CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía. Vol. 41, No. 122 (agosto 2009): 3–27

LA ESTRUCTURA LÓGICA DE LA TEORÍA DE LOS JUEGOS

ADOLFO GARCÍA DE LA SIENRA
Instituto de Filosofía
Facultad de Economía
Universidad Veracruzana
asienrag@gmail.com

RESUMEN: La literatura sobre teoría de juegos (TJ) usualmente se ocupa de dar formulaciones de la misma que son suficientes para considerar aplicaciones específicas (casi siempre en economía o ciencia política) o para demostrar la existencia de equilibrios. Este artículo está dedicado a proveer una reconstrucción lógica sistemática de la TJ que busca determinar su elemento teórico básico a través de la formulación de su ley fundamental. Después de definir los conceptos de estrategia, procede a mostrar de qué manera cualquier estrategia conductual determina un espacio de probabilidad sobre las historias del juego, como prolegómeno para definir el concepto de juego y considerar el problema de su aplicabilidad empírica.

PALABRAS CLAVE: aplicabilidad empírica, condiciones de ligadura, concepción estructuralista en las teorías

SUMMARY: The literature on game theory (TJ) is usually concerned with providing formulations of the same that are enough to consider specific applications (almost always in economics or political science), or to prove the existence of equilibria. This paper is devoted to provide a systematic logical reconstruction of TJ whose aim is to determine its basic theory-element through the formulation of its fundamental law. After defining the concepts of strategy, it proceeds to show how any behavioral strategy determines a probability space over the histories of the game, as a prolegomenon to the definition of the concept of game and the treatment of the problem of its empirical applicability.

KEY WORDS: empirical applicability, constraints, structuralist view of theories

1. *Introducción*

El elemento teórico básico[1] de la "economía neoclásica" se obtiene mediante la formulación axiomática del concepto de juego dinámico. La primera finalidad de este artículo es ofrecer una definición de este concepto que sea a la vez rigurosa, general y enteramente abstracta. Esto equivale a caracterizar de manera extrínseca[2] los modelos de la teoría de los juegos. La segunda es discutir el contenido de la

[1] Para las definiciones de los conceptos metateóricos aquí empleados, véase Balzer, Moulines y Sneed 1987.

[2] Una caracterización extrínseca de los modelos de una teoría científica consiste en describir sus modelos de manera precisa y completa, dentro del lenguaje informal de la teoría de los conjuntos. Esto equivale a una caracterización informal de su estructura lógica, la cual, a su vez, es necesaria para la empresa de intentar formular

ley fundamental de la teoría de los juegos dinámicos. La tercera es discutir la aplicabilidad empírica de esta teoría y mostrar que las condiciones conocidas como "axiomas de la preferencia revelada" (Samuelson 1938, 1947) no son más que casos especiales de una cierta condición de ligadura.

La clase de los juegos dinámicos es suficientemente general para casi todas las aplicaciones económicas. Su horizonte temporal puede ser finito o infinito, la secuencia temporal discreta o continua, pero aquí sólo consideraré la estructura de los juegos de horizonte finito con tiempo discreto por dos razones. Una de ellas es que una primera formulación de la estructura lógica del concepto de juego dinámico no necesita involucrarse en los detalles de los juegos de tiempo continuo u horizonte infinito; la segunda es que es directa la generalización a los de tiempo continuo, a través del teorema de Kolmogórov-Bochner (véase Rao 1981, p. 9 y cap. III).

En la sección 2 introduzco el aparato conceptual que permite definir dichos juegos y en la sección 3 los cruciales conceptos de estrategia. Las estrategias conductuales determinan medidas de probabilidad sobre eventos que tienen como elementos historias factibles del juego. Dedico la sección 4 a explicar de qué manera dichas medidas quedan definidas sobre los conjuntos de tales eventos. Otro concepto central de la teoría es el de equilibrio, que abordo en la sección 5. La literatura usual de juegos ha procedido a buscar condiciones suficientes para que un juego posea un equilibrio, pero una formulación general de los fundamentos lógicos de la teoría no debe tratar de proporcionar algún conjunto de tales condiciones, sino más bien formular la ley fundamental que deben satisfacer todos los juegos. Habré de formular esta ley en la sección 6, proporcionando con ello una definición general y precisa del concepto de juego. En la sección 7 y final discutiré las condiciones de ligadura de la teoría y bosquejaré someramente la forma de la aserción empírica.

2. *Motivación*

Antes que nada, debe tenerse presente que éste no es un texto de *economía* sino de *filosofía*. Es verdad que trata acerca de una teoría que se aplica ampliamente en economía, pero por ello mismo es un texto de *metateoría*. Su novedad —si es que contiene alguna— consiste en presentar la teoría de los juegos como un "reino intelectual", como una unidad integral y sistemática, que incluye una explicación

la teoría mediante axiomas formulados en un lenguaje lógico formalizado. Véase esta discusión en Suppes 2002, cap. 1, especialmente las pp. 5–6.

general de la forma en que se aplica a los fenómenos empíricos. No pretende tratar de manera específica y explícita los conceptos novedosos en teoría de juegos, pero su generalidad debe poder abarcar éstos sin ningún problema. Hasta donde sé, ningún texto de teoría de juegos se ha preocupado por presentar la teoría de esta manera. Debemos recordar que la filosofía, como decía Hegel, vuelve sobre lo real (aunque en este caso lo "real" sea solamente una teoría científica) para reconstruirlo como un reino intelectual. Hace su aparición hacia el final del día, pintando en gris su objeto: "Cuando la filosofía pinta su gris sobre gris, surge una forma de vida envejecida, y con el gris no la rejuvenece, sino solamente la conoce: el búho de Minerva extiende sus alas sólo en el ocaso" (Hegel 1970, p. 28).[3]

Para captar el sentido de los conceptos matemáticos, el lector se puede imaginar que la teoría de juegos trata de agentes ideales con poderes computacionales y memoria ilimitados, así como con funciones de utilidad inmutables. Estos agentes tienen conocimiento perfecto acerca de las estrategias de los demás jugadores, así como de los espacios de probabilidad que las mismas inducen, aunque no necesariamente memoria *perfecta*; es decir, en una etapa determinada del juego, información acerca de las jugadas precisas que los demás jugadores han realizado previamente. La teoría pretende que los equilibrios sociales que se encuentren *de facto* en realidad vienen determinados por un equilibrio estratégico, el cual consiste en que la respuesta de cualquiera de los agentes es óptima con respecto a las respuestas de los demás (esto se definirá con exactitud más adelante). En otras palabras, los agentes se comportan como lo hacen porque han escogido sus respectivas estrategias conductuales que conjuntamente forman un equilibrio.

En la sección 5 habré de demostrar detallada y rigurosamente que dichas estrategias de hecho determinan una medida de probabilidad μ sobre el espacio de todas las historias posibles del juego, haciendo más probables unas historias que otras. Por otro lado, la observación empírica de la conducta de los agentes se resume en una medida de probabilidad ν, obtenida estadísticamente, también sobre el mismo espacio de historias posibles, que muestra a algunas como más plausibles que otras. Es importante destacar que μ se obtiene a partir de la suposición de un sistema de estrategias para los agentes, mientras que ν se obtiene empíricamente y es lógicamente independiente de

[3] "Wenn die Philosophie ihr Grau in Grau malt, dann ist eine Gestalt des Lebens alt geworden, und mit Grau in läßt sie sich nicht verjüngen, sonder nur erkennen: die Eule der Minerva beginnt erst mit der einbrechenden Dämmerung ihren Flug."

μ. La ley fundamental de la teoría expresa precisamente que ambas están relacionadas de cierta forma, a saber, que ν debe ser igual o aproximadamente igual a μ. Es decir, que la conducta observada es racionalizable como conducta estratégica en equilibrio. Por ello cabe decir que μ está determinada de manera subjetiva, mientras que ν es una frecuencia relativa observada. Se puede interpretar la ley de la teoría como si expresara que la frecuencia observada es el resultado de un comportamiento estratégico racional (que posiblemente tome en cuenta estados probables de la naturaleza).

Se podría pensar que la condición de ligadura (la cual es una generalización del axioma fuerte de la preferencia revelada de Samuelson-Houthakker) es demasiado rígida al exigir que, en toda aplicación de la teoría al "mismo" conjunto de agentes, la función de utilidad de cualquiera de ellos se deba suponer como idéntica. Sin embargo, ésta es una condición absolutamente indispensable, sin la cual sería imposible obtener, por ejemplo, la función de demanda walrasiana en los modelos que representan la conducta de un consumidor. De hecho, esta condición es *el fundamento de la estática comparativa*, ya que sin ella este ejercicio sería imposible. Debe ser considerada como una definición implícita del término "mismo agente".

3. *Prolegómenos conceptuales de los juegos dinámicos*

Consideremos ι o $\iota + 1$ jugadores en un conjunto $\boldsymbol{\iota} = \{1, \ldots, \iota\}$ o $\boldsymbol{\iota} = \{0, 1, \ldots, \iota\}$, de los cuales $1, \ldots, \iota$ son personales y 0 es el azar (o la naturaleza, la cual aunque aparece como factor solamente en algunos juegos, aquí será tratada como un jugador personal, con la salvedad de que carece de función de utilidad). Decir que $\boldsymbol{\iota}$ excluye el 0 significa que en algunas aplicaciones la "naturaleza" no es tomada en cuenta. El índice i recorrerá exclusivamente este conjunto. Consideremos también el horizonte temporal $\boldsymbol{\tau}$, el cual es un conjunto de etapas $\{1, \ldots, \tau\}$. El índice t recorrerá exclusivamente el conjunto $\boldsymbol{\tau}$, aunque también se usará el índice k. Cada jugador i tiene un espacio de acciones posibles en la etapa t, el cual será denotado por X_{it}. $\mathscr{F}_{it}$ es un σ-álgebra sobre X_{it}. Si X_{it} es discreto —a lo sumo numerable—, $\mathscr{F}_{it}$ es la familia de todos los subconjuntos de X_{it}; si X_{it} es continuo, $\mathscr{F}_{it}$ es el álgebra de Borel sobre X_{it}. Como hay juegos en los que a algún jugador i no le corresponde "tirar" en alguna etapa t, consideraremos que para ese jugador, en esa etapa, X_{it} es un conjunto unitario con el elemento $\mathbf{n}$ "no hacer nada".

Al comienzo de la etapa 1, al inicio del juego, cada jugador i es instado a elegir una de las acciones en su correspondiente espacio de acciones posibles X_{i1}, o bien a elegir una distribución de probabilidades sobre dicho espacio. Todas las acciones en X_{i1} son factibles, de modo que el conjunto de todos los resultados factibles de las elecciones en la etapa 1 es $X_1 = \times_{i=0}^{\iota} X_{i1}$. Un elemento típico de X_1 es un $(\iota + 1)$-tuplo de la forma $\mathbf{x}_1 = (x_{01}, x_{11}, \ldots, x_{\iota 1})$, donde $x_{i1} \in X_{i1} (i = 0, 1, \ldots, \iota)$. Cualquiera de estos tuplos es una posible historia inicial —de longitud 1— del juego. El conjunto de todos los resultados posibles —no necesariamente factibles— del juego en la etapa t es $X_t = \times_{i=0}^{\iota} X_{it}$.

Qué elecciones sean factibles en la etapa $t > 1$ dependerá de la historia del juego hasta la etapa $t-1$; el conjunto de las acciones factibles para i en esta etapa es $A_{it}[\mathbf{h}_{t-1}]$, donde $\mathbf{h}_{t-1} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{t-1})$. Denotamos con $H = \times_{t=1}^{\tau} X_t$ el conjunto de todos las historias posibles. Una *historia completa* es un elemento de H. Una *historia inicial hasta la etapa* $t - 1$ es una secuencia finita de elecciones $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{t-1})$. Dada la historia $\mathbf{h} \in X$, los resultados hasta la etapa $t - 1$ dentro de esa historia se denotan como

$$\mathbf{h}_{t-1} = \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{t-1}).$$

Convenimos en que $\mathfrak{a}_0(\mathbf{h})$ es el conjunto unitario de la historia nula $\mathbf{o}$. La secuencia de resultados de la etapa t en adelante se denota como

$$\mathfrak{b}_t(\mathbf{h}) = (\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \ldots \mathbf{x}_\tau).$$

Como ya dije, qué acciones sean factibles para un jugador en una etapa t determinada dependerá de la historia inicial del juego hasta esa etapa, de modo que dependerá de $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$. Esto requiere definir, para cada jugador i y cada etapa t, una correspondencia

$$A_{it} \circ \mathfrak{a}_{t-1} \colon H \to X_{it}$$

que asigna a cada historia inicial $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ hasta la etapa $t - 1$ el conjunto de las acciones factibles $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ para i en t. Supondré que $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] \in \mathscr{F}_{it}$ —que el conjunto de las acciones factibles es medible—.

La historia inicial $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ es *factible* syss, para todo k $(1 \leq k \leq t - 1)$, tenemos

$$x_{i(k+1)} \in A_{i(k+1)}[\mathfrak{a}_k(\mathbf{h})]$$

para todo $i \in \boldsymbol{\iota}$. Si la historia inicial $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ hasta la etapa $t-1$ no es factible, entonces $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] = \varnothing$ para todo $i \in \boldsymbol{\iota}$, de modo que la correspondencia A_{it} es no vacía sólo sobre el conjunto de las historias iniciales que son factibles hasta la etapa $t - 1$.

Sea $F \subseteq H$ el conjunto de las historias que son factibles en el juego. Entonces cualquier $\mathbf{h} \in F$ satisface el siguiente requisito de consistencia. Para todo i,

$$x_{i(k+1)} \in A_{i(k+1)}[\mathfrak{a}_k(\mathbf{h})] \text{para todo} k \geq 1.$$

El conjunto de las historias que son factibles dada la historia inicial $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ es

$$F_{+}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] = \left\{\mathbf{h}^{'} \in X | \mathbf{h}^{'} \in F \text{ y } \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}^{'}) = \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})\right\}.$$

El conjunto de las historias que son factibles hasta el periodo $t-1$ es

$$\mathfrak{a}_{t-1}(F) = \left\{\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}) | x_{i(k+1)} \in A_{i(k+1)}\left[\mathfrak{a}_k(\mathbf{h})\right] \text{ para todo } k \leq t-1 \text{ e } i \in \boldsymbol{\iota}\right\}.$$

Recuérdese que, en particular, $\mathfrak{a}_0(F)$ está definido y es igual a $\{\mathbf{o}\}$. Que esté definido es necesario para poder definir los distintos tipos de estrategias. Haremos la suposición de que

$$\bigcup_{\mathbf{h} \in F} A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] = X_{it}$$

para todo i y t.

4. *Los conceptos de estrategia*

Una *estrategia pura del jugador i en la etapa t* es una función $s_{it} \colon \mathfrak{a}_{t-1}(F) \to X_{it}$ que asigna a cada historia inicial factible $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ de longitud $t-1$ un punto de $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] \subseteq X_{it}$. En particular, para $t = 1$, s_{i1} es una función de $\mathfrak{a}_0(F) = \{\mathbf{o}\}$ en X_{i1}. Una *estrategia pura* del jugador i es una función $s_i \colon \bigcup_{t=1}^{\tau} \mathfrak{a}_{t-1}(F) \to X_1 \cup \cdots \cup X_\tau$ tal que $s_i(\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})) \in A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$. Claramente, la restricción de s_i a $\mathfrak{a}_{t-1}(F)$ es una estrategia pura del jugador i en la etapa t. Una estrategia pura se puede ver, así, como un conjunto de instrucciones que indica qué opción elegir ante cualquier historia inicial factible que se presente. El conjunto de todas las estrategias puras de i se denota como S_i. Un *perfil de estrategias puras* de los jugadores es una lista $(s_0, \ldots, s_\iota) \in S_0 \times \cdots \times S_\iota$.

La definición de las estrategias mixtas y conductuales requiere la introducción de espacios de probabilidad estándar. Según Aumann, la justificación intuitiva para tomar todos los espacios muestrales que aparecen en Teoría de Juegos como estándar es que

> todo artefacto aleatorio de la "vida real" es o bien "discreto", o "continuo", o una combinación de los dos; esto es, el espacio muestral involucrado debe ser o bien finito o numerable, o debe ser una copia de $\Im$ [el espacio medible $\langle[0,1],\mathscr{B}\rangle$, donde $\mathscr{B}$ es la familia de los subconjuntos de Borel del intervalo unitario] (con una medida que no es necesariamente la medida de Lebesgue). Todos los tales artefactos aleatorios pueden ser representados mediante variables aleatorias cuyo espacio muestral es de hecho [un espacio estándar]. (Aumann 1964, pp. 633–634)

De aquí en adelante, $\langle \Omega_{it}, \mathscr{B}_{it}, \lambda_{it}\rangle$ designará el espacio de probabilidad estándar que funge como espacio muestral del agente i en la etapa t.

Una *estrategia mixta del jugador i en la etapa t* es un par de funciones (ρ_{it}, σ_{it}) tales que $\rho_{it}\colon \Omega_{it} \to S_{it}$ asocia a cada evento elemental de Ω_{it} una instrucción $\rho_{it}(\omega) \in S_{it}$, y $\sigma_{it}\colon \Omega_{it} \times \mathfrak{a}_{t-1}(F) \to X_{it}$ asigna al evento $\omega \in \Omega_{it}$ e historia inicial $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ el punto $\sigma_{it}(\omega, \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})) = s_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})])$, donde $s_{it} = \rho_{it}(\omega)$. Se pretende que ρ_{it} represente un mecanismo aleatorio (como una ruleta o un par de dados) que asocia a cada evento elemental de este mecanismo una estrategia pura. Se requiere que la función $\sigma_{it}(\cdot, \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}))$ sea medible con respecto a $\mathscr{F}_{it}$. Una secuencia de pares de funciones $\{(\rho_{it}, \sigma_{it})\}_{t=1}^{\tau}$ es un *sistema de estrategias mixtas* del jugador i. Un *perfil de estrategias mixtas* es una lista $(\{(\rho_{1t}, \sigma_{1t}\}_{t=1}^{\tau}), \ldots, \{(\rho_{\iota t}, \sigma_{\iota t})\}_{t=1}^{\tau})$.

Una *estrategia conductual del jugador i en la etapa t* asocia a cada segmento inicial factible $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ una medida de probabilidad $\mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ sobre el álgebra de eventos $\mathscr{F}_{it}$ que asigna masa 1 a las acciones factibles en $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$; *i.e.*,

$$\mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})](A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]) = 1$$

y $\mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})](B_{it}) = 0$ si $B_{it} \cap A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] = \varnothing$ (*i.e.*, $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ es un conjunto de medida plena en $\mathscr{F}_{it}$).

Esta asignación se realiza del siguiente modo. Una estrategia conductual para i en t es una función medible $b_{it}\colon \Omega_{it} \times \mathfrak{a}_{t-1}(F) \to X_{it}$, tal que $b_{it}(\omega, \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})) \in A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ para cada $\omega \in \Omega_{it}$. Si $B_{it} \in \mathscr{F}_{it}$,

$$\mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})](B_{it}) = \lambda_{it}\{\omega \in \Omega_{it} | b_{it}(\omega, \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})) \in B_{it}\}$$

es la probabilidad del evento B_{it}. Una secuencia $\{b_{it}\}_{t=1}^{\tau}$ es un *sistema de estrategias conductuales* para el jugador i. Un *perfil de estrategias conductuales* es una lista $(\{b_{0t}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b_{\iota t}\}_{t=1}^{\tau})$.

Una estrategia pura s_{it} es un caso particular de una estrategia conductual b_{it} si, para cada $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}) \in \mathfrak{a}_{t-1}(F)$, $b_{it}(\omega, \mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})) = s_{it}(\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}))$ para todo $\omega \in \Omega_{it}$. Sin embargo, no es verdad en general que las estrategias mixtas sean casos particulares de las conductuales, aunque en los juegos de memoria perfecta a toda estrategia mixta le corresponde una estrategia conductual que le es equivalente en algún sentido (éste es el famoso teorema de Kuhn; véase Kuhn 1953 y Aumann 1964).

5. *Espacios de probabilidad determinados por las estrategias conductuales*

Una misma estrategia conductual b_{it} determina una medida de probabilidad sobre $\mathscr{F}_{it}$ para cada historia inicial factible $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})$ en $\mathfrak{a}_{t-1}(F)$. Supóngase que los agentes (incluyendo la naturaleza) han escogido un perfil de estrategias conductuales $(\{b_{it}\})$. En la etapa $t = 1$ la estrategia b_{i1} (para cualquier i) determina una medida de probabilidad μ_{i1} sobre $\mathscr{F}_{i1}$, y ésta es la única medida derivada de b_{i1} en esta etapa. Se obtienen de esta forma $\iota+1$ espacios de probabilidad $\langle X_{01}, \mathscr{F}_{01}, \mu_{01}\rangle$, $\langle X_{11}, \mathscr{F}_{11}, \mu_{11}\rangle$, $\ldots$, $\langle X_{\iota 1}, \mathscr{F}_{\iota 1}, \mu_{\iota 1}\rangle$. Por la manera en que se construyen las estrategias, cualquier evento en $\mathscr{F}_{i1}$ es estocásticamente independiente de cualquier evento en $\mathscr{F}_{i'1}$ $(i \neq i')$, de modo que podemos construir el espacio producto $\langle \times_{i=0}^{\iota} X_{i1}, \mathscr{F}_1, \mu_1\rangle$ de la manera usual. Pero obsérvese que $X_1 = \times_{i=0}^{\iota} X_{i1}$ no es más que el conjunto de las historias factibles en $t = 1$; *i.e.*, $\times_{i=0}^{\iota} X_{i1} = \mathfrak{a}_1(F)$. He mostrado así que el sistema de estrategias conductuales determina un espacio de probabilidad sobre $\mathfrak{a}_1(F)$. El lector podrá convencerse de que μ_1 es una medida σ-aditiva.

En $t > 1$ la situación es más complicada, pues aquí las estrategias conductuales del agente i determinan un espacio de probabilidad para cada historia inicial factible $\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h}) \in \mathfrak{a}_{t-1}(F)$, a saber el espacio

$$\langle X_{it}, \mathscr{F}_{it}, \mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]\rangle.$$

Todos estos espacios se conjugan para dar lugar al espacio cuyos eventos elementales son todas las combinaciones en $X_t = \times_{i=0}^{\iota} X_{it}$, si bien las factibles están en el subconjunto $A_t[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] = \times_{i=0}^{\iota} A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})] \subseteq X_t$, cuyo espacio de eventos es el álgebra producto $\mathscr{F}_t = \bigotimes_{i=0}^{\iota} \mathscr{F}_{it}$, y cuya medida de probabilidad es la medida producto $\mu_t[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ de las $\mu_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$. De esta manera se obtiene en cada etapa t y para cada $\mathbf{h}_{t-1} \in \mathfrak{a}_{t-1}(F)$ el espacio $\langle X_t, \mathscr{F}_t, \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}]\rangle$.

Con el objeto de definir la medida de probabilidad que cualquier estrategia conductual determina sobre el espacio de las historias factibles del juego, conviene definir la secuencia de espacios medibles $\{\mathfrak{H}_t\}_{t=1}^{\mathcal{T}}$, donde $\mathfrak{H}_t = \langle H_t, \mathscr{H}_t \rangle$ y los conjuntos H_t y $\mathscr{H}_t$ se definen recursivamente del siguiente modo: $H_1 = X_1$, $H_t = H_{t-1} \times X_t$, y $\mathscr{H}_t$ es el σ-algebra generado por los rectángulos de la forma $B_{t-1} \times B_t$, con $B_{t-1} \in \mathscr{H}_{t-1}$ y $B_t \in \mathscr{F}_t$. Claramente, $F \subseteq H = H_{\mathcal{T}}$ y estamos en posición de demostrar los siguientes resultados.

Lema 1. *Sea* $B_{t-1} \times B_t$ *un rectángulo, con* $B_{t-1} \in \mathscr{H}_{t-1}$ *y* $B_t \in \mathscr{F}_t$, *y supóngase que* μ_{t-1} *es una medida de probabilidad* σ*-aditiva sobre* $\mathfrak{H}_{t-1}$. *Entonces la integral*

$$\int_{B_{t-1}} f[B_t](\mathbf{h}_{t-1})\,\mathrm{d}\mu_{t-1},$$

tal que $f[B_t](\mathbf{h}_{t-1}) = \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}](B_t)$, *está bien definida, es no negativa y asigna 1 a* $H_{t-1} \times X_t$.

Demostración: Para cualquier $\mathbf{h}_{t-1} \in H_{t-1}$, $f[B_t](\mathbf{h}_{t-1}) = \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}](B_t) \in [0,1]$. Luego, $f[B_t](B_{t-1}) \subseteq [0,1]$ y $f[B_t]$ es acotada, y por lo tanto integrable, en B_{t-1} (Kolmogórov y Fomín 1975, p. 337). Además, como $f[B_t](\mathbf{h}_{t-1}) \geq 0$, la integral es no negativa. Finalmente, para todo $\mathbf{h}_{t-1} \in H_{t-1}$, $f[X_t](\mathbf{h}_{t-1}) = 1$ y tenemos

$$\int_{H_{t-1}} f[X_t](\mathbf{h}_{t-1})\,\mathrm{d}\mu_{t-1} = \int_{H_{t-1}} \mathrm{d}\mu_{t-1} = \mu_{t-1}(H_{t-1}) = 1. \diamondsuit$$

Sea $\widehat{\mathscr{H}_t} \subseteq \mathscr{H}_t$ el conjunto de los rectángulos $B_{t-1} \times B_t$, con $B_{t-1} \in \mathscr{H}_{t-1}$ y $B_t \in \mathscr{F}_t$. Definimos la función de conjuntos $\hat{\mu}\colon \widehat{\mathscr{H}_t} \to \mathbb{R}$ como la función que asigna a cada rectángulo $B_{t-1} \times B_t$ el número $\int_{B_{t-1}} f[B_t](\mathbf{h}_{t-1})\,\mathrm{d}\mu_{t-1}$.

Es fácil ver (*cfr.* Kolmogórov y Fomín 1975, teorema 1, p. 352) que el conjunto $\widehat{\mathscr{H}_t} \subseteq \mathscr{H}_t$ de los rectángulos $B_{t-1} \times B_t$, con $B_{t-1} \in \mathscr{H}_{t-1}$ y $B_t \in \mathscr{F}_t$, es un semianillo con unidad $H_t = H_{t-1} \times X_t$. Un resultado menos obvio es el siguiente.

Lema 2. $\hat{\mu}_t$ *es aditiva.*

Demostración: Sea $B_{t-1} \times B_t$ cualquier elemento de $\widehat{\mathscr{H}_t}$ y sea $(B_{t-1}^1 \times B_t^1) \cup \cdots \cup (B_{t-1}^n \times B_t^n)$ cualquier descomposición de $B_{t-1} \times B_t$ en rectángulos disjuntos por pares. Se requiere demostrar que

$$\hat{\mu}(B_{t-1} \times B_t) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}(B_{t-1}^k \times B_t^k).$$

Como $B_{t-1}^1, \ldots, B_{t-1}^n \in \mathscr{H}_{t-1}$, $B_t^1, \ldots, B_t^n \in \mathscr{F}_t$, y tanto $\mathscr{H}_{t-1}$ como $\mathscr{F}_t$ son semianillos (pues todo σ-álgebra lo es), existen conjuntos disjuntos por pares $C_{t-1}^1, \ldots, C_{t-1}^p \in \mathscr{H}_{t-1}$ tales que cada B_{t-1}^k se puede representar como la unión de algunos C_{t-1}; y existen conjuntos también disjuntos por pares $C_t^1, \ldots, C_t^q \in \mathscr{F}_t$ tales que cada B_t^k se puede representar como la unión de algunos C_t^k (Kolmogórov y Fomín, Lema 2, p. 46). Si L_k es el conjunto de los índices l tales que $B_{t-1}^k = \bigcup_{l \in L_k} C_{t-1}^l$, y M_k el conjunto de los m con $B_t^k = \bigcup_{m \in M_k} C_t^m$ ($L_k \subseteq \{1, \ldots, p\} = L$, $M_k \subseteq \{1, \ldots, q\} = M$), es cierto que dos conjuntos L_k y $L_{k'}$ —o M_k y $M_{k'}$—, no tienen que ser disjuntos, pero los productos $M_k \times L_k$ sí que lo son pues, si $M_k \times L_k$ y $M_{k'} \times L_{k'}$ tuvieran un punto en común, $B_t^k \times B_t^k$ y $B_t^{k'} \times B_t^{k'}$ no serían disjuntos, lo cual contradice la hipótesis. En otras palabras, $M_1 \times L_1, \ldots, M_n \times L_n$ es una partición de $M \times L$.

Como

$$B_{t-1} \times B_t = \left(\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l \right) \times \left(\bigcup_{m \in M} C_t^m \right),$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t) &= \int_{\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l} f\left[\bigcup_{m \in M} C_t^m \right] (\mathbf{h}_{t-1})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\
&= \int_{\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l} \left[\mu_t[\mathbf{h}_{t-1}] \left(\bigcup_{m \in M} C_t^m \right) \right] \mathrm{d}\mu_{t-1} \\
&= \int_{\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l} \left[\sum_{m \in M} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}]\,(C_t^m) \right] \mathrm{d}\mu_{t-1} \\
&= \int_{\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l} \sum_{m \in M} f\,[C_t^m]\,(\mathbf{h}_{t-1})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\
&= \sum_{m \in M} \int_{\bigcup_{l \in L} C_{t-1}^l} f\,[C_t^m]\,(\mathbf{h}_{t-1})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{l \in L} \int_{C_{t-1}^l} f\,[C_t^m]\,(\mathbf{h}_{t-1})\, \mathrm{d}\mu_{t-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(m,l)\in M\times L} \hat{\mu}_t(C^l_{t-1} \times C^m_t)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{(m,l)\in M_k\times L_k} \hat{\mu}_t(C^l_{t-1} \times C^m_t)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m\in M_k} \sum_{l\in L_k} \int_{C^l_{t-1}} f[C^m_t](\mathbf{h}_{t-1})\,\mathrm{d}\mu_{t-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m\in M_k} \int_{\bigcup_{l\in L_k} C^l_{t-1}} f[C^m_t](\mathbf{h}_{t-1})\,\mathrm{d}\mu_{t-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{B^k_{t-1}} \sum_{m\in M_k} \mu_{t-1}[\mathbf{h}_{t-1}](C^m_t)\,\mathrm{d}\mu_{t-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{B^k_{t-1}} \mu_{t-1}[\mathbf{h}_{t-1}](B^k_t)\,\mathrm{d}\mu_{t-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lema 3. *La función de conjuntos* $\hat{\mu}_t \colon \widehat{\mathscr{H}_t} \to \mathbb{R}$ *es una medida* σ-*aditiva.*

Demostración: Sea $B_{t-1} \times B_t$ cualquier rectángulo en $\widehat{\mathscr{H}_t}$ y $\{B^k_{t-1} \times B^k_t\}_{k=1}^{\infty}$ cualquier partición del mismo. Para derivar que $\hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t)$ observamos, en primer lugar, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t) \leq \hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t), \tag{$*$}$$

porque $\hat{\mu}_t$ es aditiva (*cfr.* Kolmogórov y Fomín 1975, teorema 5, pp. 311–312).

Para cada entero positivo k, sea $C^k_t = B^k_t \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B^l_t$. Entonces los C^k_t son disjuntos por pares, $C^k_t \subseteq B^k_t$ para cada k, y $\bigcup_{k=1}^{\infty} C^k_t = B_t$.

Para $\mathbf{h}_{t-1}$ arbitrario pero fijo, definimos para cada k una función ϕ_k sobre el conjunto B_{t-1} como sigue:

$$\phi_k(\mathbf{z}) = \begin{cases} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}](C^k_t) & \text{si } \mathbf{z} \in B^k_{t-1};\\ 0 & \text{si } \mathbf{z} \notin B^k_{t-1}. \end{cases}$$

Tenemos entonces que $\phi_k(\mathbf{z}) \geq 0$ y que, para todo n, como

$$\bigcup_{k=1}^{n} (B_{t-1} \times C_t^k) = B_{t-1} \times \left(\bigcup_{k=1}^{n} C_t^k\right),$$

$\bigcup_{k=1}^{n} (B_{t-1} \times C_t^k)$ es de hecho un rectángulo en $\widehat{\mathscr{H}_t}$. Como $\hat{\mu}_t$ es aditiva sobre $\widehat{\mathscr{H}_t}$, vale para todo n que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \int_{B_{t-1}} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} &= \sum_{k=1}^{n} \hat{\mu}_t(B_{t-1} \times C_t^k) \\ &= \hat{\mu}_t\left(\bigcup_{k=1}^{n} (B_{t-1} \times C_t^k)\right) \\ &\leq 1,\end{aligned}$$

de manera que $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{t-1}} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} < \infty$. Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\mathbf{z})$ converge en casi todo B_{t-1}, de donde se sigue (*cfr.* corolario al teorema de Beppo Levi, en Kolmogórov y Fomín 1975, p. 346):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{t-1}} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} &= \int_{B_{t-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \int_{B_{t-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}](C_t^k)\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \int_{B_{t-1}} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}] \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_t^k\right) \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \int_{B_{t-1}} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}]\,(B_t)\; \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t).\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\phi_k(\mathbf{z})$ se desvanece fuera de B_{t-1}^k,

$$\begin{aligned}\int_{B_{t-1}} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} &= \int_{B_{t-1}^k} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \int_{B_{t-1}^k} \mu_t[\mathbf{h}_{t-1}](C_t^k)\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \hat{\mu}_t(B_{t-1}^k \times C_t^k).\end{aligned}$$

Como $B^k_{t-1} \times C^k_t \subseteq B^k_{t-1} \times B^k_t$, tenemos $\hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times C^k_t) \leq \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t)$ y, *a fortiori*, $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times C^k_t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{t-1}} \phi_k(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\mu_{t-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times C^k_t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t).\end{aligned}$$

Esto, junto con $(*)$, establece que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{\mu}_t(B^k_{t-1} \times B^k_t) = \hat{\mu}_t(B_{t-1} \times B_t). \quad \diamondsuit$$

Teorema 1. *La medida* $\hat{\mu}_t \colon \widehat{\mathscr{H}_t} \to \mathbb{R}$ *puede ser extendida a una medida* $\mu_t \colon \mathscr{H}_t \to [0,1]$ *que asigna medida 1 a* H_t.

Demostración: Hemos demostrado que, siendo $\widehat{\mathscr{H}_t}$ un semianillo con unidad H_t, $\hat{\mu}_t$ es una medida σ-aditiva que asigna 1 a H_t. Estas condiciones garantizan que $\hat{\mu}_t$ puede ser extendida a una medida μ_t sobre el σ-álgebra generado por los rectángulos en $\widehat{\mathscr{H}_t}$. Pero este σ-álgebra no es otro que $\mathscr{H}_t$. $\diamondsuit$

Definimos recursivamente la medida $\mu \colon \mathscr{H}_T \to \mathbb{R}$ del siguiente modo: μ_1 es la medida ya conocida del espacio $\langle X_1, \mathscr{F}_t, \mu_1 \rangle$. Si μ_{t-1} es la medida sobre $\mathfrak{H}_{t-1} = \langle H_{t-1}, \mathscr{H}_{t-1} \rangle$, μ_t es la medida determinada por la integral

$$\int_{B_{t-1}} f[B_t](\mathbf{h}_{t-1})\, \mathrm{d}\mu_{t-1}$$

y μ es en particular μ_T. Esta μ es la medida general buscada sobre el conjunto de todos las historias posibles del juego. Se deja al lector demostrar que $\mu(F) = 1$.

6. *El concepto de equilibrio*

Hemos demostrado que cada perfil $\mathbf{b}$ de estrategias conductuales determina una distribución $\mu[\mathbf{b}]$ sobre el conjunto de todas las historias factibles del juego. Los agentes racionales que entran a jugar un juego buscan siempre escoger aquellas estrategias que maximizan su utilidad esperada. Nuestra tarea inmediata es definir este último concepto. La siguiente será definir el crucial concepto de equilibrio.

La suposición que subyace en la asignación de utilidades esperadas a los perfiles de estrategias conductuales es que cada jugador personal posee una ordenación de preferencias sobre todos los resultados (historias) posibles del juego, los cuales podemos identificar con los elementos de F. Es solamente por virtud de ello que se puede decir que para cada jugador personal i existe una función de utilidad $u_i\colon F \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el conjunto de los resultados posibles. Esta función de utilidad debe entenderse como la representación numérica de aquella ordenación. Lo mínimo que la teoría le exige a u_i (o a la ordenación de preferencias que esta función representa) es que sea integrable con respecto a $\mu[\mathbf{b}]$, pues se requiere definir la utilidad esperada $U_i(\mathbf{b})$ mediante una integral de la forma

$$\int_F u_i(\mathbf{h})\, \mathrm{d}\mu[\mathbf{b}].$$

Como $\mu[\mathbf{b}]$ es una medida de probabilidad bien definida, basta que la función u_i sea acotada sobre F para garantizar la existencia de la integral; es decir, basta que exista algún número real positivo α tal que $|u_i(\mathbf{h})| < \alpha$ para toda historia factible $\mathbf{h} \in F$. Esto es posible inclusive bajo la suposición de que el agente es insaciado, siempre y cuando la función al crecer se aproxime asintóticamente a cierto límite. Por lo tanto, no parece una suposición restrictiva y habré de incluirla como parte de la definición general de juego.

Para facilitar la definición de equilibrio adoptamos la convención siguiente: Si $\mathbf{b} = (\{b_{0t}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b_{it}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b_{\iota t}\}_{t=1}^{\tau})$ es un perfil de estrategias conductuales, denotamos mediante "$(\mathbf{b}; \{b'_{it}\}_{t=1}^{\tau})$" el resultado de sustituir en $\mathbf{b}$ el sistema de estrategias conductuales $\{b_{it}\}_{t=1}^{\tau}$ con el sistema $\{b'_{it}\}_{t=1}^{\tau}$ $(i = 1, \ldots, \iota)$; *i.e.*,

$$(\mathbf{b}; \{b'_{it}\}_{t=1}^{\tau}) = (\{b_{0t}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b'_{it}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b_{\iota t}\}_{t=1}^{\tau}).$$

Definición 1. Un perfil de estrategias conductuales

$$\mathbf{b}^* = (\{b^*_{0t}\}_{t=1}^{\tau}, \ldots, \{b^*_{\iota t}\}_{t=1}^{\tau})$$

es un *equilibrio* del juego syss, $\forall i \in \boldsymbol{\iota} \setminus \{0\}$,

$$U_i(\mathbf{b}^*) \geq U_i(\mathbf{b}^*; \{b_{it}\}_{t=1}^{\tau}) \quad \text{para cualquier sistema } \{b_{it}\}_{t=1}^{\tau}.$$

Si $\tau = 1$, el equilibrio es llamado un *equilibrio de Nash*.

El concepto de equilibrio es más general que el de equilibrio de Nash porque abarca varias etapas y requiere que los jugadores actúen como agentes independientes en cada periodo.

Llamemos *adecuado* a cualquier conjunto de perfiles de estrategias conductuales para el cual existe un equilibrio. Sobre la base de suposiciones más bien restrictivas, Chakrabarti (1992) ha demostrado que existe al menos un conjunto adecuado, lo cual es un resultado muy importante porque establece que el concepto de equilibrio no es vacuo. Sin embargo, sería erróneo esperar que la ley fundamental de la teoría garantice, mediante condiciones necesarias y/o suficientes, la existencia de equilibrios. Pues la ley fundamental de una teoría es un principio guía[4] que afirma, en términos muy generales, que para cada pretendida aplicación de la teoría existen ciertas magnitudes que explican los fenómenos. En el caso de la teoría de los juegos, esas magnitudes deben garantizar la existencia de equilibrios que expliquen la conducta observada.

¿Cuáles son los fenómenos que explica la teoría y cuál es la manera correcta de representar estos fenómenos? ¿Qué forma tiene el principio guía, la ley fundamental de la teoría? Estas preguntas llaman a reformular de manera sintética y sistemática lo que hemos expuesto hasta aquí.

7. *El concepto de juego*

Esta sección está dedicada a introducir la definición axiomática del concepto de juego dinámico de horizonte finito con tiempo discreto. El hilo conductor de la discusión tendiente a la producción de dicha definición es el problema del contenido empírico de la teoría cuando sus modelos típicos son vistos no como recomendaciones de política (modo normativo), sino como explicativos de conductas efectivamente observadas (modo positivo). Desde luego, ambos modos están interrelacionados y además de una manera muy profunda e interesante: a grandes rasgos, la afirmación empírica de la teoría es que ciertas conductas observadas de hecho son resultado (aproximadamente) de decisiones "normadas"; *i.e.*, decisiones racionales. El primer problema que tal planteamiento hace surgir es el relativo a la forma de representar las conductas observadas en cuanto conceptualmente distintas de las normadas, para precisamente poder hacer la comparación de unas con otras.

[4] Para una presentación del concepto de principio guía, véase Moulines 1978.

Empecemos con un caso relativamente fácil: un juego de una etapa con dos jugadores que tiene equilibrio en estrategias puras. Consideremos la competencia a través de la fijación de precios entre dos empresas que venden un mismo bien, digamos barriles de cerveza. El costo marginal es constante e igual a $c = \$30$. Hay una función de demanda $D(p) = 130 - p$ y cada una de las empresas puede fijar el precio de su producto, pero los consumidores sólo comprarán el producto con el precio más bajo, de modo que si $p_1 < p_2$, la empresa 1 surtirá a todo el mercado: $q_1 = D(p_1)$, y la otra no venderá nada. Si ambas fijan el mismo precio p, cada una venderá la mitad de la demanda total: $q_1 = q_2 = D(p)/2$. El beneficio del precio p para la empresa i $(i = 1, 2)$ es $\pi_i = (p - c)q_i$. Hay cuatro precios posibles para las empresas: $p_1 = \$60$, $p_2 = \$50$, $p_3 = \$40$ y $p_4 = \$30$, con los dieciséis posibles resultados que se representan en el cuadro de la página 19.

Para este juego, $\tau = 1$, $\boldsymbol{\iota} = \{1, 2\}$, $X_1 = X_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $F = X_{11} \times X_{21}$. Las estrategias puras de i son funciones s_i de $\mathfrak{a}_0(F) = \{\mathbf{o}\}$ en X_i. Como el jugador que pone al precio más alto no puede vender, ambos jugadores procurarán poner el precio más bajo, lo que a la larga llevará a ambos jugadores a imponer el precio de \$30, con una ganancia de \$0 para ambos. El perfil de estrategias (s_1^*, s_2^*) con $s_1^*(\mathbf{o}) = p_4 = s_2^*(\mathbf{o})$ es lo que se conoce como un equilibrio de Bertrand. Ahora bien, imaginémonos que los jugadores son racionales y que llevan a cabo un proceso de deliberación por el que llegan a la conclusión práctica —cada uno por su lado— de que lo más racional es jugar p_4. El punto es que un observador "externo" (que no esté enterado del proceso de pensamiento de los jugadores) sólo podrá tomar nota de la conducta manifiesta de los jugadores, esto es, que cada uno escogió p_4 dando lugar a que ocurriera la historia $\mathbf{h}^{16}$. En otras palabras, $\mathbf{h}^{16}$ es observable ("empírico") pero el proceso que llevó a los jugadores a escoger el perfil de estrategias (s_1^*, s_2^*) no lo es. El *quid* de la teoría es explicar la historia observada como el resultado de una elección racional de los jugadores.

En primera aproximación, la promesa del principio guía de la teoría es que es posible encontrar estructuras de preferencias $\langle F, \succeq_1\rangle$ y $\langle F, \succeq_2\rangle$, una para cada jugador, y funciones de utilidad u_1, u_2 que representan respectivamente tales estructuras, tales que

$$U_1(s_1^*, s_2^*) = \text{máx}_{s_1 \in S_1} U_i(s_1, s_2^*)$$

y

$$U_2(s_1^*, s_2^*) = \text{máx}_{s_2 \in S_2} U_i(s_1^*, s_2),$$

$\mathbf{h}^1$	$\mathbf{h}^2$	$\mathbf{h}^3$	$\mathbf{h}^4$	$\mathbf{h}^5$	$\mathbf{h}^6$	$\mathbf{h}^7$	$\mathbf{h}^8$
(p_1, p_1)	(p_1, p_2)	(p_1, p_3)	(p_1, p_4)	(p_2, p_1)	(p_2, p_2)	(p_2, p_3)	(p_2, p_4)
$(1050, 1050)$	$(0, 1600)$	$(0, 900)$	$(0, 0)$	$(0, 1600)$	$(800, 800)$	$(0, 900)$	$(0, 0)$

$\mathbf{h}^9$	$\mathbf{h}^{10}$	$\mathbf{h}^{11}$	$\mathbf{h}^{12}$	$\mathbf{h}^{13}$	$\mathbf{h}^{14}$	$\mathbf{h}^{15}$	$\mathbf{h}^{16}$
(p_3, p_1)	(p_3, p_2)	(p_3, p_3)	(p_3, p_4)	(p_4, p_1)	(p_4, p_2)	(p_4, p_3)	(p_4, p_4)
$(900, 0)$	$(900, 0)$	$(225, 225)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

Resultados del juego de precios de Bertrand donde U_i, la utilidad esperada del jugador i en este caso, satisface la

$$U_i(s_1^*, s_2^*) = \int_F u_i(\mathbf{h})\, \mathrm{d}\mu[\mathbf{b}] = u_i(\mathbf{h}^{16}) = 0. \tag{1}$$

porque $\mathbf{b} = (s_1^*, s_2^*)$ es una estrategia pura, lo cual hace que la probabilidad de $\mathbf{h}^{16}$ sea 1. El lector puede corroborar en el cuadro que (s_1^*, s_2^*) es el único punto de silla y, por lo tanto, el único equilibrio de Nash del juego.

Este ejemplo sugiere que representemos el fenómeno empírico objeto de la teoría como una historia efectivamente observada del juego y que la noción de explicación de la teoría es que la historia efectivamente observada es derivable de un equilibrio con respecto a ciertas funciones de utilidad. Otro ejemplo paradigmático de esta imagen es la doctrina de la demanda walrasiana, la cual nos propone un juego de dos etapas en que el azar empieza en la primera etapa imponiéndole al consumidor un sistema de precios y renta $(\mathbf{p}, w)$, para que en la segunda etapa el consumidor elija un menú de consumo que maximiza su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria usual determinada por $(\mathbf{p}, w)$. Ciertamente, las cosas son así cuando las estrategias son puras, pero no cuando son conductuales. Pues, si la función de utilidad del consumidor al ser maximizada determina una correspondencia o función de demanda que asigna a cada acción del azar un conjunto de vectores óptimos para el consumidor bajo esa acción, la maximización de una función de utilidad esperada típicamente no va a determinar una correspondencia de historias que sean respuestas óptimas. Más bien, hemos visto que la elección de un perfil de estrategias conductuales convierte al conjunto de historias factibles en un espacio de probabilidad.

Se sigue que —a diferencia de la aplicación conocida como "teoría de la demanda walrasiana"— no obtenemos un punto (historia) como resultado de la elección de las estrategias conductuales no puras, sino subconjuntos medibles de historias con ciertas probabilidades. ¿Qué forma adopta en este caso el fenómeno empírico objeto de la teoría? Parece claro que el fenómeno empírico debe ser representable como un *espacio de probabilidades*. Si esto es así, el principio guía promete que hay funciones de utilidad para los jugadores personales, y funciones de utilidad esperada obtenidas a partir de éstas, tales que el espacio es determinado por un perfil de estrategias que resulta ser un equilibrio del juego. Esto sugiere que tratemos el término "utilidad" como un término ludoteórico. Por lo tanto, los modelos posibles parciales pueden describirse como sigue. Usaré el término "juego" como abreviatura de "juego dinámico de horizonte finito con tiempo discreto" y "TJ" como abreviatura de "Teoría de los juegos dinámicos de horizonte finito con tiempo discreto".

Definición 2. $\mathfrak{A}$ es un *modelo posible parcial de la* TJ syss existen $\boldsymbol{\iota}$, $\boldsymbol{\tau}$, X_{it}, $\mathscr{F}_{it}$, $\mathfrak{a}_t$, A_{it} y ν tales que:

(J0) $\mathfrak{A} = \langle \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\tau}, X_{it}, \mathscr{F}_{it}, \mathfrak{a}_t, A_{it}, \nu \rangle$;

(J1) $\boldsymbol{\iota}$ es un conjunto que contiene a los primeros ι números naturales ($\iota > 0$), con la posible excepción de 0;

(J2) $\boldsymbol{\tau}$ es un conjunto que contiene a los primeros τ números enteros positivos $\tau \geq 1$;

(J3) X_{it} es un espacio métrico para cada $i \in \boldsymbol{\iota}$ y $t \in \boldsymbol{\tau}$;

(J4) para cada $i \in \boldsymbol{\iota}$ y $t \in \boldsymbol{\tau}$, $\mathscr{F}_{it}$ es el σ-álgebra sobre X_{it} determinado por los subconjuntos abiertos de X_{it};

(J5) para cada $t \in \boldsymbol{\tau}$, $\mathfrak{a}_t \colon H \to X_t$ es una correspondencia:

(J6) para cada $i \in \boldsymbol{\iota}$ y $t \in \boldsymbol{\tau}$, $A_{it} \colon \mathfrak{a}_{t-1}(H) \to X_{it}$ es una correspondencia tal que $A_{it}[\mathfrak{a}_{t-1}(\mathbf{h})]$ es un subconjunto compacto de X_{it};

(J7) ν es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $\langle H, \mathscr{F} \ \rangle$.

El espacio $\langle H, \mathscr{F}, \nu \rangle$ es "empírico" u "observable" (en el caso particular de la teoría del consumidor, ν asigna probabilidad 1 a la historia que culmina en la elección del consumidor); *i.e.*, no es ludoteórico, y se supone que puede ser determinado mediante métodos estadísticos a partir de la observación de varias partidas del juego. Lo que dice la ley fundamental de la teoría es que existen funciones de utilidad u_i para los jugadores personales, y funciones de utilidad esperada obtenidas a partir de éstas, tales que $\langle H, \mathscr{F}, \nu \rangle$ es de hecho el espacio determinado por un perfil de estrategias que resulta ser un equilibrio del juego. Con más precisión, la ley fundamental de la TJ se puede formular como sigue.

(J8) Existen funciones de utilidad acotadas $u_i \colon F \to \mathbb{R}$, y existe un equilibrio del juego $\mathbf{b}^* = (\{b^*_{0t}\}^{\tau}_{t=1}, \ldots, \{b^*_{\iota t}\}^{\tau}_{t=1})$ con respecto a estas funciones, tal que $\mu[\mathbf{b}^*] = \nu$.

Es menester enfatizar que la identidad $\mu[\mathbf{b}^*] = \nu$ no es una definición, sino que es contingente y puede ser falsa o satisfecha de manera meramente aproximada, ya que el lado izquierdo se refiere al espacio determinado por el perfil $\mathbf{b}^*$, mientras que el derecho se refiere a un espacio determinado estadísticamente.

El concepto buscado se puede definir ahora.

Definición 3. $\mathfrak{A}$ es un *juego* syss existen $\boldsymbol{\iota}$, $\boldsymbol{\tau}$, X_{it}, $\mathscr{F}_{it}$, $\mathfrak{a}_t$, A_{it}, ν y u_i tales que:

(J0) $\mathfrak{A} = \langle \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\tau}, X_{it}, \mathscr{F}_{it}, \mathfrak{a}_t, A_{it}, \nu, u_i \rangle$;

(J1) $\langle \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\tau}, X_{it}, \mathscr{F}_{it}, \mathfrak{a}_t, A_{it}, \nu \rangle$ es un modelo posible parcial de la TJ;

(J2) para cada $i \in \boldsymbol{\iota} \setminus \{0\}$, $u_i \colon F \to \mathbb{R}$, es una función acotada;

(J3) existe un equilibrio del juego $\mathbf{b}^* = (\{b^*_{0t}\}^{\tau}_{t=1}, \ldots, \{b^*_{\iota t}\}^{\tau}_{t=1})$ con respecto a las funciones u_i, tal que $\mu[\mathbf{b}^*] = \nu$.

Kreps (1990, p. 97) ha observado que un problema de las técnicas ludoteóricas es que "algunos tipos (importantes) de juegos tienen muchos equilibrios y la teoría [de juegos] no ayuda a determinar si alguno de ellos es 'la solución' y, si alguno lo es, cuál sea ésta". Sin embargo, en el enfoque positivo que hemos adoptado, lo único que importa es que exista al menos un equilibrio que "explique" la conducta observada con cierto grado de aproximación. Si hay varios equilibrios y un grupo social prefiere uno a los otros, el porqué de ello es un problema que rebasa la TJ y que bien puede requerir el concurso de varias disciplinas sociales para su tratamiento.

En su clásico libro *Games and Decisions*, Luce y Raiffa (1957, p. 50) introducen una "ley de comportamiento" para los jugadores que formulan así: "De dos alternativas que den lugar a resultados, un jugador elegirá la que arroje el resultado más preferido, o, más precisamente, en términos de la función de utilidad intentará maximizar la utilidad esperada."

La ley fundamental, como la hemos formulado en (J3), implica, desde luego, esta ley de comportamiento, pues si algún agente i no actuara conforme a ella, el perfil $\mathbf{b} = (\{b_{0t}\}^{\tau}_{t=1}, \ldots, \{b_{\iota t}\}^{\tau}_{t=1})$ de estrategias elegido no sería el óptimo y la conducta observada no sería el resultado de estrategias en equilibrio.

Luce y Raiffa oscilan entre considerar la ley de comportamiento como una aserción empírica sustancial, acerca del comportamiento de los agentes, y considerarla como una tautología que no describe el comportamiento, sino que describe la palabra "preferencia". Según esta interpretación, "el problema no es intentar verificar el postulado, sino más bien diseñar técnicas empíricas adecuadas para determinar preferencias individuales" (Luce y Raiffa 1957, p. 50). La alternativa a esta interpretación es "aceptar ciertas operaciones experimentales como definitorias de 'preferencias' y luego intentar verificar el postulado [. . .]. Esto es básicamente mucho más simple para el experimentador, pero la experiencia indica que no siempre tiene éxito" (Luce y Raiffa 1957, p. 50).

La concepción estructuralista de las teorías resuelve esta paradoja llamando la atención al hecho de que el concepto de utilidad (o preferencia) es ludoteórico y, por lo tanto, las funciones de utilidad no pueden ser determinadas sin hacer un uso esencial de la ley fundamental. Es posible que la intuición de este hecho haya llevado a los autores recién mencionados a decir que dicha ley es una tautología. Sin embargo, como no es posible garantizar a priori que para toda interacción descriptible mediante el aparato conceptual de un modelo posible parcial de la TJ (sin funciones de utilidad), siempre existirán funciones de utilidad que satifagan la ley fundamental, dicha ley no es ninguna tautología. Además, no existen técnicas "empíricas" —si por "empíricas" entendemos técnicas que no presupongan la validez de la ley fundamental— para determinar preferencias individuales, de manera que no es posible verificar el postulado de esa forma. De hecho, tal postulado es irrefutable a menos que se demuestre que es imposible encontrar dichas funciones de utilidad. Es posible que no existan tales funciones pero demostrar su inexistencia puede ser muy difícil o de plano imposible.

8. *Aplicabilidad empírica de la* TJ

Por definición, una aplicación exitosa de la TJ a un conjunto de datos empíricos (una estadística $\langle H, \mathscr{F}, \nu \rangle$) consiste en encontrar funciones de utilidad u_i, y un equilibrio del juego $\mathbf{b}^*$ con respecto a estas funciones, que expliquen ("racionalicen") los datos empíricos.

Para ejemplificar y motivar la discusión, consideremos nuevamente la teoría clásica de la demanda, la cual es una especialización de TJ que podemos describir como sigue. Se trata de una familia de juegos de dos etapas. En la primera etapa, $t = 1$, el azar 0 arroja un par $(\mathbf{p}, w)$, consistente en un sistema de precios $\mathbf{p}$ y una cantidad de dinero w, en $P \times W$, donde P es un subconjunto del ortante no negativo Ω de $\mathbb{R}^L$ y W es un conjunto de números reales positivos.

Como, en esta etapa, el agente 1 —el consumidor— está a la expectativa, elige no hacer nada ($\mathbf{n}$). En la segunda etapa, teniendo la información relativa a qué par $(\mathbf{p}, w)$ arrojó el azar, el agente escoge un punto $x_{12}(\mathbf{p}, w)$, en el conjunto $X_{12} \subseteq \mathbb{R}^L$ de los menús de consumo posibles, que satisface la restricción $\mathbf{p}x \leq w$, mientras que el azar no arroja nada. Así, una típica "partida" de este juego es una secuencia de la forma $((\mathbf{p}, w), \mathbf{n}), (\mathbf{n}, x_{12}(\mathbf{p}, w))$.

La secuencia $((\mathbf{p}, w), \mathbf{n}), (\mathbf{n}, x_{12}(\mathbf{p}, w))$ satisface la ley fundamental si existe un perfil $\left(\{b^*_{0t}\}^2_{t=1}, \{b^*_{1t}\}^2_{t=1}\right)$ tal que $b^*_{01}(\mathbf{p}, w) = 1$, $b^*_{02}(\mathbf{n}) = 1$, $b^*_{11}(\mathbf{n}) = 1$ y $b^*_{12}(x_{12}(\mathbf{p}, w)) = 1$; y una función de utilidad u_1 tal que $x_{12}(\mathbf{p}, w)$ maximiza u_1 sujeto a la restricción $\mathbf{p}x \leq w$. Un conjunto de datos empíricos $\hat{x}_{12}(\mathbf{p}^1, w^1)$, ..., $\hat{x}_{12}(\mathbf{p}^n, w^n)$ es racionalizable (explicable por la teoría) si existen una función de utilidad u_1 y perfiles $\left(\{b^k_{0t}\}^2_{t=1}, \{b^k_{1t}\}^2_{t=1}\right)$ $(k = 1, \ldots, n)$ tales que $b^k_{01}(\mathbf{p}, w) = 1$, $b^k_{02}(\mathbf{n}) = 1$, $b^k_{11}(\mathbf{n}) = 1$, $b^k_{12}(x_{12}(\mathbf{p}^k, w^k)) = 1$ y, para todo k, $x_{12}(\mathbf{p}^k, w^k)$ maximiza u_1 sujeto a $\mathbf{p}^k\mathbf{h} \leq w^k$ con $\hat{x}_{12}(\mathbf{p}^k, w^k) = x_{12}(\mathbf{p}^k, w^k)$.

Obsérvese que los datos $\hat{x}_{12}(\mathbf{p}^1, w^1)$, ..., $\hat{x}_{12}(\mathbf{p}^n, w^n)$, obtenidos de manera empírica y al margen de la teoría, son, en términos canónicos estrictos, "estadísticas" ν^1, ..., ν^n con $\nu^k((\mathbf{p}^k, w^k), \mathbf{n})$, $(\mathbf{n}, \hat{x}_{12}(\mathbf{p}^k, w^k)) = 1$. La función de demanda walrasiana es el mapeo que asigna, a cada evento azaroso $(\mathbf{p}, w)$, la elección óptima $x_{12}(\mathbf{p}, w))$ con respecto a una misma función de utilidad u_1. Esto significa que las acciones de un mismo consumidor son representadas por una familia de modelos que satisfacen la condición de ligadura de compartir la misma función de utilidad. Sólo así tiene sentido utilizar una familia de dichos modelos para determinar la función de utilidad de uno y el mismo agente.

La determinación de la función de utilidad a partir de datos empíricos en la teoría clásica del consumidor parte de la noción de preferencia revelada. Decimos que x se revela como *directamente preferido* a y en $\mathscr{E}$ $(xR^\circ y)$ syss existe un par $(\mathbf{p}, w)$ tal que $x_{12}(\mathbf{p}, w)$ está en $\mathscr{E}$, $y \leq \mathbf{p}w$ y $x = x_{12}(\mathbf{p}, w)$; si, además, $y \neq x$, decimos que x se revela como *directamente estrictamente preferido* $(xP^\circ y)$ a y. Decimos que x se revela como *preferido* a y en $\mathscr{E}$ $(xR^\bullet y)$ syss existe una secuencia $z_1, \ldots, z_n$ tal que $z_1 = x$, $z_n = y$ $(n \geq 2)$ con $z_1 R^\circ z_2$, y $z_{k-1} R^\circ z_k$ para $1 < k \leq n$. $\mathscr{E}$ satisface el *axioma débil de la preferencia revelada* syss las relaciones R° y P° satisfacen la siguiente condición para todo $x, y \in X_{12}$:

$$xR^\circ y \rightarrow \neg yP^\circ x.$$

$\mathscr{E}$ satisface el *axioma fuerte de la preferencia revelada* syss las relaciones $R^{\bullet}$ y P° satisfacen la siguiente condición para todo $x, y \in X_{12}$:

$$xR^{\bullet}y \rightarrow \neg yP^{\circ}x.$$

Houtakker (1950) demostró que si un conjunto de datos empíricos $\mathscr{E}$ satisface el axioma fuerte de la preferencia revelada, entonces existe una función de utilidad que los racionaliza. A partir de aquí se desarrolló una extensa literatura sobre el tema que incluye el tratamiento de métodos para la obtención de funciones de utilidad mediante diversos procedimientos.[5] Está claro, sin embargo, que estos métodos sólo son aplicables al caso particular de la teoría clásica de la demanda y no son generalizables para resolver de un plumazo el problema de la aplicación de la TJ a diferentes situaciones empíricas. No es razonable suponer que habrán de encontrarse conceptos análogos al de preferencia revelada para todas las aplicaciones potenciales de la teoría.

Hay, no obstante, una condición general que debe satisfacer cualquier colección de modelos que pretenda representar la conducta de un conjunto de agentes. Ésta es una condición de ligadura[6] que se puede formular del siguiente modo.

Condición de ligadura. *Siempre que se considere un conjunto de modelos de la* TJ *como aplicables a un mismo conjunto de agentes, la función de utilidad de cualquiera de ellos se debe suponer como idéntica en todos esos modelos.*

Es fácil ver que esta condición implica el axioma fuerte de la preferencia revelada en el caso particular de la teoría clásica de la demanda y que, en cualquier caso, es una condición necesaria para la aplicación consistente de la TJ a los fenómenos empíricos. Una buena parte (quizá la principal) de la ciencia normal dentro de este paradigma científico consiste en determinar las funciones de utilidad de los agentes a partir de su conducta observada. Que tal actividad se puede realizar de manera exitosa para cierta familia de estadísticas representativas de la conducta de agentes es la aserción empírica de

[5] Una reciente reseña de esta literatura, desde la publicación del seminal artículo de Samuelson (1938) hasta el año 2005, se encuentra en Varian 2006.

[6] Para una definición formal de este concepto, véase Balzer, Moulines y Sneed 1987, pp. 40–47.

la Teoría de los juegos dinámicos de horizonte finito con tiempo discreto.[7]

BIBLIOGRAFÍA

Aumann, R., 1964, "Mixed and Behavior Strategies in Infinite Extensive Games", en Dresher, Shapley y Tucker 1964, pp. 627–650.

Balzer, W., C.U. Moulines y J.D. Sneed, 1987, *An Architectonic for Science*, D. Reidel, Dordrecht.

Chakrabarti, S.K., 1992, "Equilibrium in Behavior Strategies in Infinite Extensive Form Games with Imperfect Information", *Economic Theory*, vol. 2, pp. 481–494.

Dresher, M., L.S. Shapley y A.W. Tucker (comps.), 1964, *Advances in Game Theory* (Annals of Mathematics Studies, no. 52), Princeton University Press, Princeton.

Hegel, G.W.F., 1970, *Grundlinien der Philosophie des Rechts oder Naturrecht und Staatswissenschaft im Grundrisse*, Suhrkamp Verlag, Fráncfort del Meno.

Houthakker, H.S., 1950, "Revealed Preference and the Utility Function", *Economica*, vol. 17, no. 66, pp. 159–174.

Kolmogórov, A.N. y S.V. Fomín, 1975, *Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional*, Mir, Moscú.

Kreps D.M., 1990, *Game Theory and Economic Modelling*, Clarendon Press, Oxford.

Kuhn, H.W., 1997, *Classics in Game Theory*, Princeton University Press, Princeton.

———, 1953, "Extensive Games and the Problem of Information", en Kuhn y Tucker 1953, pp. 193–216. (Reimpreso en Kuhn 1997, pp. 46–68.)

Kuhn, H.W. y A.W. Tucker (comps.), 1953, *Contributions to the Theory of Games. Volume 2* (Annals of Mathematics Studies, no. 28), Princeton University Press, Princeton.

Luce, R.D. y H. Raiffa, 1957, *Games and Decisions*, Dover Books, Nueva York.

Moulines, C.U., 1978, "Cuantificadores existenciales y principios guía en las teorías físicas", *Crítica*, vol. 29, pp. 59–88.

Rao, M.M., 1981, *Foundations of Stochastic Analysis*, Academic Press, Nueva York.

Samuelson, P.A., 1947, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

[7] Agradezco al cuerpo académico "Didáctica y Aplicaciones de la Matemática", de la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana, su hospitalidad para la presentación de una versión previa de este trabajo. Agradezco también, en particular, los útiles comentarios y sugerencias de los profesores Abraham Cuesta, Marco Antonio Méndez, Ernesto Pedro Menéndez y Raquiel Rufino López, así como los de los árbitros anónimos que dictaminaron una versión previa de este trabajo.

Samuelson, P.A., 1938, "The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility", *Review of Economic Studies*, vol. 6, pp. 65–70.

Suppes, P., 2002, *Representation and Invariance of Scientific Structures*, CSLI Publications, Stanford.

Szensberg, M., L. Ramrattan y A.A. Gottesman (comps.), 2006, *Samuelsonian Economics and the Twenty-First Century*, Oxford University Press, Nueva York.

Varian, H.R., 2006, "Revealed Preference", en Szensberg, Ramrattan y Gottesman 2006, pp. 99–115.

Recibido el 17 de junio de 2008; revisado el 17 de abril de 2009; aceptado el 13 de mayo de 2009.