x_n) = \cdots = \tau(x_1)$ y, además, $\tau([\lambda x_1 \ldots x_n \cdot \varphi]) = \tau(x_1) + 1$, para $n \geq 1$.

El sistema de cálculo consta de axiomas y reglas de inferencia. Son axiomas todas las instancias de los siguientes esquemas de fórmulas (α, β, φ y ψ representan fórmulas que están estratificadas, como los términos, si éstos son λ-abstractos):

1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$;

2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$;

3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$;

4) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$, si x no figura libre en α;

5) $\forall s\alpha \to \alpha(r/s)$, siendo $\tau(r) = \tau(s)$;

6) $a = b \to (\varphi \to \psi)$, donde ψ se obtiene desde φ reemplazando alguna figuración libre de b por a.

Las reglas de inferencia son:

1) *Modus ponens*: de α y $\alpha \to \beta$ se infiere β;

2) *Generalización*: de α, si s es una variable, se obtiene $\forall s\alpha$;

3) λ-*conversión*: de $\forall x_1 \ldots x_n(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $[\lambda x_1 \ldots x_n \cdot \varphi] = [\lambda x_i \ldots x_n \cdot \psi]$ (y viceversa), donde las fórmulas y λ-abstractos están igualmente estratificados.

4. *Carácter logicista del sistema*

Aunque algo se ha señalado ya, veamos cómo este sistema formal capta una buena parte de los planteamientos logicistas. A este respecto son de interés diversos teoremas cuya demostración requiere la prueba previa de los denominados *teorema de la deducción* y *teorema de intercambio*; para no alargar innecesariamente este apartado, indicamos sólo en qué condiciones son asumidos. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ —donde Γ es un conjunto de fórmulas, aunque puede ser vacío—, entonces $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, siempre que β no se haya obtenido por aplicación de la regla 2) de *generalización* a α o a otra fórmula de Γ, la cual se hubiera obtenido a su vez por aplicación de dicha regla. Según el segundo teorema citado, si $\vdash \gamma \leftrightarrow \delta, \gamma$ es una subfórmula de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es la fórmula que resulta de intercambiar γ por δ en $\mathcal{A}$; entonces, $\vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$; en la demostración se harán tantos supuestos acerca de la forma de $\mathcal{A}$ como el número de axiomas: si $\mathcal{A}$ es $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ y γ es α, entonces $\vdash \delta \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$, por ser el propio axioma 1) y así sucesivamente, aplicando el teorema de la deducción cuando sea necesario.

Probaremos, en primer lugar $T1$: $\vdash \exists R([\lambda x \cdot R(x)]) = R)$.[10]
Por axioma 3) $(\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow \neg([\lambda x \cdot R(x)] = [\lambda x \cdot R(x)])) \rightarrow ([\lambda x \cdot R(x)] = [\lambda x \cdot R(x)] \rightarrow \neg \forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R))$;
$\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow \neg([\lambda x \cdot R(x)] = [\lambda x \cdot R(x)])$; axioma 5);

[10] Nos referimos a signos predicativos monádicos por comodidad de escritura; como es evidente, los resultados se extienden a n-ádicos para $n \geq 2$.

$([\lambda x \cdot R(x)] = [\lambda x \cdot R(x)] \rightarrow \neg\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R))$; *modus ponens*;
$[\lambda x \cdot R(x)] = [\lambda x \cdot R(x)]$; puesto que para cada término x, $\vdash x = x$;
$\neg\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R)$, es decir, $\vdash \exists R([\lambda x \cdot R(x)] = R)$.

$T2$: $\vdash [\lambda x \cdot R(x)] = R$. *Si* $\vdash \neg[\lambda x \cdot R(x)] = R, \vdash \forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R)$, por *generalización*, y teniendo en cuenta el teorema de la deducción,
$\neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow \forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R)$;
$(\neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow \forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R)) \rightarrow (\neg\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow ([\lambda x \cdot R(x)] = R))$, axioma 3);
$\neg\forall R \neg([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow ([\lambda x \cdot R(x)] = R)$, por *modus ponens*;
$[\lambda x \cdot R(x)] = R$; por *modus ponens* (con $T1$).

$T3$: $\vdash \exists R([\lambda x \cdot \varphi] = R)$, donde φ es una fórmula en la que R no figura libre.
$(\forall R \neg([\lambda x \cdot \varphi] = R) \rightarrow \neg([\lambda x \cdot \varphi] = [\lambda x \cdot \varphi])) \rightarrow ([\lambda x \cdot \varphi] = [\lambda x \cdot \varphi] \rightarrow \neg\forall R \neg([\lambda x \cdot \varphi] = R))$,
axioma 3) y teniendo en cuenta que R no figura libre en φ;
$\forall R \neg([\lambda x \cdot \varphi] = R) \rightarrow \neg([\lambda x \cdot \varphi] = [\lambda x \cdot \varphi])$, axioma 5) ($r$ es $[\lambda x \cdot \varphi]$ y s es R);
$[\lambda x \cdot \varphi] = [\lambda x \cdot \varphi] \rightarrow \neg\forall R \neg([\lambda x \cdot \varphi] = R)$, por *modus ponens*;
$\neg\forall R \neg([\lambda x \cdot \varphi] = R)$; por *modus ponens* (puesto que $\vdash [\lambda x \cdot \varphi] = [\lambda x \cdot \varphi]$); es decir, $\exists R([\lambda x \cdot \varphi] = R)$.

$T4$: $\vdash \exists R \forall x(R(x) \leftrightarrow \beta)$, donde R no figura libre en β. Teniendo en cuenta que, para cualquier fórmula α, se puede establecer que $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$, sea la fórmula $R(x)$, entonces $R(x) \leftrightarrow R(x)$; $([\lambda x \cdot R(x)] = R) \rightarrow ([\lambda x \cdot R(x)](x) \leftrightarrow R(x))$; por *modus ponens* (con $T2$), $[\lambda x \cdot R(x)](x) \leftrightarrow R(x)$; teniendo en cuenta el mencionado teorema de intercambio, para cada fórmula β (en la que R no figure libre), se obtiene $[\lambda x \cdot \varphi](x) \leftrightarrow \varphi$ y, por *generalización* $\forall x([\lambda x \cdot \varphi](x) \leftrightarrow$

φ); como, haciendo uso de axiomas 3), 5) y *modus ponens*, para cualquier fórmula $\alpha, \vdash \alpha(r/s) \rightarrow \exists s\alpha$, entonces $\forall x([\lambda x \cdot \varphi](x) \leftrightarrow \varphi) \rightarrow \exists R\forall x(R(x) \leftrightarrow \varphi)$; de aquí $\exists R\forall x(R(x) \leftrightarrow \varphi)$, por *modus ponens*.

Desde un punto de vista del logicismo fregeano, el papel de un predicado depende de la posición que ocupa en el contexto de una sentencia; en posición de predicado estará representando un concepto, mientras que en posición de argumento más bien se representa un objeto. Dado un predicado F, sea ϕ el concepto por él representado; puesto que no es lo mismo "el concepto ϕ" que "la extensión del concepto ϕ"[11] —en el primer caso se ha nominalizado—, ha de ser también en su contexto donde se establezca una u otra alternativa. En el sistema formal precedente se capta esta ambivalencia: si $F(G)$ es una fórmula en la que F y G son términos predicativos (monádicos), podemos decir que F está por un concepto considerado en su extensión y G como concepto-correlato.

La teoría de los tipos de Russell, como instrumento útil para eludir la paradoja de *Grundgesetze*, no como clasificación jerárquica de los términos del lenguaje del sistema formal, queda también incorporada con las exigencias de estratificación de las fórmulas y las restricciones en sustitución. Las leyes de *Grundgesetze*, expresadas como fórmulas de $\mathcal{L}$, son las siguientes:[12]

I. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;

II. a) $\forall x\alpha \rightarrow \alpha(b/x)$ —x, b individuales—;

b) $\forall P\alpha \rightarrow \alpha(R/P)$—$P$, R predicativos—;

III. $a = b \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, obteniéndose ψ desde φ reemplazando alguna figuración libre de b por a;

IV. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$;

V. $[\lambda x_1 \ldots x_n \cdot \varphi] = [\lambda x_1 \ldots x_n \cdot \psi] \leftrightarrow \forall x_1 \ldots x_n(\varphi \leftrightarrow \psi)$;

[11] Frege [5]. Véase también Cocchiarella [1].

[12] Como es obvio, con las mencionadas restricciones.

VI. $[\lambda x_1 \dots x_n \cdot R(x_1 \dots x_n)] = R$).

Éstas son demostrables en el sistema. En efecto, la ley V de Frege se obtiene mediante aplicaciones de la regla 3) y por teorema de la deducción, en el supuesto de que φ y ψ son fórmulas estratificadas. Las restantes leyes de *Grundgesetze* son asimismo demostrables: la I es el axioma 2); II.a) y II.b) son el axioma 5) para variables individuales y predicativas, respectivamente; la III es el axioma 6); la IV es el axioma 3); por último, la VI es el $T2$ antes probado y las reglas de inferencia son las de *modus ponens* y *generalización*.

En el lenguaje de este sistema, haciendo uso del λ-operador, se ha facilitado la definición de objetos abstractos. Los números naturales, teniendo también en cuenta las directrices de *Grundlagen*, son expresables en el lenguaje del sistema formal que comentamos; así, 0 se expresa como $[\lambda x \cdot \neg x = x]$; 1 como $[\lambda y \cdot y = [\lambda x \cdot \neg x = x]]$; 2 como $[\lambda z \cdot \neg z = z \vee z = [\lambda y \cdot y = [\lambda x \cdot \neg x = x]]]$; etc.[13] No se ha recurrido a ningún axioma de infinitud, por lo que no se presupone la existencia de una colección infinita de objetos concretos; pero los teoremas que se obtienen garantizan alguna totalidad infinita, en la que estarán incluidos objetos *concretos* y λ-*abstractos*. Si tomamos los dígitos como abreviaturas de los λ-abstractos correspondientes, por

[13] Aquí podrían surgir ciertas dificultades de interpretación. Por ejemplo, teniendo en cuenta $T2$, si un signo predicativo R de $\mathcal{L}$ representa un concepto, la extensión de éste es definible mediante λ-operador o, lo que viene a ser lo mismo, un modelo (abstracto) de $\mathcal{L}$ define *internamente* las extensiones. Entonces la serie numérica no se define internamente mediante modelos del sistema formal y parece presupuesta, contra lo que se afirma más tarde. En cualquier caso, en esta exposición se considera el planteamiento de un sistema logicista como el de una lógica plena en el sentido de contar con un lenguaje, una semántica para el mismo y un mecanismo deductivo, y, aunque no exento de dificultades, ello puede ayudar a una mejor comprensión del significado de esta doctrina.

el anterior $T3$ se contará, para cada $n \geq 0$, con una expresión $\exists R(n = R)$. Por otra parte, el número de conceptos (y relaciones) representables en el sistema —en los dos sentidos arriba señalados— es tanto como el de posibles fórmulas estratificadas; a este respecto, $T4$ no es más que un esquema axiomático de *comprehensión*, gracias a cuya demostración en el sistema podemos afirmar, además, que éste es *normal*.[14]

5. *La supervivencia de un logicismo moderado*

A lo largo de los párrafos precedentes no hemos ofrecido argumentos que inviten a concretar el programa logicista con el entusiasmo de sus primeros inspiradores; pero tampoco hemos hallado una razón suficiente para relegarlo definitivamente por inservible a un rincón de la historia de la lógica (que ya no hubiera que tocar por concluido). Si nos atenemos a la perspectiva según la cual la matemática, de alguna manera, es lógica, tal vez sea admitida por pensadores "no logicistas"; ello plantea la pregunta de si acaso no estamos usando el calificativo de *logicista* en un sentido distinto del habitual. En concreto, el punto de vista fuerte, mencionado al principio, es inequívocamente logicista; el mismo punto de vista, ahora en sentido débil, puede entenderse como el *minimum* que la filosofía logicista posee como hálito para atajar los problemas de fundamentos, frente al empuje de otras doctrinas, como se observará haciendo alguna recapitulación.

Las posiciones logicistas son de interés para el estudio de los fundamentos de la matemática. Una lógica adecuada para estas tareas es la lógica de predicados de segundo

[14] En realidad, en este trabajo no se ha estudiado la *normalidad* de modelos; pero ningún modelo es normal si no satisface el *axioma de Aristóteles* (en este sistema el número 5) o el principio de *comprehensión*. Véase Church [2] o Nepomuceno [10].

orden; que sea presentada como un sistema formal es una cuestión al margen, y su incompletitud (estándar) afecta al programa logicista de algún modo; pero la concepción de la naturaleza lógica de los teoremas de las matemáticas queda indemne en cierto sentido.[15]

Como hemos visto, la incompletitud de sistemas aritméticos elementales probada por Gödel tiene como consecuencia, cuando se pasa a sistemas aritméticos de segundo orden, que la incompletitud se transfiere, por así decir, a la lógica misma y, dado que el sistema logicista definido es de segundo orden, éste es incompleto; sin embargo, su carácter logicista no se ve afectado por esta limitación, a tenor de lo indicado en el apartado precedente. Por otra parte, si entendemos como fundamentación de un cuerpo de conocimientos una reconstrucción de sus principios, verdades o proposiciones cognoscibles,[16] ya sea por axiomatización o reducción, entonces el sistema propuesto es una combinación de ambos métodos, puesto que se trata de un sistema axiomático en el cual se estudian nociones útiles para el intento de reducción logicista.

Aunque no hemos estudiado la consistencia de este sistema axiomático, hemos de hacer algunas observaciones acerca de este punto. En primer término, en caso de no restringirnos a fórmulas estratificadas, como se ha señalado más arriba, se pueden derivar versiones de la paradoja de Russell. Por ejemplo, por $T3$ se obtendría $\exists P([\lambda x \cdot \neg x(x)] = P)$; suponiendo que éste sea $R, [\lambda x \cdot \neg x(x)] = R$, y, por aplicación de la regla de λ-conversión, $[\lambda x \cdot \neg x(x)] = R \leftrightarrow \forall x(R(x) \leftrightarrow \neg x(x))$, por lo que $\forall x(R(x) \leftrightarrow \neg x(x))$, de donde, puesto que $\forall x(R(x) \leftrightarrow \neg x(x)) \rightarrow (R(R) \leftrightarrow \neg R(R))$

[15] De hecho, el resultado de Gödel afecta más a las pretensiones *formalistas*, aunque, en contrapartida, serán sus métodos los que se impongan definitivamente.

[16] *Cfr.* [11] pp. 26 y ss.

—axioma 5)—, por *modus ponens* $R(R) \leftrightarrow \neg R(R)$. Por otra parte, de acuerdo con $T4$, $\exists P \forall x(P(x) \leftrightarrow \forall y(y = x \leftrightarrow \neg y(x)))$, de donde se puede deducir que para algún P, $P(P) \rightarrow \neg P(P)$.[17] En cualquier caso, sin embargo, estos ejemplos contienen fórmulas no estratificadas, a diferencia de lo que se contempla en el sistema en cuestión; de aquí que no proceda su aplicación. En segundo lugar, si se probara la corrección del sistema, entonces éste sería consistente; ello iría en la línea de entender que los axiomas 1), 2) y 3) son tautologías, 4) y 6) se pueden considerar válidos, 5) representa el axioma de Aristóteles; en cuanto a las reglas, las dos primeras son bien conocidas y la λ-conversión capta la idea de que dos conceptos (o relaciones, en su caso) de idéntica extensión (en los cuales caen exactamente los mismos objetos) son equivalentes, siempre que supongamos que algunos conceptos carecen de extensión o que no toda fórmula determina un concepto —únicamente las estratificadas lo hacen. En términos modelo–teóricos, definiendo adecuadamente cómo se interpretan los λ-abstractos en modelos fregeanos,[18] para obtener la consistencia habríamos de construir un modelo (fregeano) del sistema.

Para concluir, constatemos que se dan dos hechos relevantes:[19] 1) la paulatina reducción del vocabulario propio

[17] En [8] aparece una derivación en un sistema de cálculo tipo Gentzen. En [1] aparecen diversos comentarios y deducciones de fórmulas que son versiones de la paradoja, también determinados resultados de consistencia relativa de ciertos sistemas axiomáticos.

[18] Véase [8]. $\mathcal{M} = \langle \langle D_i \rangle_{i \in I},\ f,\ \mathcal{I} \rangle$ es un *modelo fregeano* si $\langle \langle D_i \rangle_{i \in I}, f \rangle$ es un *marco fregeano* e $\mathcal{I}$ una función interpretación. El marco verifica lo siguiente: $\langle D_i \rangle_{i \in I}$ representa una familia de dominios $D_0, D_1, \ldots$, tal que $D_0 \neq \emptyset$ y, para todo $n \geq 1, D_n \subseteq \mathcal{P}(D^n)$; f es una función con dominio en $\bigcup_{i \in I} \{D_i\}$ y rango en D_0, de manera que si $c \in D_0$, $f(c) = c$, mientras que si $\mathbf{R} \in D_n$, para $n \geq 1$, entonces $f(\mathbf{R}) \in D_0$.

[19] Con matizaciones más o menos ligeras. *Cfr.* Church [2]. [1] es también de interés al respecto.

del lenguaje ordinario de la matemática a prácticamente muy poco más que el vocabulario de la lógica; 2) la tendencia a desarrollar la mayor parte posible de teorías matemáticas —sobre todo en la perspectiva de su fundamentación— a partir de los mismos sistemas axiomáticos, es decir, a partir de sistemas de axiomas con una misma lógica subyacente. Aunque no se trata de un mérito exclusivo del logicismo, estas circunstancias refuerzan la idea de que el mencionado punto de vista débil prevalece.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Cocchiarella, N.B., "Frege, Russell, and Logicism", en L. Haaparanta y J. Hintikka (comps.), *Frege Synthesized. Essays on the Philosophical and Foundational Work of G. Frege*, Reidel, Dordrecht, 1986, pp. 197–251.

[2] Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, 6a. reimpresión, 1970.

[3] ——, "Mathematics and Logic", en E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski (comps.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proceeding of the 1960 International Congress)*, Stanford, California, 1962, pp. 181–186.

[4] Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, G. Olms, Hildesheim, 1962.

[5] ——, *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros escritos filosóficos*, trad. H. Padilla, UNAM, México, 1972.

[6] ——, *Escritos lógico-semánticos*, trad. J.L. Luis y C. Pereda, Tecnos, Madrid, 1974.

[7] Kleene, S.C., *Introducción a la metamatemática*, trad. M. Garrido, Tecnos, Madrid, 1974.

[8] Nepomuceno, A., "Teoría de la predicación y cálculos lógicos", en *Actas del VII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*, Vich, Barcelona, 1991, pp. 469–476.

[9] ——, "Sistemas de cálculo como formas de logicismo", *Crítica*, vol. 25, no. 73, 1993.

[10] ——, "Las interpretaciones normales", en *Fragmentos de filosofía*, vol. 2, 1993, pp. 123–129.
[11] Shapiro, S., *Foundations without Foundationalism. A Case for Second Order Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

Recibido: 25 de mayo de 1993

SUMMARY

The point of view according to which logic has priority over mathematics has been maintained by some philosophers and mathematicians in two senses: a strong view and a weak view. Both of them are logicist: The first one regards mathematics as reducible to logic. The second one considers that the essence of mathematics can be known by researching the logical consequences of a certain system of postulates or axioms; thus, the underlying logic (whatever the mathematical theory might be) is crucial for this sort of studies.

Some logicist concepts are interesting in philosophy of mathematics. So it is necessary to study the state of being in use of each point of view. In fact, the weak view has prevailed. To show that, we settle down how logicist statements have been influenced by Gödel's theorem, though that goes against formalist philosophy. Afterwards, we present a formal system for second order logic; treatment of nominalization is enclosed, and every Frege's law is proved to be a theorem. Finally, a short balance is made.