CRÍTICA, *Revista Hispanoamericana de Filosofía*
Vol. XXVI, No. 78 (diciembre 1994): 27–71

DE LA DETERMINACIÓN DEL INFINITO A LA INACCESIBILIDAD EN LOS CARDINALES TRANSFINITOS*

CARLOS ÁLVAREZ J.
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
UNAM

Durante varios siglos el infinito ha constituido uno de los enigmas más espinosos para el pensamiento. De las reflexiones filosóficas y teológicas a las teorías matemáticas, el problema del infinito ha estado siempre presente, en algunos casos como tema central y en otros como elemento incontorneable.

Después de que a partir de los argumentos de Zenón se podía afirmar la divisibilidad *al infinito* de cualquier segmento, y con ello se podía concluir que cualquier distancia por recorrer podía ser considerada infinita, el carácter paradójico que acompañaba esta noción quedó de manifiesto. Con sus comentarios acerca del infinito presentados en el libro III de la *Física*, Aristóteles intentó resolver este aspecto paradójico y hacer inteligible el infinito. De esos comentarios podemos extraer dos conclusiones: por un lado, el infinito existe *necesariamente*, pero la existencia del mismo sólo puede ser *en potencia*. Tal existencia se manifiesta tanto en la propiedad de divisibilidad *al infinito* de las magnitudes como en la propiedad de adición *al infinito*

* El presente artículo se redactó con el apoyo de los proyectos IN600193 e IN600792 de la DGAPA.

de las cantidades. Ahora bien, no hay ni cantidades infinitas ni magnitudes que sean el resultado de una división al infinito. El reto de dar cuenta de estas dos propiedades, en apariencia simétricas, para las magnitudes y las cantidades, constituye no sólo un problema en el ámbito de la reflexión filosófica, problema ya señalado por Zenón, sino que marca también los ejes en los que se definen tanto los conceptos centrales como los puntos incontorneables de la geometría y de la aritmética. Por ello, las ciencias de las magnitudes y la de las cantidades suponen para su inteligibilidad la existencia, en tanto que atributo, del infinito *en potencia*. La una requiere la posibilidad de la divisibilidad de las magnitudes que apoye la propiedad de *continuidad* de las figuras geométricas, y de ellas la más sencilla: la línea. La otra requiere de la posibilidad ilimitada de la adición, condición sin la cual se llegaría al absurdo de suponer la existencia de tan sólo un número finito de *números*. De lo *infinitamente pequeño* a lo *infinitamente grande* el infinito provee de *sentido*, por su existencia en potencia, a la geometría y a la aritmética.

Pero este modo de caracterizar el infinito no permaneció invariable, aunque debemos decir que todos los intentos de clarificarlo se definieron, de un modo u otro, respecto de esta posición aristotélica.

El pensamiento filosófico en el siglo XIV anuncia ya un cambio respecto de Aristóteles, cambio que anuncia la destrucción del cosmos ptolemaico: si la finitud del cosmos cerrado había constituido el correlato necesario a la teoría aristotélica, los intentos del pensamiento del siglo XIV por concebir el infinito como un atributo, de hecho como el único atributo propio a la existencia de Dios, inician un camino que intentará reconocer en el universo, en un principio como manifestación divina, una prueba de la existencia en acto del infinito. De Nicolás de Cusa a Giordano Bruno se abre poco a poco la posibilidad para el nacimiento de un nuevo pensamiento astronómico que culminará con las teorías de Galileo y Newton.

Según una interpretación ya clásica, a partir de la revolución científica que dio inicio en el siglo XVII, el desarrollo de las ciencias, en particular el desarrollo de la mecánica y del cálculo infinitesimal, habría inaugurado una nueva era en la cual las reflexiones teológicas o metafísicas cedieron poco a poco su lugar a las determinaciones propiamente matemáticas del infinito. Ello, sin embargo, no eliminó ni volvió caduca la caracterización artistotélica acerca del infinito, ya que si bien el cálculo infinitesimal dio lugar a nuevas entidades matemáticas como las magnitudes "infinitamente pequeñas", las "magnitudes evanescentes" o las "magnitudes infinitamente grandes", el infinito del cual se ocupaba el nuevo cálculo seguía siendo esencialmente un *infinito en potencia*. Éste fue el caso para las magnitudes infinitamente grandes cuyas reglas de cálculo intentó dominar Leonhard Euler,[1] y lo fue también en el caso de las magnitudes infinitamente pequeñas tal y como éstas fueron determinadas en el cálculo infinitesimal de Cauchy: el proceso de *paso al límite* de una magnitud variable eliminó la posibilidad de que los infinitésimos fueran considerados magnitudes que reflejan la existencia en acto del infinito. Así para Cauchy[2] el único caso considerado para el *límite* de una serie —una suma infinita— era aquel en el cual dicha *suma* fuese un número finito.[3] Dicho valor finito só-

[1] Nos referimos esencialmente al tratamiento formal y algebraico que Euler propone para las magnitudes infinitamente grandes —y para las magnitudes infinitamente pequeñas— en sus textos *Introductio in Analysis Infinitorum* y en las *Institutiones Calculus Diferencialis* e *Institutiones Calculus Integralis*.

[2] En su *Cours d'analyse* de 1821 y en sus *Leçons sur le calcul infinitesimal* de 1823.

[3] Ello marca ya una diferencia importante con los trabajos previos de Euler, quien afirmaba que siempre era posible hablar, a partir de

lo podría mostrarse como la *suma* de la serie si, conforme el índice de los términos de la misma crecía indefinidamente (acto en el que se manifestaba un proceso infinito *en potencia*), la diferencia entre la suma de dicho número finito de términos y la *suma* de la serie tendía a ser una magnitud infinitamente pequeña.[4] En otras palabras, hay en esta forma de caracterizar el *límite* de una serie convergente un reconocimiento explícito de que se trata de una operación infinita que es irrealizable *en acto* y por ende sólo es aproximable: el límite o *suma* es aquel valor al cual la suma finita se aproxima conforme se incluyen más y más términos en dicha suma.[5] El hecho de reconocer la existencia de la *suma* para una serie convergente es inseparable del modo en el que se establece el criterio para que un valor finito sea considerado la suma de la serie, y

una simple expresión formal, de la suma de una serie convergente o bien divergente. El caso más conocido era el de la generalización de la fórmula del binomio de Newton: Newton había mostrado que un binomio de la forma $(1 + x)^n$ tiene una expansión en un polinomio con $(n + 1)$ términos. La misma fórmula, aplicada al caso en el que el exponente no sea un número entero n sino una fracción cualquiera μ, permite concluir que el binomio $(1 + x)^\mu$ tiene como expansión una serie infinita de la forma $1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2\cdot 3}x^3 + \cdots$, hecho que permitía asegurar a Euler que la *suma* de esta serie infinita es precisamente $(1 + x)^\mu$.

[4] Una magnitud infinitamente pequeña no es sino una magnitud variable cuyo límite —nueva aparición de una operación infinita en potencia— es cero.

[5] Si se toma por ejemplo la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$, asegurar que la suma de esta infinidad de términos sea 2 no significa que dicha suma infinita se haya realizado y que el resultado obtenido sea precisamente 2 (como lo es en el caso en el que se toma sólo un número finito de sumandos). Para Cauchy la suma es 2 porque no importa cuán pequeño se tome un número, siempre es posible encontrar que al sumar un número suficiente de sumandos de la serie infinita, la diferencia entre esta suma finita y el número 2 resultará menor que el valor dado originalmente.

ambos son solidarios con el hecho de que se acepta sólo *en potencia* el infinito que se presenta en dicha operación.

Sin embargo, el desarrollo de las matemáticas a partir del siglo XIX pareció marcar un nuevo derrotero para las reflexiones filosóficas; en un proceso que se inicia con Bolzano y culmina con la creación de Cantor de la teoría de los conjuntos, una nueva aproximación matemática habría de marcar un camino inédito: el infinito, que había sido la piedra de toque del nuevo cálculo, adquirió un nuevo estatuto en el trabajo matemático que permitió pensar en la posibilidad de superar de manera definitiva la aproximación aristotélica. En efecto, el tratamiento matemático del infinito a partir de la aparición de la matemática conjuntista hizo legítima la convicción de que éste, el infinito matemático, existe *en acto*. Más aún, como lo declararía David Hilbert en su artículo "Über das Unendliche", el estudio del infinito y su tratamiento *en acto* sólo son posibles por medio de las matemáticas y, de hecho, la teoría matemática del infinito no es otra sino la teoría de los conjuntos y de los números transfinitos inaugurada por Cantor.

En el análisis de este proceso de *actualización* del infinito en las matemáticas sobresalen dos momentos bien diferenciados:

1. La génesis, de Bolzano a Cantor, de la definición de conjunto infinito, a partir de la cual va a producirse una operación epistemológica central: la redefinición de las relaciones entre lo finito y lo infinito.
2. La creación cantoriana y la determinación *numérica* del infinito.

Sin embargo, el propio desarrollo de la teoría de los números transfinitos que fundamentó la certeza en este nuevo infinito en acto, con la teoría de los *grandes cardinales* y los *cardinales inaccesibles*, ha llegado a un punto en el que nos encontramos ante un nuevo renacer de la idea original de Aristóteles acerca del infinito.

Nos proponemos en este trabajo llevar a cabo dos análisis. En primer lugar, y de manera breve, analizaremos estos dos momentos que hemos señalado a fin de mostrar cómo y en qué medida contribuyeron a la constitución *en acto* del infinito. Puesto que se trata de una breve exposición que pretende trazar a grandes rasgos la constitución de la teoría de los números ordinales y cardinales transfinitos, haremos ver cómo es que éstos son definidos e introducidos en el pensamiento cantoriano. En un segundo momento, y suponiendo que ya se conocen las leyes de operación de la aritmética ordinal y cardinal transfinitas, al igual que los resultados centrales de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, plantearemos algunos problemas a los que nos conduce la nueva teoría de los grandes cardinales y señalaremos, para concluir, en qué medida es posible hablar de un renacimiento del pensamiento aristotélico sobre la cuestión del infinito.[6]

1. *La nueva definición del infinito*

Encontramos en Bolzano un primer intento de elaborar una auténtica teoría del infinito, intento que supone el reconocimiento de que no es sólo el infinito *en potencia* el único existente. Bolzano reconoce en el infinito en potencia tan sólo una magnitud creciente y *variable* —estatuto que, como ya señalamos, tiene en todo el análisis matemático hasta Cauchy. Para dar una caracterización del infinito que deje atrás la simple idea de una magnitud "mayor que cualquier

[6] Que sea posible hablar de un renacimiento del pensamiento aristotélico en torno del infinito no nos parece una idea aislada. Recordemos que René Thom (1992) ha tratado el mismo punto en lo que se refiere a la teoría aristotélica del continuo. Curiosamente, respecto tanto del infinito como del continuo, este *renacimiento aristotélico* parece constituirse en contra del pensamiento cantoriano.

cantidad dada", Bolzano recupera, en sus *Paradojas del infinito* (§ 10), una idea que ya se encuentra en Aristóteles, a saber, el concepto de infinito es aplicable únicamente a las colecciones o multiplicidades. Como primer paso, Bolzano define una colección infinita como la que contiene *propiamente* a cualquier colección finita (lo infinito se define a partir de lo finito),[7] y prueba la existencia de una colección infinita (en acto) mediante el ejemplo de la colección de todas las proposiciones verdaderas. Para ello genera una sucesión de proposiciones verdaderas que resulta equivalente a la sucesión de los números naturales, la sucesión:

$S_1 = A$, donde A es una proposición verdadera.

$S_2 =$ "A es verdadera", la cual es también verdadera y diferente de S_1, y permite por lo tanto definir la siguiente.

$S_3 =$ "S_2 es verdadera" (que igualmente difiere de S_2).

En general S_{n+1} será la proposición (verdadera) "S_n es verdadera".

De este modo a toda proposición de esta serie le corresponde un número natural; más aún, dicho proceso de generación de proposiciones verdaderas y distintas entre sí es infinito, pues "podemos continuar indefinidamente el proceso de construcción de proposiciones, siendo posible siempre generar nuevas proposiciones". Pero esta afirmación sólo podría mostrar la infinitud en acto de la colección de las proposiciones verdaderas si se acepta previamente que la colección de números naturales es actualmente infinita; sin esa condición el procedimiento descrito no puede más que

[7] Que contenga *propiamente* a cualquier colección finita significa que dada cualquier colección finita de elementos contenidos en la colección infinita, siempre habrá elementos en ésta que no formen parte de aquélla. Para considerar satisfactoria la definición de Bolzano hoy diríamos que un conjunto es infinito si contiene propiamente a subconjuntos infinitos de cualquier orden de magnitud (contiene a cualquier cardinal finito).

mostrar que la colección en cuestión es infinita en potencia. Ante esto, la solución de Bolzano es puramente ontológica: "estas proposiciones existen en sí mismas, independientemente de que las construyamos o no". La colección de las proposiciones mencionadas existe independientemente del proceso de generación que la muestra (como algo infinito) y es así (actualmente) infinita.[8]

Bolzano intentará más adelante mostrar la existencia de distintas multiplicidades infinitas que no son iguales entre sí en relación con la "pluralidad" o con la "multiplicidad de elementos" que contienen. La idea se origina en la propiedad de la *reflexividad* que es característica de los conjuntos infinitos: todo conjunto que es infinito tiene la propiedad de que siempre existe un subconjunto contenido propiamente en él y con el cual puede relacionarse siguiendo una correspondencia biyectiva.[9] Esta propiedad de los conjuntos infinitos permitiría establecer entre ellos las más variadas relaciones; por un lado, sería posible intentar definir una equivalencia entre dos conjuntos infinitos, equivalencia que pudiera generalizar para las colecciones infinitas el concepto de "número de elementos" de la colección, a partir de la existencia de una correspondencia biyectiva entre ellos; sin embargo, el que siempre se presente esta situación entre un conjunto infinito y un subconjunto propio es para Bolzano razón suficiente para no intentar generalizar para estos conjuntos una propiedad que se cumple para

[8] Como ya se ha señalado anteriormente, podemos asegurar que Bolzano se enfrentó, al igual que Dedekind, a un imposible; la única forma de asegurar la existencia de un conjunto infinito es por medio de un axioma.

[9] Ya Galileo señalaba en la "Primera jornada" de sus *Diálogos sobre las dos nuevas ciencias* que una de las propiedades más sorprendentes de los números, propiedad derivada de su "infinitud", era el hecho de que se podía establecer una correspondencia biunívoca entre la totalidad de los números y la parte constituida por los números cuadrados.

los conjuntos finitos (tienen el mismo número de elementos si, y sólo si, existe una correspondencia biyectiva entre ellos). En el caso de los conjuntos infinitos la correspondencia mostrará que ambos, el total y el subconjunto propio, son infinitos, pero la contención propia muestra, y lo hará sistemáticamente en Bolzano, que no pueden ser *iguales* desde el punto de vista de su "pluralidad" o "multiplicidad" (*Vielheit*).[10] En otras palabras, si la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos no es suficiente para definir una relación de orden, y con ello el concepto mismo de número cardinal infinito, es porque Bolzano es incapaz de reconocer la igualdad —en lo que al "número de sus elementos" se refiere— entre un conjunto y un subconjunto propio. Quien con mayor énfasis hasta ese momento había intentado romper con la idea aristotélica de que el infinito sólo podía existir en potencia, no pudo, pues era condición necesaria para constituir una teoría matemática del infinito actual romper con otro principio aristotélico: *que el todo es mayor que cualquiera de sus partes*.

Imposibilitado para definir el concepto de número cardinal infinito, y las relaciones de igualdad y de desigualdad entre ellos, Bolzano intenta disipar el carácter paradójico de esta "equivalencia" (mediante una biyección) entre un conjunto infinito y un subconjunto propio (y que por tanto no podrá jamás ser igual al total), al hacer notar que dicha igualdad sólo se podrá decidir a partir de la biyección en el caso exclusivo de las colecciones finitas. Que en el caso de las colecciones infinitas esto no es posible se desprende de lo siguiente: para las colecciones finitas la correspondencia biyectiva entre los elementos de dos de ellas equivale a tomar, uno a uno, los elementos de una de ellas y a hacer

[10] Claramente habrá que esperar la prueba de Cantor de la no numerabilidad del conjunto de números reales para poder resolver definitivamente este escollo.

corresponder cada uno de ellos con uno y sólo uno de los elementos de la otra, con la certeza de que al agotar los elementos de una se agotarán también los elementos de la otra. A final de cuentas se podrá al mismo tiempo asignar un numeral a cada uno de los elementos, con la certeza absoluta de que al término de la operación (término siempre posible debido a que se trata de colecciones finitas) se habrá llegado a un numeral n que permitirá establecer el *número de elementos de los dos conjuntos*. Para las colecciones infinitas, la existencia de la correspondencia biyectiva no permite tal proceso debido a que

> nunca llegaremos a un último elemento de [uno de ellos] pues precisamente por ser un conjunto infinito no existe un objeto al que podamos caracterizar de esa manera [...] no importa cuántos elementos se hayan señalado asignándoles numerales siempre quedarán otros por señalar.[11]

Es inútil insistir sobre el carácter que adquiere el infinito en este argumento.

A partir de la propiedad de *reflexividad* que se presenta en todo conjunto infinito, R, Dedekind propone en su memoria *Was sind und was sollen die Zahlen* un punto de vista que marcará un vuelco radical respecto a las posiciones sostenidas anteriormente —incluida la posición de Bolzano— sobre lo que debe entenderse por un conjunto infinito: *un conjunto es infinito si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre él y un subconjunto propio*.[12] Un conjunto es finito si no es infinito. La propiedad tomada hasta entonces por *paradójica* se constituye ahora en definición; deja de ser una constante que hace resaltar el aspecto paradójico de las colecciones infinitas —cuando se

[11] B. Bolzano, *Paradoxien das Unendlichen*, § 22.

[12] N es infinito si existe una función biyectiva φ: $N \rightarrow N'$, en donde $N' = \varphi(N)$ representa un subconjunto propio de N.

piensa que deben cumplir las mismas condiciones que las colecciones finitas— para convertirse en la condición que se debe satisfacer. No es que en una colección infinita se cumpla la propiedad de la reflexividad, sino que aquellas colecciones en las que se cumple serán las que se deberán considerar infinitas. En particular, para ser considerada infinita, una colección ha de ser tomada en su totalidad. No se trata así de una colección para la cual dada cualquier subcolección —finita— siempre será posible encontrar otro elemento no considerado.[13] A partir de esta definición de Dedekind, un conjunto infinito es una *totalidad infinita*; es un conjunto del cual se debe predicar la infinitud *en acto*.

Al tornar esta propiedad en definición, un conjunto no será infinito en la medida en que posea una *infinidad* de elementos; en su definición, Dedekind habla de un "conjunto infinito" y no de un conjunto con una "infinidad de elementos" —es decir, no se hace alusión a la cantidad de elementos que le pueden corresponder a un conjunto infinito. De hecho no será posible hablar del "número de elementos" de un conjunto antes de conocer qué es un *número*. Dedekind hace descansar el concepto de número sobre el concepto de conjunto infinito y sobre el de conjunto simplemente infinito. Si un conjunto infinito es aquel para el cual existe una correspondencia biyectiva entre él y un subconjunto propio, un subconjunto *simplemente infinito* será un conjunto infinito para el cual, a partir de un elemento que no se encuentre en la imagen de la función biyectiva, es posible obtener todo el conjun-

[13] Éste es manifiestamente el modo en el que Euclides asegura que hay una infinidad de números primos: dada cualquier colección de números primos considerada, siempre hay uno mayor al mayor de los primos considerados (dado cualquier número primo, siempre se puede encontrar uno mayor). De hecho, si p es un número primo, hay un número primo entre $p + 1$ y $p!$

to mediante la aplicación iterada de la función biyectiva. Es decir, el conjunto N es simplemente infinito si hay un elemento a en N, que no es miembro de $N' = \varphi(N)$, y tal que $N = \{a\} \cup N' = \{a, \varphi(a), \varphi(\varphi(a)), \ldots\}$.

Un número ordinal y *finito* se define como un elemento de un conjunto *simplemente infinito* (esta definición describe de manera natural el conjunto de números enteros positivos, donde el primer elemento es llamado "1" y la función biyectiva equivale a la función de sucesión que es la aplicación "+1").[14] La función biyectiva φ que define un conjunto simplemente infinito N induce de manera natural un orden lineal en el conjunto; siempre se tiene que $n < \varphi(n)$ y $\varphi(n)$ es el sucesor inmediato de n. En esta relación de orden, el elemento que no forma parte de la imagen de la función φ —que se puede denotar como 1— será el primer elemento del conjunto. Pero la propiedad es *categórica*: dados dos conjuntos simplemente infinitos S y S', si s_0 y s'_0 son sus respectivos elementos iniciales y φ y φ' sus respectivas funciones de sucesión, siempre existe una función biyectiva ψ: $S \to S'$ que cumple:

(i) $\psi(s_0) = s'_0$;

(ii) $\psi(\varphi(n)) = \varphi'(\psi(n))$.

Con ello la terna $\{N, \varphi, 1\}$ define, salvo isomorfismo, cualquier conjunto simplemente infinito, con lo cual la definición propuesta para un número ordinal y finito queda plenamente justificada. Otra prueba dada por Dedekind es la de que cualquier conjunto infinito T contiene un subconjunto S que es simplemente infinito.

Dado cualquier elemento n en el conjunto N, Z_n es el conjunto de los elementos menores o iguales que n, y es-

[14] Al establecer la igualdad $N = \{a\} \cup N'$, queda claro que en N sólo existe un primer elemento, a, y el resto de sus elementos se obtienen a partir de la función φ. Es decir, salvo el primero, todos los demás son *sucesores*.

te subconjunto de N tiene la propiedad de ser finito. Un teorema clave que permite caracterizar cualquier conjunto finito asegura que dado cualquier conjunto finito S, siempre existe un número n (elemento de N), tal que S puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el subconjunto Z_n. En este caso, el número n se llama *número cardinal* de S y nos dice "cuántos elementos tiene el conjunto S". Contar los elementos de S se entiende entonces como el resultado de relacionar sus elementos con los números de Z_n. El que todo conjunto finito sea biyectable con un subconjunto de la forma Z_n permite asegurar que el sentido de la finitud se obtiene a partir de un subconjunto —que no es infinito— de un conjunto infinito. La *conclusión* —y no la definición— será que para cualquier conjunto finito siempre será posible establecer su número de elementos por medio de su correspondencia con un subconjunto Z_n de N.

Pero la existencia del conjunto de todos los números finitos se apoya en la existencia de un conjunto infinito —se puede asegurar la existencia de un conjunto simplemente infinito si es que se puede asegurar la existencia de un conjunto infinito. Por ello Dedekind requiere de una prueba irrefutable de la existencia de los conjuntos infinitos. Dedekind asegurará la existencia del conjunto de todos los pensamientos, el cual, de acuerdo con su definición, es infinito.[15] Pero a nuestro juicio el argumento presentado no puede ser tomado como demostración de la existencia del infinito. Lo poco satisfactorio de su prueba refleja que no se trataba de una mera limitante de la técnica matemática de la que disponía.

[15] Dedekind intenta resolver esta exigencia retomando, en una nueva versión, el argumento de Bolzano acerca del conjunto *infinito* de todas las proposiciones verdaderas.

2. *La determinación numérica del infinito*

La determinación del infinito a partir de la teoría de los números transfinitos se inicia con la quinta memoria de Cantor sobre los conjuntos infinitos y lineales de puntos, memoria llamada "Fundamentos para una teoría general de los conjuntos" (Cantor, 1883b) pero, antes de analizar este proceso de determinación, es necesario recordar los rasgos más importantes en la constitución de la teoría cantoriana de los conjuntos. A partir del estudio de las series trigonométricas, Cantor introduce en 1872 su definición del conjunto continuo de números reales (Cantor, 1872). Esta definición se ve acompañada en breve tiempo de dos resultados claves: por un lado la prueba de que no existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los números naturales y el conjunto de todos los números reales. Este solo resultado ponía ya de manifiesto la existencia de dos tipos distintos de conjuntos infinitos. Otro resultado aseguraba, en cambio, la existencia de una correspondencia entre el conjunto de números algebraicos y el de los números naturales. La sola prueba de la no numerabilidad del conjunto R de números reales, que pone de manifiesto la existencia de dos "tamaños" distintos para los conjuntos infinitos, permite llegar finalmente a aquel punto que había permanecido inalcanzable hasta Bolzano: el convertir la relación de correspondencia biyectiva entre dos conjuntos infinitos en la definición de la *potencia* de dicho conjunto. Hay manifiestamente dos potencias infinitas distintas y es posible asegurar a partir de esta nueva definición que una es *menor* que la otra. Podemos decir así que Cantor y Dedekind logran, cada uno, encontrar una salida a los dos obstáculos a los que se enfrentaba la paradoja de la reflexividad.

Poco tiempo después, Cantor prueba que el conjunto de números reales es equipotente con el conjunto de puntos del espacio euclideano de cualquier número de dimensiones. De este resultado y del anterior, Cantor cree posible concluir de manera inequívoca que en los conjuntos de puntos, y al margen de su dimensión, sólo existen dos tipos de potencias infinitas: las de los conjuntos numerables y las de los conjuntos equipotentes con el continuo lineal.[16]

La equipotencia entre el conjunto de puntos del espacio de n dimensiones y el conjunto de puntos de una línea permite remitir a este último conjunto al estudio de los conjuntos infinitos de puntos. El análisis de los conjuntos lineales se llevó adelante por medio de una serie de seis memorias publicadas entre 1879 y 1884 con el título general "Sobre los conjuntos infinitos y lineales de puntos" (Cantor, 1879, 1880, 1882, 1883a, 1883b y 1884a). La memoria número cinco ya citada desarrolla una teoría que transformaba por completo el estudio de los conjuntos infinitos de puntos y le permitía entrar de lleno en el nuevo terreno del transfinito. Esta memoria muestra una extraña mezcla de resultados matemáticos y reflexiones filosóficas en torno al infinito, reglas de adición y principios de generación válidas para los *números transfinitos* así como precisiones sobre la realidad de los entes matemáticos. En suma, muestra el desarrollo caótico, en vivo, de una nueva teoría en la cual, antes de Cantor, nadie había jamás intentado adentrarse.

El primer objetivo de Cantor es justificar la existencia *en acto* del infinito matemático y, para ello, dar cuenta de sus posibles modos de determinación. La primera reflexión sobre la naturaleza del infinito muestra un doble desarrollo de esta noción en las matemáticas. Por un lado, en algunas teorías matemáticas se ha desarrollado una noción del infinito que lo trata como una magnitud variable, siempre

[16] Esta afirmación constituye la primera versión de la *hipótesis del cortinuo*. Un estudio detallado de la génesis de dicha hipótesis se presenta en Álvarez, 1993.

mayor que cualquier magnitud finita considerada; éste podría ser el caso, por ejemplo, en el cálculo infinitesimal. A esta idea del infinito, la más común y generalizada, Cantor la llama *infinito impropio*. En esta noción, en efecto, la idea del infinito tiene como principal característica presentarse como magnitud variable y absolutamente indeterminable, al grado de que cualquier intento de determinación resulta por esencia contradictorio con él. Pero en otras ramas de las matemáticas se ha delineado otra noción distinta: el punto al infinito de la geometría proyectiva, o el de la teoría de funciones, no se presentan como una variable indeterminable sino como un lugar preciso y totalmente determinado. Más aún, la idea de determinación en estos casos no resulta contradictoria con la noción del infinito y le es esencial; esta noción de *infinito propio* es la que debe retomarse como punto de partida para iniciar una exploración plena del infinito.

Si hasta ahora la diferencia esencial entre lo finito y lo infinito radicaba precisamente en la posibilidad de ser siempre determinado el primero y en la propiedad de indeterminación del segundo, la nueva investigación del infinito debía, a partir de la noción de infinito propio, otorgarle al infinito la posibilidad de ser determinado. Parecía ser la esencia del infinito el resistirse a cualquier determinación de tipo numérico, pero esto se debía a que se desconocían los números enteros infinitos con los que esta determinación numérica podía llevarse adelante.

Con ello queda delineada con claridad la doble estrategia de Cantor: por un lado, la creación de los números enteros transfinitos; por otro lado, proveer los medios matemáticos y filosóficos necesarios para poder fundamentar y justificar la existencia de estos nuevos números transfinitos.

El procedimiento para definir estos nuevos números transfinitos a partir de los cuales será posible la nueva determinación del infinito, se apoya sobre dos "principios de creación". El conjunto de los números enteros finitos cuenta con *un principio de creación* que permite siempre obtener un nuevo número a partir de otro ya dado. Este principio se expresa siempre por medio de la operación "+1" aplicada a cada número obtenido por la misma operación a partir de un primer elemento o "unidad". Con este principio se obtiene, en particular, la serie completa de los números enteros positivos, la cual tiene la propiedad de no alcanzar jamás un número máximo. Este procedimiento, equivalente al procedimiento introducido por Dedekind, definirá la *primera clase de números enteros finitos*. Para el caso de los números transfinitos serán necesarios, además de este principio, un segundo principio de creación y un tercer principio de limitación gracias al cual estos números se encuentran divididos en ciertas clases. El segundo principio consiste en la definición de un número como el límite de una sucesión de números constituida mediante el primer principio.[17] Si se considera la serie completa de números enteros finitos, el segundo principio de creación permitirá definir el primer número transfinito como el límite de esta serie. Cantor define así el primer número transfinito —el primer número de la clase II— como $\omega = \lim n$, cuando $\{n\}$ recorre la totalidad de los números enteros positivos, el cual será el primer número que es *mayor* que todos los números finitos que conforman la clase I. Una vez definido un número por medio del segundo principio, el primer principio permitirá definir una nueva serie infinita de números que tendrán a éste como su primer elemento. De este modo una nueva serie de números transfinitos se define a partir de ω: $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega + n, \ldots$, hasta que el segundo principio permita definir un nuevo número como el límite de esta nueva serie: $\omega + \omega = 2\omega$. De este modo, y

[17] En el mismo sentido en el que un número real se define como el límite de una sucesión convergente de números racionales.

mediante la combinación de los dos principios, se obtienen los nuevos números transfinitos:

$$\omega, \omega + 1, \ldots, 2\omega, \ldots, n\omega, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$$

La relación que guardan estos nuevos números transfinitos con los conjuntos infinitos no es otra sino la de que cada número transfinito permite establecer el *número de elementos de un conjunto infinito bien ordenado*.[18] La importancia de este concepto se deriva de la convicción de que cualquier conjunto puede ordenarse como un conjunto bien ordenado. Cualquier relación de orden establecida entre los elementos de un conjunto finito está determinada de manera unívoca, y esta relación está expresada precisamente por medio de un número entero positivo y finito. Esta situación ya no es válida en el caso de los conjuntos infinitos, al grado que deviene para Cantor en una caracterización precisa para esos conjuntos: es posible dar a sus elementos diferentes relaciones de orden:

> La diferencia esencial entre los conjuntos finitos y los infinitos es que un conjunto finito ofrece el mismo número [*die selbe Anzahl*] de elementos en todas las sucesiones que se le pueden dar. Para un conjunto infinito, en cambio, se tendrán en general diferentes números [*verschiedene*

[18] Se entiende por un conjunto *bien ordenado* aquel cuyos elementos se encuentran en una relación tal que para cualesquiera dos de ellos siempre será posible establecer que uno de ellos es menor que el otro. A esta condición (que diría simplemente que el conjunto está ordenado), se añade la de que el conjunto tiene un primer elemento (*i.e.* un elemento que es menor que cualquier otro elemento del conjunto) y de que cualquier subconjunto del conjunto tiene la propiedad de poseer un primer elemento. En realidad la primera definición dada por Cantor de este concepto, que es enteramente equivalente a la que hemos dado, asegura que para "cada elemento del conjunto siempre existirá uno que le sigue inmediatamente y, siempre y cuando no se trate del último elemento del conjunto, a cada subconjunto —finito o infinito— siempre sucederá también un elemento de manera inmediata".

Anzahlen], según la sucesión que se establezca entre sus elementos. (Cantor, 1883b, § 2)[19]

Al tomar un conjunto numerable $\{\alpha_i\}$ (un conjunto con la potencia del conjunto de números naturales), es posible ordenar sus elementos en la sucesión: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$. Pero el mismo conjunto $\{\alpha_i\}$ se puede ordenar como la sucesión: $\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_1\}$, o bien como la sucesión: $\{\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n+1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots\}$. Todas estas sucesiones son diferentes desde el punto de vista de la ley de ordenación que las define; sin embargo, se trata siempre del mismo conjunto.

A partir de lo anterior se puede decir que dos conjuntos tienen *el mismo número de elementos* si está definida una biyección entre ambos, capaz de preservar la relación de orden entre sus elementos. El hecho de que un conjunto finito tenga sólo una relación de orden entre sus elementos nos dice que este conjunto tendrá un único número (finito) de elementos asociado (de ahí la identificación de este concepto con la potencia del conjunto). Pero a un conjunto infinito siempre se podrán asociar varios *números de elementos*; cada uno de ellos corresponde a una relación de orden establecida entre sus elementos. Así, un *número* asociado a un conjunto infinito será un *índice* para cierta ordenación entre sus elementos: por ejemplo, si se considera una sucesión $\{\alpha_i\}$ equipotente a la clase I, será posible enlistar sus elementos en su orden usual: $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ en cuyo caso el número de sus elementos es ω. Pero como el conjunto es *infinito* se lo puede ordenar de un modo distinto, por ejemplo como: $\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_1\}$ (el elemento α_1 fue enviado "al final" de la lista) en cuyo

[19] Esta caracterización para los conjuntos infinitos es de hecho equivalente a la caracterización de Dedekind que ya hemos analizado. Es interesante observar que la definición de Cantor es anterior a la definición de Dedekind.

caso el número de sus elementos es $\omega + 1$.[20] O bien en el orden: $\{\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n+1}, \ldots, \alpha_2, \ldots, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n}, \ldots\}$ (se ha hecho primero una lista completa de todos los elementos "impares" y después de todos los "pares") cuyo número es 2ω. Cada uno de estos modos de ordenar el conjunto infinito cumple con la condición de ser un *buen orden*, según se describió anteriormente, y cada uno de los números transfinitos $\omega, \omega + 1, \ldots, 2\omega, \ldots$ que la describe, es un número de la clase II por el hecho de numerar (o *contar*) los elementos de un conjunto cuya potencia es la del conjunto de números naturales (o clase I).

> Podemos formular así estas proposiciones de la siguiente manera: todo sistema, con la potencia de la primera clase de números, se puede numerar con los números de la segunda clase de números, y sólo por éstos, de hecho los elementos del sistema se pueden arreglar de modo que sea numerado por un número de la clase II previamente designado; este número expresará el número de elementos del sistema con respecto a la ordenación.[21]

Los dos principios de creación utilizados para definir los números de la clase II inducen de manera natural una relación de orden —de hecho un buen orden— entre ellos: así se afirma que si α y β son dos números transfinitos de la clase II, $\alpha < \beta$ si es que este último se obtiene a partir del primero mediante la aplicación de uno —o de ambos— principios. Pero esto refleja el hecho de que si se toma un conjunto infinito numerable $\{\alpha_i\}$, ordenado de tal manera

[20] Ya que el conjunto $\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \alpha_1\} = \{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \cup \{\alpha_1\}$; el primer segmento $\{\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ es claramente equivalente al total $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$ —según la relación de orden— y le corresponde el mismo número: ω; a $\{\alpha_1\}$ le corresponde el número 1.

[21] G. Cantor, "Fundamentos para una teoría general de los conjuntos", § 3.

que su número de elementos esté dado por β, entonces en dicha relación de orden hay un segmento inicial que, tomado a su vez como conjunto bien ordenado, tiene a α como su número de elementos.

La relación que guardan entre sí las clases I y II descansa también sobre otra propiedad: la potencia de la clase II es mayor que la potencia de la clase I. La clase II constituye así un conjunto infinito cuya potencia es mayor que la de los llamados "conjuntos numerables" —que no son sino aquellos equipotentes con la clase I. Así, los números de la clase II, generados por dos principios, tienen esta condición restrictiva de poder numerar sólo conjuntos equipotentes con la clase I.[22]

Recordemos que el primer ordinal transfinito ω se definió como el límite de toda la sucesión de números enteros finitos; ello establece dos condiciones —condiciones íntimamente vinculadas con la propiedad de buen orden—:

1. La sucesión de los números enteros finitos es una sucesión ascendente.
2. El número ω es el sucesor inmediato de dicha sucesión.

Estas dos condiciones equivalen a que pueda afirmarse que ω es mayor que cualquier miembro de la sucesión ascendente de la cual es el límite; y que cualquier número entero menor que ω es rebasado a partir de un miembro de la misma sucesión.

A partir de estas propiedades es posible tomar la totalidad de los números de la clase II —que formarían una sucesión ascendente— y definir su límite $\omega_1 = \lim \alpha$, cuando $\{\alpha\}$ recorre los números de la clase II, y de modo que éste cumpla con respecto a dicha clase II las mismas propieda-

[22] Ésta es la propiedad que enuncia el principio de *limitación* que se mencionó anteriomente.

des que ω cumple respecto de la clase I. De esto obtenemos como primera consecuencia que ω_1 establece el *número de elementos* de un conjunto infinito no numerable y bien ordenado, y tal que dicha relación de buen orden sea la misma que el orden natural de los números ordinales de la clase II. Claramente a partir de ω_1 es posible definir una nueva clase de números transfinitos mediante los dos principios de creación ya introducidos. Sólo habría que subrayar que ahora el segundo principio puede definirse tanto para sucesiones cuya *longitud* sea igual a la de la clase I o para sucesiones con una *longitud* igual a la de la clase II.

Con ω_1 se inicia una tercera clase de números ordinales transfinitos, cada uno de los cuales establece el número de elementos, en distintas ordenaciones, de un conjunto con la potencia de la clase II. Este proceso puede generalizarse: a la clase III seguirá una clase IV y así sucesivamente; cada clase tendrá una potencia mayor que las anteriores y estará constituida por los números que enumeran un conjunto infinito y bien ordenado cuya potencia equivale a la de la clase precedente.[23]

A partir de 1895 Cantor introduce una nueva notación para las potencias de los conjuntos, un *aleph* o *número cardinal* denotará una potencia infinita. $\aleph_0$ es el número cardinal que corresponde a la potencia de la clase I, y la clase II —que como se había dicho consiste en todos los números que se pueden asociar a un conjunto cuya potencia es $\aleph_0$— se denotará con $Z(\aleph_0)$. La potencia de esta clase II al ser mayor que $\aleph_0$ —y de hecho es la potencia inmediatamente mayor—[24] tiene como número cardinal $\aleph_1$. La clase III será $Z(\aleph_1)$ y su número cardinal es $\aleph_2$.

[23] En otras palabras, cada clase establece todos los posibles *buenos órdenes* que se pueden dar a un conjunto infinito con la potencia de la clase anterior.

[24] Lo que significa que cualquier subconjunto infinito de la clase II es equipotente a la clase I o bien equipotente a la propia clase II.

El proceso se puede generalizar: $Z(\aleph_n)$ representa una clase cuyo cardinal es $\aleph_{n+1}$ —y es la clase de números para un conjunto cuyo cardinal es $\aleph_n$. Pero esta generalización es posible no sólo para los *alephs* que toman los números ordinales finitos como índices; es posible definir el cardinal $\aleph_\omega$ como el límite de la sucesión, bien ordenada y ascendente, de cardinales $\{\aleph_n\}$. Y a partir de ahí a otros cardinales como $\aleph_\alpha$ —con α un número de la segunda clase de números—, y más aún a los cardinales $\aleph_{\omega_1}, \ldots, \aleph_{\omega_\omega}, \ldots, \aleph_{\omega_\alpha}, \ldots$ Cada uno de estos cardinales, $\aleph_\alpha$, puede ser identificado con el primer ordinal, ω_α, que tiene a ese cardinal como potencia; es decir, con el ordinal que inicia la clase de los ordinales para un conjunto bien ordenado de cardinal $\aleph_\alpha$.[25]

A partir de los principios de creación será posible hablar de dos tipos de números ordinales. Un ordinal será *sucesor* si se obtiene con el primer principio a partir de un ordinal dado α; es decir, se trata de un número de la forma $\beta = \alpha + 1$. Un ordinal será *límite* si es el límite de una sucesión ascendente de ordinales menores que él, $\alpha = \lim \alpha_\nu$.[26] Claramente cualquier ordinal inicial ω_α es un ordinal límite.

La posibilidad de definir mediante estos principios los números ordinales y cardinales transfinitos es para Cantor una condición esencial para la matemática misma. El principio sobre el cual Cantor asegura que es posible concebir la existencia de un sistema de números transfinitos es el de que toda numeración de elementos de una colección,

[25] Claramente, al momento de definir un cardinal —o un ordinal *inicial*— como el límite de una sucesión de cardinales menores que él, se opera de la siguiente forma: $\aleph_\alpha = \lim \aleph_{\alpha_\nu}$ si $\alpha = \lim \alpha_\nu$, con lo cual $\lim \aleph_{\alpha_\nu} = \aleph_{\lim \alpha_\nu}$.

[26] Con ello se entiende que $\alpha > \alpha_\nu$ para todos los miembros de la sucesión, y que si $\beta < \alpha$, entonces a partir de un miembro de la sucesión α_μ, se tiene que $\alpha_\mu > \beta$.

finita o infinita, no es otra cosa sino la disposición de sus elementos en un orden tal que permita siempre distinguir un primer elemento y un único elemento sucesor después de uno ya dado. En otras palabras, la numeración de los elementos de una colección es posible si —y sólo si— a dicha colección se le ha dotado de un buen orden. Sobre esta base, la distinción entre las colecciones finitas y las infinitas no radica en que la numeración de sus elementos sea posible sólo para las finitas, sino en el hecho de que para una colección infinita son posibles distintas numeraciones. De este hecho se concluye que los conceptos de potencia y de numeración coinciden para un conjunto finito, mientras que en el caso de los conjuntos infinitos se tendrá que para un conjunto con cierta potencia infinita (independiente de la ordenación dada entre sus elementos) son posibles distintas numeraciones de sus elementos. De este modo, el concepto de número entero finito, que recubre las dos nociones de potencia y numeración, deberá escindirse en el momento de tratar con las multiplicidades infinitas dando lugar a dos conceptos distintos: el de la potencia de un conjunto y el del número de elementos del mismo.

Pero si la idea de numeración para cualquier conjunto se justifica mediante el principio según el cual todo conjunto puede ser dotado de un buen orden, la existencia de los números transfinitos —con los que dicha numeración se realiza en los conjuntos infinitos— va a requerir, para su justificación, de la solución de otros problemas, igualmente espinosos, que resultan pertinentes para las matemáticas en su conjunto y no tan sólo para esta nueva teoría de números transfinitos.

Por un lado, Cantor intenta justificar la exploración del infinito sin que esta posibilidad suponga la afirmación de la infinitud del entendimiento humano. Por otro lado, y con el propósito de esclarecer la naturaleza de los nuevos números transfinitos, y de considerarlos tan válidos como los números enteros finitos, Cantor iniciará una discusión sobre la naturaleza de la matemática misma. Las matemáticas encuentran su esencia en su *libertad*, lo que significa que ningún hecho extramatemático puede incidir sobre ellas. Los conceptos matemáticos tienen únicamente una realidad *inmanente*: tienen por su sola definición un lugar bien determinado en nuestro entendimiento, entran en relación con todas las demás partes del pensamiento y se distinguen de ellas. En cambio, la realidad *trascendente* se refiere a aquellos conceptos que son "la expresión o reproducción de procesos y relaciones existentes en el mundo exterior".[27] Los conceptos científicos fundamentan su existencia en estos dos principios y ello es un reflejo de la unidad del *todo*, de la naturaleza de lo *absoluto*: la unidad del pensamiento y del mundo exterior del que todo forma parte. Es en esta unidad en la que las matemáticas tienen un lugar especial: forman parte de ella, pero sus conceptos sólo se apoyan sobre el primer principio. De la libertad, que constituye su esencia, sólo una regla debe observarse: los conceptos deben ser no contradictorios entre sí y deben mantener relaciones determinadas con el resto de los conceptos existentes. El proceso de formación será siempre el mismo: partir de un objeto desprovisto de propiedades, objeto que no es sino un signo al que le son añadidos predicados que no deben contradecirse entre sí; mediante este proceso, "despierta el concepto que dormía dentro de nosotros". Es inútil buscar otra normatividad, las relaciones necesarias de los conceptos nuevos con los anteriores no dejan ningún lugar a lo arbitrario. De cualquier modo, las matemáticas disponen de los métodos correctivos necesarios: si un concepto es estéril o innecesario es abandonado rápidamente.

[27] Cantor, 1883b.

La conquista por parte de las matemáticas del infinito en acto, por medio de los números transfinitos, constituye para Cantor —como también lo será para Hilbert— el bien más preciado alcanzado por esta libertad.

3. *La teoría de los cardinales inaccesibles*

Una vez expuesto de manera breve el origen de la teoría de los números ordinales y cardinales transfinitos, intentaremos ver en qué medida el desarrollo de esta teoría permite corroborar el ideal cantoriano de que ésta es la teoría matemática que permite la determinación del infinito y que con ello prueba su existencia *en acto*.

La primera caracterización de un tipo especial de cardinales fue expresada por W. Sierpinski y A. Tarski (Sierpinski y Tarski, 1930) sobre la base de una idea original de K. Kuratowski, quien introdujo el término de cardinales *inaccesibles* para aquellos cardinales *alephs* $\aleph_\alpha$ *regulares* para los cuales el índice es un ordinal *límite*.

La idea de una clasificación de los números cardinales o *alephs* puede remitirse a F. Hausdorff (1904) para quien un *aleph* $\aleph_\alpha$ puede ser esencialmente *regular* o *singular*, dependiendo de cómo sea este número cardinal en relación con el conjunto de todos los que son menores que él. Un cardinal $\aleph_\alpha$ es *singular* si puede ser alcanzado como el límite de una suma de cardinales menores que él, pero tal que esta suma involucre a su vez una cantidad de sumandos menor que él. Como ejemplo de un cardinal *singular* podemos pensar en el cardinal $\aleph_\omega$, ya que este cardinal se puede obtener como $\aleph_\omega = \sum \aleph_n$ —donde $\{n\}$ recorre los ordinales de la primera clase—; cada cardinal de la sucesión es menor que $\aleph_\omega$ y hay $\aleph_0$ sumandos. Un cardinal $\aleph_\alpha$ será *regular* si la única posibilidad de ser alcanzado por una suma de cardinales menores que él es la de que la suma en cuestión conste de tantos sumandos como elementos en un conjunto de cardinalidad $\aleph_\alpha$. Como ejemplo de un cardinal *regular* podemos poner a $\aleph_1$, ya que, como fue probado por el propio Cantor, la unión numerable de conjuntos numerables siempre es numerable; es decir, una suma numerable de cardinales menores que $\aleph_1$ (que sólo podrían ser cardinales finitos o $\aleph_0$) será siempre igual a $\aleph_0$ y la única forma de obtener a $\aleph_1$ como la suma de estos cardinales es que se trate de una suma con exactamente $\aleph_1$ sumandos.[28]

Otra posible clasificación de un cardinal $\aleph_\alpha$ se obtiene a partir de las características del ordinal índice α; se trata de un cardinal sucesor o límite según que el ordinal índice sea sucesor o límite.[29] El propio Hausdorff encontró que todo cardinal sucesor es regular (y por ende todo cardinal singular es límite)[30] y planteó el problema acerca de la existencia de un cardinal que fuese regular y límite. Éstos fueron los que Kuratowski llamó *inaccesibles*. Sierpinski y Tarski propondrán una caracterización de estos cardinales, la cual es más general que la definición de Hausdorff-Kuratowski. Esta última puede considerarse equivalente a la definición de Sierpinski-Tarski sólo aceptando la hipótesis generalizada del continuo y el axioma de elección.

Para Sierpinski-Tarski un cardinal transfinito κ es *inaccesible* si dada una sucesión de cardinales $\{\lambda_\nu\}$, de longitud

[28] Llamamos *cofinalidad* de un cardinal κ, $cf(\kappa)$, al mínimo cardinal con cuya longitud es posible alcanzar el cardinal κ como límite de una sucesión o de una suma infinita de cardinales menores que él; de manera equivalente diremos que $cf(\kappa)$ es el mínimo cardinal λ tal que κ se puede descomponer en la unión de λ conjuntos, cada uno con cardinalidad menor que κ. De acuerdo con ello diremos que κ es *singular* si $cf(\kappa) < \kappa$, y es *regular* si $cf(\kappa) = \kappa$.

[29] De acuerdo con esta definición, y visto que 0 no es sucesor de ningún número natural, se considera a $\aleph_0$ como un cardinal límite.

[30] Lo cual excluye la existencia de un cardinal singular y sucesor.

μ, y tal que $0 < |\mu| < \kappa$[31] y que cumple $\lambda_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \mu$, se tiene que $\prod_{\nu<\mu} \lambda_\nu < \kappa$. Con esta definición el primer ejemplo de un cardinal inaccesible es $\aleph_0$.

La equivalencia con la definición original se apoya en los dos resultados siguientes:

I. Un cardinal κ es *inaccesible* si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones: (i) las fórmulas $|\mu| < \kappa$ y $\lambda_\nu < \kappa$ para todo $\nu < \mu$ implican que $\sum_{\nu<\mu} \lambda_\nu < \kappa$; (ii) las desigualdades $\mu < \kappa$ y $\rho < \kappa$ implican $\mu^\rho < \kappa$.

II. (i) Un cardinal inaccesible κ resulta entonces un aleph regular límite (resultado válido sólo a condición de aceptar el axioma de elección). (ii) Bajo la hipótesis generalizada del continuo un aleph $\aleph_\alpha$ regular y límite es inaccesible.

La equivalencia se sigue rápidamente como consecuencia de que para un cardinal $\kappa \neq 2$ la condición $\mu < \kappa$, $\rho < \kappa$ implica $\mu^\rho < \kappa$ es equivalente a que si $\mu < \kappa$ entonces $2^\mu < \kappa$. De acuerdo con esta última equivalencia, vemos que un cardinal inaccesible es, pues, un *aleph* regular, límite y que cumple la condición de que dado un cardinal λ menor que él, entonces 2^λ es también menor que él.[32] En la bibliografía contemporánea[33] a los cardinales que cumplen sólo la condición de Hausdorff-Kuratowski se los llama cardinales inaccesibles, mientras que a aquellos que cumplen la propiedad de Sierpinski-Tarski se los llama cardinales fuertemente inaccesibles. Bajo la hipótesis generalizada del

[31] Al ser μ un número ordinal, el símbolo $|\mu|$ denota la cardinalidad del conjunto de todos los ordinales menores que μ.

[32] Si aceptamos, con el axioma de elección, que no hay más cardinales infinitos que los *alephs*. Queda claro a partir de nuestro enfoque que cada vez que hablamos de un *cardinal* hablamos del *número cardinal* de un conjunto, de ahí que, de acuerdo con el axioma de elección, el cardinal de un conjunto es un *aleph*.

[33] *Cfr.* a modo de ejemplo el libro de T. Jech (1978).

continuo todo cardinal inaccesible es de hecho fuertemente inaccesible.[34]

Ahora bien, la pregunta original de Hausdorff acerca de la existencia de un cardinal que fuese a la vez regular y límite obedecía al hecho de que no se conocía ningún ejemplo de un aleph que cumpliera ambas condiciones. De las propiedades que deberían cumplir esos alephs, era conocido el siguiente hecho: $\aleph_\alpha$ al ser límite debe de cumplir que $\aleph_\alpha = \sum \aleph_{\alpha_\nu}$, cuando $\alpha_\nu \to \alpha$ y $\aleph_{\alpha_\nu} < \aleph_\alpha$. Pero al mismo tiempo la condición de que sea regular exige que $|\alpha| = \aleph_\alpha$. Pero al identificar el aleph $\aleph_\alpha$ con el ordinal inicial ω_α se obtiene que $\alpha \leq \omega_\alpha = \aleph_\alpha$, de donde se puede concluir que $\alpha = \omega_\alpha = \aleph_\alpha$, debido a que $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ es un ordinal inicial y como tal no puede tener la misma cardinalidad que ningún ordinal menor que él. Puesto que $\aleph_\alpha$ se obtiene como límite de una sucesión de longitud α, diremos que esta igualdad se puede establecer también del siguiente modo: $\alpha = \aleph_\alpha = cf(\alpha)$, la cual caracteriza los cardinales inaccesibles (en sentido débil).[35] Un cardinal fuertemente inaccesible quedará caracterizado por la igual-

[34] Dado que la hipótesis generalizada del continuo implica como consecuencia el axioma de elección como ya fue probado por Sierpinski (Sierpinski, 1947).

[35] Se debe observar que la condición $\alpha = \aleph_\alpha$ no caracterizaría de manera unívoca los cardinales regulares límites ya que es posible encontrar cardinales singulares (y por ende límites) que satisfacen dicha ecuación. Un cardinal con estas características se podría encontrar si se define recursivamente la siguiente sucesión:

$$\alpha_0 = \omega,\ \alpha_1 = \omega_{\alpha_0}, \ldots,\ \alpha_{n+1} = \omega_{\alpha_n}$$

se puede ver que

$$\alpha = \lim \alpha_n = \lim \omega_{\alpha_n} = \lim \aleph_{\alpha_n} = \aleph_\alpha.$$

Claramente éste no es un cardinal regular ya que $\aleph_\alpha > \omega = cf(\alpha) = cf(\aleph_\alpha)$.

dad $\alpha = \aleph_\alpha = cf(\alpha) = \pi(\alpha)$, donde $\pi(\alpha)$ se define como el ordinal que indica al aleph que satisface $\aleph_{\pi(\alpha)} = \Im_\alpha$.[36]

Pero las primeras dudas acerca de la posible existencia de un cardinal regular y límite no se desprenden tan sólo de la dificultad para encontrar algún ejemplo conocido. Si se observan con cuidado los procedimientos de construcción y definición para un conjunto en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel, podemos constatar que las operaciones conjuntistas de unión, de separación, de sustitución, o aun de elección, no permiten definir un conjunto cuya potencia sea un aleph regular y límite a partir de conjuntos cuya cardinalidad sea menor. Dicho en otras palabras, si se parte de un conjunto (o de una familia arbitraria de conjuntos) con cierta cardinalidad, las operaciones conjuntistas mencionadas no permiten encontrar ningún conjunto cuya cardinalidad sea mayor que las de los conjuntos dados y que sea regular y límite. En caso contrario, si suponemos dado un cardinal regular y límite, el conjunto cuya cardinalidad esté dada por él sería un conjunto que no se hubiera podido obtener, utilizando las operaciones conjuntistas, a partir de conjuntos cuya cardinalidad sea menor. La única posibilidad, y ello se debe a nuestra imposibilidad de caracterizarlo en lo que a su cardinalidad se refiere, puede surgir a partir de la operación conjuntista de "potencia" u operación del conjunto de todos los subconjuntos. Es el caso para un conjunto de cardinalidad $\aleph_\alpha$ y su conjunto "potencia"

[36] Los números $\Im_\alpha$ se definen por recursión de la siguiente manera:

$\Im_0 = \aleph_0$

$\Im_{\alpha+1} = 2^{\Im_\alpha}$

$\Im_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Im_\beta$ si α es un ordinal límite.

La afirmación $\Im_\alpha = \aleph_\alpha$ para todo ordinal α es equivalente a la hipótesis generalizada del continuo.

cuya cardinalidad es $2^{\aleph_\alpha}$; no es posible saber si se trata de un cardinal regular o singular, sucesor o límite.[37] Pero ahora la limitación para obtener un cardinal *inaccesible* en el sentido de Sierpinski-Tarski (*fuertemente inaccesible* en la notación actual) es la dada por la condición de que para un cardinal inaccesible κ, si $\lambda < \kappa$ es otro cardinal, entonces $2^\lambda < \kappa$. Es decir, aun la operación "potencia" nos impide alcanzar un cardinal inaccesible. Para un análisis completo de la verdadera relación que se puede presentar entre un cardinal inaccesible y los cardinales menores que él debemos explorar una nueva caracterización de los cardinales inaccesibles.

K. Kuratowski y A. Mostowski aseguran (Kuratowski y Mostowski, 1976) que un cardinal $\aleph_\alpha$ es fuertemente inaccesible si, y sólo si, existe una familia de conjuntos V que satisface las siguientes condiciones:

(i) Si un conjunto $X \in V$, entonces $X \subset V$.

(ii) Si $X \in V$ y Z es el conjunto de todos los $Y \subset X$, y no contiene ningún otro elemento ($Z = P(X) = 2^X$), entonces $Z \in V$.

(iii) Si $X \subset V$, y $|X| < |V|$, entonces $X \in V$.

(iv) $|V| = \aleph_\alpha$.

El teorema se prueba, por una parte, al definir $V = R_{\omega_\alpha}$, donde la familia de conjuntos R_α se define recursivamente como sigue:

$R_0 = \emptyset$

$R_{\alpha+1} = P(R_\alpha)$

[37] Al momento de analizar las condiciones que debería cumplir el número cardinal transfinito (el *aleph*) que diera la potencia del continuo, Gödel constata que es imposible, salvo resultados extraídos de algunas hipótesis particulares, saber si $2^{\aleph_0}$, la potencia del continuo, es un cardinal regular o singular, sucesor o límite.

$R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ en caso de que α sea un ordinal límite.

Si se toma la familia de conjuntos $V = R_{\omega_\alpha}$ vemos que la condición (i), condición de transitividad de la familia, es válida para cualquier ordinal, es decir, para cualquier α, R_α es transitiva.

La condición (ii) se satisface debido a que el índice ω_α que usamos es un ordinal inicial —un cardinal— que es límite y regular; es decir, que si un conjunto $X \in V$ entonces $X \in R_\beta$ con $\beta < \omega_\alpha$; $P(X) \in R_{\beta+1}$ por lo cual $P(X) \in V$.

La condición (iii) se sigue del hecho que el índice $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$ es regular, luego si $X \subset V = R_{\omega_\alpha} = \bigcup_{\beta<\omega_\alpha} R_\beta$, como se supone que $|X| < |V|$, existe un elemento $\eta < \omega_\alpha$ tal que $X \subset \bigcup_{\beta<\eta} R_\beta$ y $X \in R_{\eta+1} \subset V$.

Finalmente la condición (iv) se sigue trivialmente de $|V| = |R_{\omega_\alpha}| = \Im_{\omega_\alpha} = \Im_\alpha = \aleph_{\pi(\alpha)} = \aleph_\alpha$.

Ahora bien, si existe una familia de conjuntos R que satisface las condiciones (i)–(iv), para hacer ver que $\aleph_\alpha$ es regular y límite podemos tomar la familia $U = \{X \mid X \subset R \text{ y } |X| < |R|\}$. Es claro que si $X \in U$, la propiedad (iii) nos asegura que $X \in R$, de donde $U \subset R$.

Se puede utilizar un resultado de Sierpinski (1928) que asegura que la familia U definida así satisface:

$|U| = \sum_{\rho<\aleph_\alpha} \aleph_\alpha^\rho$.

De esto se deduce que $\aleph_\alpha \leq \sum_{\rho<\aleph_\alpha} \aleph_\alpha^\rho \leq \aleph_\alpha$ y que $\aleph_\alpha^\rho = \aleph_\alpha$ si $\rho < \aleph_\alpha$.

Si ahora se toma un conjunto Y tal que $|Y| = \eta < \aleph_\alpha$, y para cada $y \in Y$ se considera un cardinal $\eta_y < \aleph_\alpha$ y un cardinal $\lambda_y = \aleph_\alpha$, por el teorema de König se puede asegurar que $\sum_{y\in Y} \eta_y < \prod_{y\in Y} \lambda_y = \aleph_\alpha^\rho = \aleph_\alpha$ lo cual demuestra que $\aleph_\alpha$ es un cardinal regular.[38]

[38] El teorema de König asegura que si se tienen dos familias de

Si ahora se toman un cardinal $\eta < \aleph_\alpha$ y $N \subset R$ un subconjunto tal que $|N| = \eta$; la propiedad (iii) permite asegurar que $N \in R$ y la propiedad (ii) que tanto $P(N)$ como $P(P(N))$ son elementos de R. La propiedad (i) nos permite asegurar que ambos son al mismo tiempo subconjuntos de R. De ello se deduce que $\eta < 2^\eta < 2^{2^\eta} \leq \aleph_\alpha$ con lo cual $2^\eta < \aleph_\alpha$. Ello demuestra al mismo tiempo que $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite y que es además fuertemente inaccesible.

Pero podemos además encontrar una caracterización más precisa del conjunto R. Si tomamos de nuevo el conjunto $U = \{X \mid X \subset R \text{ y } |X| < |R|\}$ ya habíamos señalado que de la propiedad (iii) podíamos concluir que $U \subset R$. Si ahora tomamos un elemento $X \in R$, la propiedad (i) nos dice que $X \subset R$. Como $P(X)$ es también un subconjunto de R, es claro que $|X| < |R|$. De ello podemos concluir que $R \subset U$ y por ende $U = R$. Es decir, R es el conjunto de todos sus subconjuntos de cardinalidad menor que el cardinal inaccesible $\aleph_\alpha$. Una conclusión que se revelará como algo fundamental en breve nos permite asegurar que si nos referimos a un conjunto X que sea elemento de R, entonces su cardinalidad es menor que $\aleph_\alpha$.

El teorema anterior nos permite identificar sin ningún problema el conjunto R que satisface las condiciones (i)–(iv) con el conjunto $V = R_{\omega_\alpha}$.

La consecuencia más importante que podemos extraer de los resultados anteriores es que si se toma la terna $\mathfrak{R} = (R, R, E_R)$, donde E_R es la relación binaria definida en $R \times R$ como $X \in Y$ para un elemento (X, Y) de $R \times R$, y $R = R_{\omega_\alpha}$, se obtiene que $\mathfrak{R}$ es un modelo para todos los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Es decir, se puede considerar que R es el “universo” de los conjuntos, con lo

cardinales $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ y $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ y si $\kappa_i < \lambda_i$ para todo $i \in I$, entonces $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.

cual las fórmulas atómicas "X es un conjunto" y "$X \in Y$" se pueden sustituir por "$X \in R$" y por $(X, Y) \in E_R$,[39] y con ello podemos asegurar que todos los axiomas de Zermelo-Fraenkel resultarán *verdaderos* en R.

1. El axioma de extensionalidad se satisface de hecho en cualquier conjunto transitivo; es decir, si para dos conjuntos X, Y de R, se obtiene simultáneamente $(x, X) \in E_R$ y $(x, Y) \in E_R$, o $(x, X) \notin E_R$ y $(x, Y) \notin E_R$, para $x \in R$ entonces $X = Y$.

2. El axioma del conjunto vacío se satisface debido a que de la condición (iii) se concluye que $\emptyset \in R$.

3. El axioma de la unión se cumple debido a que si $X \in R$, el conjunto $\bigcup X$ (que se define como $\{x \in b$, tales que $b \in X\}$) es tal que cada $x \in \bigcup X$ también está en R; luego $\bigcup X \subset R$ y como la cardinalidad de $\bigcup X$ es menor que $\aleph_\alpha$ la propiedad (iii) nos asegura que es un elemento de R.

4. El axioma del conjunto potencia se cumple debido a la propiedad (ii).

5. El axioma del subconjunto (axioma de separación) es válido debido a la propiedad de transitividad (i) y a la propiedad (iii).

6. El axioma del infinito se satisface debido a que en R existe un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$ como consecuencia de (iv) y (iii).

7. El axioma de elección es válido en R debido a que si $X \in R$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y C es un conjunto de elección (C se obtiene tomando un elemento de cada uno de los conjuntos de X), se obtiene que C es un subconjunto de R de la misma cardinalidad

[39] Es decir, los conjuntos que están en R pueden ser tomados como los "objetos" de los cuales parte Zermelo en su axiomatización y la relación primitiva de pertenencia como la relación binaria E_R. *Cfr.* Zermelo, 1908.

que X (que es menor que $\aleph_\alpha$), de donde, por la propiedad (iii), $C \in R$.

8. La propiedad de que $\aleph_\alpha$ sea un cardinal fuertemente inaccesible permite probar la validez del axioma-esquema de reemplazo. En efecto, si $X \in R$ y $\Phi(x, y)$ es una fórmula tal que para cualquier $x \in X$ y para cualesquiera y_1, y_2 en R la igualdad $y_1 = y_2$ se obtiene, si es que se cumplen simultáneamente $\Phi(x, y_1)$ y $\Phi(x, y_2)$ en R. Si se toma $B = \operatorname{ran} \Phi$, entonces para cualquier elemento $y \in R$ se puede decir que $y \in B$ si y sólo si $(\exists x \in X)(\Phi(x, y)$ se satisface en R); se debe probar que $B \in R$. Como es fácil ver, $|B| < \aleph_\alpha$, por lo que la propiedad (iii) permite concluir que $B \in R$.

Es importante señalar que la validez de algunos de estos axiomas depende sólo de la transitividad del conjunto; pero para otros se utiliza el hecho de que el cardinal del conjunto es precisamente un cardinal fuertemente inaccesible. Ahora bien, para obtener un modelo en el que se satisfacen todos los axiomas de la teoría de los conjuntos basta que su cardinalidad sea igual al primer cardinal inaccesible. Así, si se considera que $\aleph_\alpha$ es el primer cardinal inaccesible mayor que $\aleph_0$, $R = R_{\omega_\alpha}$ es un modelo de la teoría de conjuntos. Pero sabemos, a partir del *teorema de completitud de la lógica* de Gödel, que una teoría es consistente si es que tiene un modelo y también sabemos, por el *segundo teorema* de Gödel, que una teoría no puede probar su propia consistencia. De estos dos hechos se desprende que la teoría de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel (expresada por medio de los axiomas conocidos y cuya validez probamos en el modelo R) es incapaz de mostrar la existencia del primer cardinal inaccesible mayor que $\aleph_0$, ya que de otro modo estaría en condiciones de probar su propia consistencia, hecho contrario a lo que sostiene el teorema de Gödel. Estas afirmaciones representan la confirmación del hecho que ya habíamos señalado: si consideramos un conjunto X en el modelo R, este conjunto debe tener una cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$; es decir, en nuestro "universo" *no hay conjuntos con cardinalidad igual al primer cardinal inaccesible* $\aleph_\alpha$.

De alguna manera esta situación ya se presentaba con $\aleph_0$ considerado como el primer cardinal inaccesible (es decir, inaccesible respecto a todas las operaciones conjuntistas llevadas a cabo sobre conjuntos finitos): el resto de los axiomas de Zermelo-Fraenkel forma un grupo de axiomas suficiente para una teoría de conjuntos finitos —cuyo modelo canónico puede ser R_ω. Como sabemos, sólo mediante el axioma del infinito es posible asegurar la existencia de un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$. Ésta es también la única vía para el primer cardinal inaccesible mayor que $\aleph_0$.

Este hecho fue bien caracterizado por Tarski (1938) y creemos, como lo haremos ver más adelante, que tuvo una gran influencia en la prueba de la consistencia de la hipótesis generalizada del continuo dada por Gödel (1938). Tarski considera el siguiente conjunto de axiomas como el que caracteriza los *conjuntos inaccesibles* (conjuntos cuya cardinalidad corresponde a un cardinal inaccesible): para un conjunto N de cardinalidad ν existe un conjunto M con las siguientes propiedades:

1. $N \subset M$.

2. Si $X \in M$ y $Y \in X$ entonces $Y \in M$.

3. Si $X \in M$ y Z es el conjunto de todos los $Y \subset X$, y no contiene ningún otro elemento ($Z = P(X) = 2^X$), entonces $Z \in M$.

4. Si $X \subset M$ y X y M no tienen la misma cardinalidad, entonces $X \in M$.

Este conjunto de axiomas caracteriza el primer cardinal inaccesible κ mayor que ν, donde ν es un cardinal arbitrario (de hecho nos dice que existe un conjunto M cuyo cardinal es κ y que contiene el conjunto N como elemento). Esta presentación axiomática tiene dos propósitos: mostrar qué condiciones cumple el primer cardinal inaccesible mayor que un cardinal cualquiera ν —que bien podría ser considerado como $\aleph_0$ para hablar del primer cardinal inaccesible—,[40] y asegurar, de algún modo, que la existencia de un cardinal inaccesible sólo podrá darse por medio de un axioma y sólo será aceptada a condición de que dicho axioma no sea contradictorio con el resto.

4. *Cardinales inaccesibles e infinito en potencia*

La condición aquí descrita establece que el lugar que ocupa el primer cardinal inaccesible, en relación con los cardinales menores que él, es el mismo que ocupa $\aleph_0$ (que identificamos con ω) en relación con los cardinales finitos; en otras palabras, esta relación refleja la relación del infinito con lo finito. Según la modalidad cantoriana de definir el primer número transfinito ω, parece esfumarse por completo todo el enigma asociado al infinito y, claramente, según esta modalidad no resulta claro el porqué habría de presentar alguna dificultad la existencia de un cardinal —que es un ordinal *inicial* como ya lo establecimos— fuertemente inaccesible. Así como ω es definido por Cantor como el límite de la sucesión ascendente de *todos* los números enteros finitos, sucesión cuya cofinalidad es precisamente ω,[41] podría definirse sin más el primer cardinal inaccesible $\aleph_\alpha$ (que es *regular* y *límite*) como el límite de la sucesión $\{\aleph_{\beta_\nu}\}$, de *cofinalidad* α, de cardinales menores que $\aleph_\alpha$. Pero esta definición requeriría, como lo era ya para Cantor, de alguna manera de la existencia del número que se va a definir. En el marco de la teoría cantoriana de los conjuntos este problema simplemente no podía aparecer

[40] Si $\nu = 0$, $\kappa = \aleph_0$, y si $\nu = \aleph_0$, $\kappa = \aleph_\alpha$, que es el primer cardinal inaccesible $> \aleph_0$.

[41] Con ello $\aleph_0$ es *regular*.

como tal, pero en el marco de la teoría axiomática el argumento circular debe ser roto de alguna manera; y ésta no puede ser otra que la postulación axiomática del cardinal $\aleph_0$. El problema que presenta cualquier cardinal regular es precisamente que para ser definido como el límite, o la suma, de una colección de cardinales menores que él, dicha suma debe constar del mismo número de términos que el cardinal por definirse. Cuando esta condición se presenta para los cardinales sucesores la teoría axiomática puede salir bien librada,[42] pero en el momento en que el cardinal regular es al mismo tiempo un cardinal límite, el problema parece irresoluble. La "ausencia" de un ejemplo visible de un número que tuviera las dos condiciones, ya detectada por Hausdorff, refleja una especie de limitante estructural.

Ello nos lleva a preguntar hasta qué punto este hecho permite restituir la propiedad central de la teoría aristotélica sobre el infinito: su existencia únicamente en potencia. De la caracterización aristotélica del infinito debemos extraer una doble lección. Por un lado, el infinito es un accidente, no es una sustancia, y como tal se dice que es respecto a una multiplicidad. Sólo de una multiplicidad se puede decir que es infinita; infinita por adición si es que el proceso de enumerar sus elementos *es infinito*; infinita por división si es que el proceso de descomposición en sus partes es igualmente infinito. Ahora bien, cualquier intento de precisar o detallar esta existencia será para Aristóteles fuente de paradojas. En el origen de las paradojas de Zenón se encuentra la afirmación de que Aquiles tendría que recorrer efectivamente la infinidad de "puntos" o de estadios intermedios que lo separan de la tortuga. En realidad, Aristóteles considera que Aquiles no recorre una infinidad de estadios intermedios, sino que de su recorrido siempre será posible establecer un proceso de subdivisión que marque

[42] El recurso usual es utilizar el teorema de Hartog.

un número mayor de estadios a recorrer. Exactamente lo mismo sucede con el intervalo de tiempo que requiere para recorrer esa distancia, no es un intervalo infinito de tiempo, ni tampoco un intervalo constituido —en acto— por una infinidad de *instantes*; se trata de un intervalo de tiempo para el cual no importa cuán grande sea la división considerada, siempre será posible dividirlo en un número mayor de subintervalos de tiempo. Que el proceso de subdivisión pueda proseguirse indefinidamente —*ad infinitum*— no significa para Aristóteles que el intervalo —de distancia o de tiempo— esté efectivamente constituido por una infinidad de elementos ya indivisibles, *puntos o instantes*, en los cuales el proceso —infinito— hubiera terminado.

Una colección es infinita en potencia si dada cualquier cantidad considerada, siempre será posible encontrar otros elementos de la misma no considerados. La infinitud por adición significará que la multiplicidad será inagotable a partir del proceso de contar uno a uno sus elementos; ello significa que de una multiplicidad de objetos que sea infinita, no podría jamás concluirse, mediante un sistema de conteo, que es actualmente infinita; el sistema de conteo sólo podrá mostrarnos que es potencialmente infinita. Dicho en otras palabras, si el sistema de numeración, el único sistema de conteo del que se dispone, no permite completar o agotar todos los elementos de la multiplicidad, entonces dicha totalidad será infinita —en potencia. A partir de lo anterior podemos asegurar que Aristóteles no estableció una teoría que pretendiera eliminar el infinito de las matemáticas. Lejos de ello, nos parece que la teoría aristotélica afirmaría que es la matemática el lugar privilegiado en el cual es posible comprender la naturaleza del infinito. Ahora bien, para ello es claro que Aristóteles no niega la existencia del infinito sino que establece una modalidad, la única posible, para su existencia; modalidad que, por cierto, sólo es inteligible mediante las matemáticas.

Sólo en el interior de la teoría axiomática de los conjuntos deviene inteligible la prueba presentada en la sección anterior, prueba de la inexistencia de un conjunto cuya cardinalidad sea la del primer cardinal fuertemente inaccesible *en* el modelo R, prueba que muestra también la imposibilidad de que exista —en acto— un cardinal fuertemente inaccesible en R. De todas las caracterizaciones del infinito propuestas antes de Dedekind y Cantor, incluyendo la caracterización dada por Bolzano, sobresale aquella que dice que una colección es infinita si cualquier subcolección finita es una subcolección *propia*. La propiedad del modelo R de estar constituido por conjuntos cuya cardinalidad es necesariamente menor que el primer cardinal fuertemente inaccesible muestra hasta qué punto las vías para dar cuenta de la propiedad de infinitud en potencia pueden reactualizarse.

Sin embargo, encontramos en la teoría axiomática de los conjuntos cierta relación de dependencia de lo finito respecto a lo infinito ya anunciada por Dedekind cuando definía un conjunto finito como aquel que no cumple la condición de ser infinito. Ahora encontramos que la relación de lo infinito con lo finito, de lo inaccesible con lo transfinito, muestra claramente aquello que Aristóteles trataba de esclarecer: su existencia *necesaria*. La prueba de la consistencia de una teoría de conjuntos finitos requiere necesariamente del primer número infinito, cuya existencia es indemostrable en el interior de la propia teoría. La misma situación se reproduce con el primer cardinal fuertemente inaccesible: él marca el nivel mínimo en la "jerarquía acumulativa de conjuntos" para obtener un modelo de la teoría de los conjuntos. La consistencia de dicha teoría se prueba sólo suponiendo la existencia de ese cardinal fuertemente inaccesible cuya existencia es entonces indemostrable en esa teoría.

Como un efecto recurrente, parece presentarse de nuevo el paradigma de Dedekind que marcó la definición de lo finito a partir de lo infinito: ahora las determinaciones esenciales para una teoría son establecidas a partir del primer número que para esa teoría resulta inalcanzable. Pero el que se trate de números cuya existencia no es demostrable en el interior de una teoría nos muestra que, ante la pretensión cantoriana de que los números transfinitos nos daban una prueba de la existencia *en acto* del infinito, los números inaccesibles no existen *en acto*. El viejo dilema aristotélico parece renacer: sólo existen *en potencia*; y es esta existencia *en potencia* la que permite que en función de ellos se estructure —como un *telos* a partir del cual adquiere su sentido— la teoría de los conjuntos.

Si del infinito en potencia aristotélico a la potencia cantoriana del infinito la filosofía trazó buena parte de su historia, las perspectivas abiertas por lo inaccesible están aún por definirse.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, C., 1993, "Sur l'origine de l'hypothèse du continu", *Science et techniques en perspective*, no. 26, pp. 250–273.

Bolzano, B., 1851, *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig. [Edición en español: *Las paradojas del infinito*, Colección Mathema, México, 1991.]

Cantor, G., 1870a, "Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz", *Crelles Journal F. Mathematik*, no. 72, pp. 130–138.

——, 1870b, "Beweis daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihen gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt", *Crelles Journal F. Mathematik*, no. 72, pp. 139–142.

——, 1871a, "Notiz zu dem Aufsätze: Beweis daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihen gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt", *Crelles Journal F. Mathematik*, no. 73, pp. 294–296.

——, 1871b, "Über trigonometrische Reihen", *Mathematische Annalen*, no. 4, pp. 139–143.

——, 1872, "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, no. 5, pp. 123–132.

——, 1874, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", *Crelles Journal F. Mathematik*, no. 77, pp. 258–262.

——, 1878, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Crelles Journal F. Mathematik*, no. 84, pp. 242–258.

——, 1879, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 1", *Mathematische Annalen*, no. 15, pp. 1–7.

——, 1880, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 2", *Mathematische Annalen*, no. 17, pp. 355–358.

——, 1882, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 3", *Mathematische Annalen*, no. 20, pp. 113–121.

——, 1883a, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 4", *Mathematische Annalen*, no. 21, pp. 51–58.

——, 1883b, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 5", *Mathematische Annalen*, no. 21, pp. 545–586.

——, 1883c, "Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *n* dimensions", *Acta Mathematica*, no. 2, pp. 409–414.

——, 1884a, "Über unendliche lineare Punktmännigfaltigkeiten 6", *Mathematische Annalen*, no. 23, pp. 453–488.

——, 1884b, "De la puissance des ensembles parfaits de points", *Acta Mathematica*, no. 4, pp. 381–392.

——, 1885b, "Principien einer Theorie der Ordnungstypen", en I. Grattan-Guiness (comp.), *Acta Mathematica*, no. 124, pp. 65–107.

Cavaillès, Jean, 1962, *Philosophie mathématique*, Hermann, París.

Dauben, J., 1971, "The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets", *Arch. Hist. Exact Sci.*, no. 7, pp. 181–216.

——, 1974, "Denumerability and Dimension: The Origins of Georg Cantor's Theory of Sets", *Rete*, no. 2, pp. 105–134.

——, 1975, "The Invariance of Dimension: Problems in the Early Development of Set Theory and Topology", *Historia Mathematica*, no. 2, pp. 273–288.
——, 1979, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), reimp. Princeton University Press, Princeton, 1990.
Dieudonné, J. (comp.), 1978, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, Hermann, París.
Gödel, K., 1938, "Prueba de consistencia de la hipótesis generalizada del continuo", en *Obras completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1989 (Alianza Universidad).
——, 1947, "What is Cantor's Continuum Problem", en P. Benacerraf y H. Putnam (comps.), *Philosophy of Mathematics*.
Grattan-Guiness, I., 1970, "An Unpublished Paper by Georg Cantor", *Acta Mathematica*, no. 124, pp. 65–107.
——, 1971, "Towards a Biography of Georg Cantor", *Annals of Science*, no. 27, pp. 345–391.
——(comp.), 1980, *From Calculus to Set Theory. An Introductory History*, Ducknorth, Londres.
Hallet, M., 1984, *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford.
Hausdorff, F., 1904, "Der Potenzbegriff in der Mengenlehre", *Jaresber Deutsch. Math. Verein*, no. 13, pp. 569–571.
Hawkins, T., 1975, *Lebesgue's Theory of Integration*, Chelsea Publishing Company.
Jech, T., 1978, *Set Theory*, Academy Press, Nueva York.
Kuratowski, K. y A. Mostowski, 1976, *Set Theory*, North Holland Publishing Company.
Meschowski, H., 1967, *Probleme des Unendlichen. Werk und Lebens Georg Cantors*, 2a. ed., Braunschweig, Vieweg, 1983.
Riemann, B., 1854a, "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", Habilitationsschrift, *Abh. Gesell. Wiss. Göttingen*, no. 13.
——, 1854b, "Über die Hypothese, welche der Geometrie zu Grunde liegen", *Abh. Gesell. Wiss. Göttingen*, no. 13.
Schönflies, A.M., "Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen", *Acta Mathematica*, no. 50, pp. 1–23.
Sierpinski, W., 1928, "Sur une décomposition d'ensembles", *Mon. Math. and Phys.*, no. 35, pp. 239–242.

——, 1947, "L'hyphotèse généralisée du continu et l'axiom du choix", *Fundamenta Mathematicœ*, no. 34, pp. 1–5.
—— y A. Tarski, 1930, "Sur une propiété caractéristique des nombres inaccesibles", *Fundamenta Mathematicœ*, no. 15, pp. 292–300.
Sinaceur, M., 1990, "Dedekind et le programme de Riemann", *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. XLIII, no. 2–3.
Tarski, A., 1938, "Über unerreichbare Kardinalzahlen", *Fundamenta Mathematicœ*, no. 30, pp. 68–89.
Zermelo, E., 1908, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Math. Ann.*, no. 65, pp. 261–281.

Recibido: 15 de diciembre de 1993

SUMMARY

In this paper I deal with two problems in mathematical philosophy: the (very old) question about the nature of infinity, and the possible answer to this question after Cantor's theory of transfinite numbers. Cantor was the first to consider that his transfinite numbers theory allows to speak, within mathematics, of an *actual* infinite and allows to leave behind the Aristotelian statement that infinity exists only as *potential infinity*. In the first part of this paper I discuss Cantorian theory of transfinite numbers and his particular point of view about this matter.

But the development of the theory of transfinite numbers, specially the theory of transfinite cardinal numbers, has reached with the *inaccessible cardinal numbers* a new dilemma which makes us think that Aristotelian characterization of the infinity as *potential* is again a possible answer. The second part gives a general view of this development and of the theory of the inaccessible cardinal numbers in order to make clear my point of view concerning Aristotelian potential infinity.