*CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía.* Vol. 40, No. 120 (diciembre 2008): 3–35

# PATRONES INFERENCIALES

AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA
Instituto de Investigaciones Filosóficas
Universidad Nacional Autónoma de México
abarcelo@filosoficas.unam.mx

RESUMEN: El objetivo de este artículo es proponer un método de traducción de tablas de verdad a reglas de inferencia, para la lógica proposicional, que sea tan directo como el tradicional método inverso (de reglas a tablas). Este método, además, permitirá resolver de manera elegante el viejo problema, formulado originalmente por Prior en 1960, de determinar qué reglas de inferencia definen un conectivo.

PALABRAS CLAVE: inferencialismo, Gentzen, Peregrin, Prior, lógica

SUMMARY: This article aims at setting forth a method to translate truth tables into inference rules, in propositional logic, which is as straightforward as the traditional inverse method (from rules to tables). Besides, this method allows for an elegant solution of Prior's (1960) problem of determining when a set of inferential rules succeeds or fails in defining a logical operator.

KEY WORDS: inferentialism, Gentzen, Peregrin, Prior, logic

## 1. *El inferencialismo y el significado de los conectivos lógicos*

En el debate actual sobre el significado de los conectivos lógicos,[1] se han alzado dos familias de teorías como contendientes principales.[2] Por un lado, las semánticas *representacionales* sostienen que el significado de los conectivos lógicos está determinado por su contribución a las condiciones de verdad de las proposiciones en las que ocurren.[3] Esta contribución se presenta comúnmente en términos de una función de verdad, expresada en una tabla de verdad. Por otro lado, las semánticas *inferencialistas* (también llamadas "funcionales" o "de rol conceptual" (Block 2000)) sostienen que el significado de

[1] El término "conectivo lógico" es ambiguo entre un tipo de símbolos constantes de los cálculos lógicos, como "&", "¬", etc., y sus significados (cualesquiera que éstos sean). Para los propósitos de este artículo, usaré el término para referirme exclusivamente a los símbolos mencionados, y no a sus significados.

[2] Tomo la nomenclatura de Brandom 2000, p. 45.

[3] Llamamos "representacionales" a estas teorías bajo el presupuesto común de que el contenido representacional de un enunciado está íntimamente ligado a sus condiciones de verdad (Crimmins 2000, pp. 649, 650). En sentido estricto, no todas las teorías representacionales se formulan en condiciones de verdad; algunas usan una noción más débil, como la de condiciones de afirmabilidad.

un conectivo lógico está determinado[4] por su contribución al rol inferencial de dichas proposiciones (Boghossian 1993). Esto significa que "el significado de las constantes lógicas está determinado por ciertas implicaciones características" (Harman 1986, p. 126). Estas implicaciones características corresponden a las reglas de eliminación e introducción de un sistema de deducción natural (Harman 1987, p. 137). Para los inferencialistas, por lo tanto, el significado de un conectivo lógico está íntimamente ligado al cálculo deductivo. Para los representacionalistas, en contraste, dicho significado está más conectado con su interpretación. Tradicionalmente se asume que la interpretación de un lenguaje formal "establece el vínculo entre fórmulas y lo que representan" (Peregrin 1994, p. 5). De ahí que, a veces, a la perspectiva representacional se la llame "semántica", y a la inferencialista, "sintáctica".

La perspectiva semántica se origina en el trabajo lógico de Pierce y se encuentra implícita en el trabajo de Russell, Ramsey y otros; sin embargo, no alcanzó su madurez sino hasta el trabajo de Tarski sobre la noción de verdad en los lenguajes formales.[5] La perspectiva sintáctica hunde sus raíces en el primer cálculo lógico, la *Conceptografía* de Frege, y pasajes de Wittgenstein como los siguientes:

> Las reglas de inferencia lógica no pueden estar equivocadas o correctas. Determinan el significado de los signos. (Wittgenstein 1956, p. 24)

> Podemos concebir las reglas de inferencia —quiero decir— como si le asignaran significado a los signos, porque son las reglas para el uso de dichos signos. (Wittgenstein 1956, p. 398)

Sin embargo, su piedra de toque es un multicitado pasaje de las "Investigations into Logical Deduction"[6] de Gerhard Gentzen, donde

[4] Mark Eli Kalderon (2001) distingue entre un inferencialismo fuerte, reduccionista, y un inferencialismo débil, superveniencialista. Según él, "el inferencialista [solamente] está comprometido con [la] tesis de superveniencia [según la cual] el contenido lógico superviene sobre el rol inferencial, no que el contenido lógico y el rol inferencial deban identificarse" (Kalderon 2001, p. 132). Todas las traducciones son mías, excepto cuando se indique lo contrario.

[5] Field (1972) ofrece una historia crítica de la interpretación representacional de la teoría de Tarski y su relación con el inferencialismo.

[6] Vale la pena notar que, aunque el de Gentzen no fue el primer sistema de deducción natural, sí fue el primero en introducir las nociones de regla de introducción y de eliminación, y en señalar su importancia para definir no solamente el significado de los conectivos lógicos, sino también su propio carácter lógico, es decir, lo que los distingue del resto del vocabulario (no lógico) (Pelletier 1999, pp. 1–31).

éste escribe, refiriéndose a las reglas de derivación de su cálculo: "Las reglas de introducción representan, digamos, las 'definiciones' de los símbolos correspondientes, y las de eliminación no son más, en el análisis último, que las consecuencias de dichas definiciones" (Gentzen 1964, p. 295, § 5.13).

Recientemente, ésta ha sido la perspectiva adoptada por lógicos y filósofos como Wilfrid Sellars, Gilbert Harman, Michael Dummett, Ned Block y Robert Brandom.

## 2. *¿Qué significa "&"?*

Para ver mejor la diferencia entre estas dos perspectivas, tomemos un conectivo simple como ejemplo: la conjunción. Desde una perspectiva representacional, el significado de esta constante lógica no es otro que la función de verdad dada en su tabla de verdad:

| $S_1$ | $S_2$ | $S_1$ & $S_2$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Tabla 1

Para el inferencialista, por otro lado, el significado de este mismo conectivo está dado en sus reglas de introducción y eliminación:[7]

Introducción de la conjunción: $S_1, S_2 \vdash S_1 \& S_2$

Eliminación de la conjunción: $S_1 \& S_2 \vdash S_1$; $S_1 \& S_2 \vdash S_2$

Por lo menos en el caso de los conectivos extensionales, ambos tratamientos son equivalentes y es fácil demostrarlo.[8] Basta definir la inferencia lógica (el concepto clave en las teorías inferencialistas) en términos de condiciones de verdad (el concepto clave en las teorías

[7] Véase Pelletier 1999, pp. 1–31, sobre el desarrollo histórico de este tipo de reglas.

[8] En palabras de Jaroslav Peregrin, que "los significados que comúnmente adscribimos a las expresiones [puedan] construirse como roles inferenciales *disfrazados*" o "*encapsulados*" (2003).

representacionales). Así, decir que una proposición implica otra equivale a decir que la primera no puede ser verdadera sin que la otra lo sea también; en otras palabras, para cualquier circunstancia de evaluación,[9] si la primera es verdadera, la segunda también lo es. Bajo esta equivalencia, se puede demostrar fácilmente que las reglas de introducción y eliminación de los conectivos extensionales contienen la misma información sobre el significado de los conectivos lógicos que las funciones de verdad. En el caso de la conjunción, por ejemplo, las reglas de introducción y eliminación dirían que, en cualquier circunstancia de evaluación:

> (Introducción) Si $S_1$ y $S_2$ son verdaderos, también lo es $S_1\&S_2$.
>
> (Eliminación) $S_1\&S_2$ es verdadero sólo si $S_1$ y $S_2$ son ambos verdaderos.

En conjunto, las reglas dicen que $S_1\&S_2$ es verdadero si y sólo si $S_1$ y $S_2$ son ambos verdaderos, que es exactamente lo mismo que dice la tabla de verdad de la conjunción. Llamo a éste el "argumento del colapso", ya que parece colapsar la distinción entre inferencialismo y representacionalismo. Este argumento desempeña un papel fundamental en los debates entre representacionalistas e inferencialistas, y ambos bandos lo suelen usar para "reducir" un tipo de semántica a la otra.

Por supuesto, no faltan detractores del argumento. Jaroslav Peregrin (2003), por ejemplo, ha mostrado que el argumento parece funcionar mejor en un sentido (en el que lo hemos presentado: de reglas de inferencia a tablas de verdad) que en el otro (de tablas de verdad a reglas de inferencia). Según él, aun si fuera realmente obvio cómo transformar reglas de inferencia en tablas de verdad, no hay ningún método obvio para ir en sentido inverso, de tablas de verdad a reglas de inferencia. En "Meaning and Inference" (2003), Peregrin propuso un abigarrado y poco intuitivo método para llevar a cabo dicha transformación. En este artículo presento mi propio método, el cual haría la traducción tan obvia y mecánica como el paso de reglas de inferencia a tablas de verdad; sin embargo, para lograrlo, necesito extender la noción de regla de inferencia (o patrón inferencial, para usar la terminología de Peregrin). Para ubicar mi

[9] Las teorías representacionales, por lo tanto, requieren una especificación del tipo relevante de circunstancias en las que se evalúan las condiciones de verdad de un enunciado.

propuesta, presentaré primero la propuesta original de Peregrin y mostraré sus limitaciones.

## 3. *Significado e inferencia*

En "Meaning and Inference", Jarsolav Peregrin señala que uno de los objetivos básicos que todo inferencialismo debiera alcanzar es proveer una teoría del significado para las expresiones lógicas tal que:

1. el significado de toda expresión lógica no dependa de lo que dicha expresión denote o represente, sino de su uso (p. 193);
2. los aspectos semánticamente relevantes del uso de toda expresión lógica queden completamente capturados en su papel inferencial;
3. dicho papel inferencial esté completamente determinado por algún patrón inferencial finito (pp. 193, 196) que contenga por lo menos tanta información semántica como la que ofrece una teoría representacional (p. 198);
4. el patrón inferencial de toda expresión lógica apele solamente a inferencias internas al lenguaje (en oposición a inferencias entre mundo y lenguaje) (p. 197, n. 6);
5. dicho patrón no apele al contenido de ningún otra expresión lógica (p. 199, n. 9).

Peregrin presume haber encontrado una estrategia para determinar el significado de los conectivos lógicos proposicionales estándar en concordancia con estos preceptos inferencialistas. Su estrategia se compone de cuatro métodos: tres para "traducir" la información semántica contenida en los renglones de las tablas de verdad a patrones inferenciales (p. 199), y un presupuesto "de exhaustividad" que nos permite asumir que, una vez que hemos aplicado los primeros tres métodos, el conjunto de reglas de introducción obtenido agota todas las posibilidades de introducción del operador (lo que Peregrin llama "minimalidad') y, de manera similar, el conjunto de reglas de eliminación agota todas las posibilidades de eliminación (lo que Peregrin llama "maximalidad") (p. 202).[10]

El primer método se aplica cuando, en el renglón de la tabla en que los argumentos son todos verdaderos, el valor también lo es.

[10] Sin exhaustividad es imposible recuperar siquiera las reglas de introducción y eliminación usuales de conectivos habituales como la disyunción y la negación.

También se aplica a todo conjunto de renglones en que la verdad de ciertos argumentos hace irrelevante el valor de verdad de los otros argumentos para dar el valor verdadero. Tomemos, por ejemplo, una tabla de verdad que contenga los siguientes dos renglones:

| $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| ... | ... | ... |

Tabla 2

Podemos decir que la verdad de $S_1$ hace irrelevante el valor de verdad de $S_2$ para dar el valor verdadero a la operación $O(S_1, S_2)$. Siguiendo la notación de Peregrin, marcamos un argumento con un "*" cuando su valor de verdad es irrelevante para el valor de la operación. De esta manera, las dos líneas de la tabla que acabamos de presentar se reducen a un solo renglón:

| $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | * | V |
| ... | ... | ... |

Tabla 3

Siguiendo la misma convención que Peregrin, presentaremos sus métodos en forma de tablas, donde $S_1$, $S_2$, $S_3, \ldots, S_n$ son enunciados del lenguaje, $O$ es el operador lógico de aridad $n$ cuyo significado se trata de determinar, y $S$ una fórmula cualquiera.

Primer método: Argumentos verdaderos o arbitrarios con valor verdadero

| $S_1$ | ... | $S_n$ | $O(S_1, \ldots, S_n)$ |
|---|---|---|---|
| V/* | ... | V/* | V |
| ... | ... | ... | ... |

$S_{i_1}, \ldots, S_{i_k} \vdash O(S_1, \ldots, S_n)$, donde $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ corresponden a las columnas V (en vez de *).

Tabla 4

El segundo método se aplica cuando hay renglones con valor falso, un solo argumento falso y los demás verdaderos o irrelevantes.

Segundo método: Un argumento falso y los demás verdaderos o arbitrarios con valor falso

| $S_1$ | ... | $S_j$ | ... | $S_n$ | $O(S_1,\ldots,S_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V/* | ... | F | ... | V/* | F |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

$S_{i_1},\ldots,S_{i_k},O(S_1,\ldots,S_n) \vdash S_j$, donde $S_{i_1},\ldots,S_{i_k}$ corresponden a las columnas V, y $S_j$ corresponde a la columna F.

Tabla 5

Finalmente, el tercer método se aplica cuando hay renglones con valor falso que, sin embargo, no contienen ningún argumento falso.

Tercer método: Argumentos verdaderos o arbitrarios con valor falso

| $S_1$ | ... | $S_n$ | $O(S_1,\ldots,S_n)$ |
|---|---|---|---|
| V/* | ... | V/* | F |
| ... | ... | ... | ... |

$S_{i_1},\ldots,S_{i_k},O(S_1,\ldots,S_n) \vdash S$, donde $S_{i_1},\ldots,S_{i_k}$ corresponden a las columnas V, y S es un enunciado cualquiera.

Tabla 6

Es fácil de ver que cada método produce un tipo de regla diferente. El primer método produce reglas de introducción estándar del tipo $S_{i_1}$, $S_{i_2},\ldots S_{i_k} \vdash O(S_1, S_2, S_3,\ldots, S_n)$. El segundo método produce reglas de eliminación estándar de la forma $S_{i_1}$, $S_{i_2}$,..., $S_{i_k}$, O($S_1$, $S_2$, $S_3,\ldots$, $S_n$) $\vdash S_j$. El método tres, a su vez, produce reglas de eliminación (de la misma forma $S_{i_1}$, $S_{i_2},\ldots$, $S_{i_k}$, $O(S_1$, $S_2$, $S_3,\ldots$, $S_n) \vdash S$) que apelan al principio "*ex falso quodlibet*".

Los tres métodos producen cinco patrones para las operaciones unarias, en vez de los ocho que se podría esperar si suponemos que a cada una de las cuatro funciones unarias le corresponden dos reglas (una de introducción y otra de eliminación). Asimismo, produce doce para las binarias, lo cual está lejos de cubrir todas las reglas necesarias para definir todas las funciones binarias.

A. Patrones para operadores unarios:

Método 1.

1. $S_1 \vdash O(S_1)$
2. $\vdash O(S_1)$

Método 2.

3. $O(S_1) \vdash S_1$

Método 3.

4. $S_1$, $O(S_1) \vdash S$

5. $O(S_1) \vdash S$

B. Patrones para operadores diádicos:

Método 1.

1. $S_1$, $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$

2. $S_1 \vdash O(S_1, S_2)$

3. $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$

4. $\vdash O(S_1, S_2)$

Método 2.

5. $S_1$, $O(S_1, S_2) \vdash S_2$

6. $S_2$, $O(S_1, S_2) \vdash S_1$

7. $O(S_1, S_2) \vdash S_1$

8. $O(S_1, S_2) \vdash S_2$

Método 3.

9. $S_1$, $S_2$, $O(S_1, S_2) \vdash S$

10. $S_1$, $O(S_1, S_2) \vdash S$

11. $S_2$, $O(S_1, S_2) \vdash S$

12. $O(S_1, S_2) \vdash S$

Las reglas estándar de introducción tipo 1 son:

| | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | V | V | V | $S_1, S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| $R_2$ | V | * | V | $S_1 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| $R_3$ | * | V | V | $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| $R_4$ | * | * | V | $\vdash O(S_1, S_2)$ |

Tabla 7

donde $R_1$ es la regla de introducción estándar para la conjunción, $R_2$ y $R_3$ las reglas usuales para la disyunción y $R_4$ una regla de introducción para el operador tautológico.

Las reglas estándar de eliminación tipo 2 son:

| | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $R_5$ | V | V | V | $S_1, O(S_1, S_2) \vdash S_2$ |
| $R_6$ | V | V | V | $S_2, O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| $R_7$ | * | V | V | $O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| $R_8$ | * | V | V | $O(S_1, S_2) \vdash S_2$ |

Tabla 8

donde $R_5$ es *modus ponens*, $R_6$ la regla equivalente para la implicación material inversa (también conocida como implicación material "hacia la izquierda"), y $R_7$ y $R_8$ las reglas usuales de eliminación para la conjunción.

Finalmente, las reglas de tipo 3 pueden verse como reglas de eliminación vía *ex falso quodlibet*:

| | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $R_9$ | V | V | F | $S_1, S_2, O(S_1, S_2) \vdash S$ |
| $R_{10}$ | V | * | F | $S_1, O(S_1, S_2) \vdash S$ |
| $R_{11}$ | * | V | F | $S_2, O(S_1, S_2) \vdash S$ |
| $R_{12}$ | * | * | F | $O(S_1, S_2) \vdash S$ |

Tabla 9

Aquí, $R_9$ sería la regla de eliminación para la función de verdad equivalente a $((\neg S_1)\&(\neg S_2))$, $R_{10}$ la regla de eliminación para $\neg S_1$, $R_{11}$ la regla de eliminación para $\neg S_2$, y $R_{12}$ la regla de eliminación para el operador contradictorio.

Las reglas que se obtienen por estos tres métodos distan de ser suficientes para definir siquiera las expresiones lógicas clásicas. Por ejemplo, si consideramos la negación clásica, los dos primeros métodos no pueden aplicarse y el tercero nos proporciona la regla $S_1$, $\neg S_1 \vdash S$. Es decir, obtenemos la regla de eliminación, pero no la de introducción. Si nos centramos en la disyunción, el primer método nos proporciona las reglas de introducción, pero los otros métodos no son aplicables ni obtenemos las reglas usuales de eliminación. Por eso Peregrin postuló su principio de exhaustividad, sin el cual no se podrían completar los patrones necesarios para traducir las tablas de verdad usuales de las expresiones lógicas clásicas —conjunción, disyunción, negación, equivalencia e implicación material— a sus patrones inferenciales usuales. Sin embargo, dicho método no se puede generalizar para traducir por completo cualquier tabla de verdad. Un ejemplo sencillo se obtiene al comparar las siguientes dos tablas:

| $S_1$ | $S_2$ | $O_1(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

Tabla 10

| $S_1$ | $S_2$ | $O_2(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Tabla 11

Es fácil ver que solamente el tercer método de Peregrin se aplica a cualquiera de estas dos tablas, de tal manera que el mismo patrón inferencial es satisfecho por ambos operadores: $S_1$, $S_2$, $O_1$ ($S_1$, $S_2$) $\vdash S$, y $S_1$, $S_2$, $O_2$ ($S_1$, $S_2$) $\vdash S$, lo cual da cuenta del primer renglón de ambas tablas. Dado que no hay renglones con argumentos verdaderos (o arbitrarios) y valor verdadero, el primer método no se aplica a ninguno de los operadores. Finalmente, dado que no hay ningún renglón (o combinación de ellos) en cualquiera de las tablas con un argumento falso, el otro verdadero o arbitrario, y valor falso, el segundo método tampoco se aplica. De modo que sólo queda aplicar el principio de exhaustividad. Por maximalidad, obtenemos la primera tabla del primer operador $O_1$. Sin embargo, no hay manera de aplicar exhaustividad para obtener un patrón inferencial que capture la tabla de verdad del segundo operador $O_2$. Y no podría ser de otra manera, ya que dicho principio es incapaz de distinguir entre las tablas 10 y 11. La presunción de exhaustividad garantiza que "sea suficiente encontrar un patrón detrás de todos los renglones de una tabla con verdad en la columna del valor, o todos aquellos con falsedad en esta columna" (p. 202). Pero los métodos de Peregrin, cuando se aplican al operador $O_2$, no nos permiten obtener un patrón que capture ni todos sus renglones con valor verdadero, ni todos aquellos con valor falso.

La explicación intuitiva es sencilla. Como queda claro, hay renglones a los que no se les aplica ninguno de los tres métodos anteriores: (i) renglones con más de un valor falso (no irrelevantes) y valor falso, y (ii) renglones con uno o más argumentos falsos (no irrelevantes) y valor verdadero. De ahí que la estrategia de Peregrin no pueda distinguir entre tablas que contengan diferentes combinaciones de (i) y (ii). En el caso de los conectivos usuales, esto nunca sucede; sin embargo, en el caso de las tablas 10 y 11, la diferencia es invisible para los métodos de Peregrin.

## 4. *Una nueva propuesta*

Como vimos en la sección anterior, los métodos de Peregrin, aunque nos permiten obtener reglas de introducción y eliminación para los conectivos lógicos estándar, no producen patrones inferenciales para todas las funciones de verdad posibles. En consecuencia, si queremos un método que cubra todas las funciones de verdad posibles, es necesario enriquecer la estrategia de Peregrin para permitir nuevas formas de patrón inferencial más allá de las tres usuales.[11] Para motivar esta extensión, vale la pena notar que las reglas de introducción obtenidas por el primer método son duales de las reglas de eliminación provenientes del tercer método. Parece necesario, por lo tanto, completar el esquema encontrando un tipo de reglas de introducción dual de las reglas de eliminación obtenidas por el segundo método. Esto se nota de manera clara en la tabla 12 (p. 14), la cual nos dice qué reglas son válidas para qué operadores binarios: cada columna representa cada una de las dieciséis funciones diádicas, y cada renglón representa las doce reglas que se obtienen por los tres primeros métodos de Peregrin, siguiendo la numeración introducida en las páginas 9 y 10. He marcado con "✓" los casos en que la regla en cuestión es satisfecha por la función dada.

[11] Vale la pena recalcar que el objetivo explícito de Peregrin 2003 es precisamente capturar el significado de los conectivos lógicos habituales, no el de todos los posibles. En dicho texto, Peregrin no se plantea siquiera la posibilidad de extender su sistema de traducción a otras funciones de verdad. El interés en hacer esta extensión es mío.

| | $\top$ | $S_1 \vee S_2$ | $S_1 \leftarrow S_2$ | $S_1$ | $S_1 \rightarrow S_2$ | $S_2$ | $S_1 \leftrightarrow S_2$ | $S_1$ & $S_2$ | $(\neg S_2)$ | $\neg(S_1 \leftrightarrow S_2)$ | $\neg S_2$ | $\neg(S_1 \rightarrow S_2)$ | $\neg S_1$ | $\neg(S_1 \leftarrow S_2)$ | $(\neg S_1)$ & $(\neg S_2)$ | $\bot$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V | V | V | V | V | V | V | V | F | F | F | F | F | F | F | F |
| | V | V | V | V | F | F | F | F | V | V | V | V | F | F | F | F |
| | V | V | F | F | V | V | F | F | V | V | F | F | V | V | F | F |
| | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F |
| Método 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | |
| 2 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | |
| 3 | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | |
| 4 | ✓ | | | | | | | | | | | | | | | |
| Método 2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 6 | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| 7 | | | | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ |
| 8 | | | | | | ✓ | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ |
| Método 3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 10 | | | | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 11 | | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| 12 | | | | | | | | | | | | | | | | ✓ |

Tabla 12

| | $\top$ | $S_1 \vee S_2$ | $S_1 \leftarrow S_2$ | $S_1$ | $S_1 \rightarrow S_2$ | $S_2$ | $S_1 \leftrightarrow S_2$ | $S_1 \,\&\, S_2$ | $(\neg S_2)$ | $\neg(S_1 \leftrightarrow S_2)$ | $\neg S_2$ | $\neg(S_1 \rightarrow S_2)$ | $\neg S_1$ | $\neg(S_1 \leftarrow S_2)$ | $(\neg S_1) \,\&\, (\neg S_2)$ | $\bot$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V | V | V | V | V | V | V | V | F | F | F | F | F | F | F | F |
| | V | V | V | V | F | F | F | F | V | V | V | V | F | F | F | F |
| | V | V | F | F | V | V | F | F | V | V | F | F | V | V | F | F |
| | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F |
| | Método 2 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 6 | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| 7 | | | | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ |
| 8 | | | | | | ✓ | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ |
| | Método 4 a buscar | | | | | | | | | | | | | | | |
| | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | |
| | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | |
| | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | | | |
| | ✓ | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | | | | | |

Tabla 13

Es fácil ver una simetría entre los renglones que corresponden al primero y al tercer método. Así como la primera función satisface las cuatro reglas obtenidas por el primer método, la última función satisface las cuatro reglas obtenidas por el segundo método. Y también, así como la segunda función satisface las primeras tres reglas obtenidas por el primer método, la penúltima función satisface las primeras tres reglas obtenidas por el segundo método, etc.[12] La tabla 12 (p. 14) sugiere que el primer método de Peregrin es dual de su tercer método, y que lo que falta es un cuarto método que fuera dual del segundo, tal y como se muestra en la tabla 13 (p. 15).

Esto parece sugerir que necesitamos un método para aquellos renglones con un argumento falso (y el otro verdadero o arbitrario) y valor verdadero. La manera más directa que se sugiere automáticamente para mantener la dualidad entre este nuevo método y el segundo método original sería permitir más de un enunciado al lado derecho del signo de implicación. Como es estándar,[13] así como las fórmulas sentenciales al lado izquierdo del signo de implicación se leen de manera conjuntiva, las fórmulas sentenciales a su derecha han de leerse de manera disyuntiva.[14] De este modo, el método funcionaría de la siguiente forma.

Método 4: Un argumento falso y los otros verdaderos o arbitrarios $\rightarrow$ valor verdadero

| $S_1$ | ... | $S_j$ | ... | $S_n$ | $O(S_1,\ldots,S_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V/* | ... | F | ... | V/* | V |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

$S_{i_1},\ldots,S_{i_k} \vdash O(S_1,\ldots,S_n), S_j$, donde $S_{i_1},\ldots,S_{i_k}$ corresponden a las columnas V (en vez de *) y $S_j$ corresponde a la columna con valor falso.

Tabla 14

[12] Nótese también que la primera función da valores opuestos a la última, la segunda da valores opuestos a la penúltima, la tercera a la antepenúltima, etcétera.

[13] Por ejemplo, en la teoría de secuentes.

[14] Algunos han argumentado (como Dummett 1991, p. 187) que los patrones inferenciales con más de un consecuente son inadmisibles dentro del proyecto inferencialista, porque presuponen uno de los conectivos cuyo significado se pretende definir con ellos, a saber, la disyunción. Sin embargo, me parece difícil entender por qué no se podría argüir lo mismo con respecto a la aceptación de más de una proposición para las premisas. La posibilidad de más de una premisa presupone la conjunción, tanto como la posibilidad de más de una conclusión presupone la disyunción. La conjunción y la disyunción (al igual que la negación y la implicación material) son operaciones lógicas tan básicas precisamente porque están presupuestas en la estructura misma del patrón inferencial. Por supuesto, defender esta posición escapa a los límites de este artículo.

De esta manera obtendríamos las siguientes cuatro nuevas reglas para operadores diádicos.

Reglas tipo 4: nuevas reglas de introducción:

| | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $R_{13}$ | V | V | V | $S_1 \vdash O(S_1, S_2), S_2$ |
| $R_{14}$ | V | V | V | $S_2 \vdash O(S_1, S_2), S_1$ |
| $R_{15}$ | * | V | V | $\vdash O(S_1, S_2), S_1$ |
| $R_{16}$ | * | V | V | $\vdash O(S_1, S_2), S_2$ |

Tabla 15

Aquí, $R_{13}$y $R_{14}$ funcionarían como reglas de introducción para la implicación material (inversa y estándar, respectivamente), y $R_{15}$ y $R_{16}$ para las negaciones (de $S_1$ y $S_2$, respectivamente).

Es tentador ahora pensar que la inclusión de este cuarto método complementa de tal manera los tres métodos propuestos por Peregrin, que la estrategia queda completa sin la necesidad de una presunción de exhaustividad.[15] Sin embargo, no es así. Los patrones inferenciales detrás de la disyunción, por ejemplo, no se pueden obtener por este método. Para eliminar por completo la necesidad de un principio de exhaustividad es necesario permitir *más* valores al lado derecho del signo de implicación y extender los cuatro métodos de manera consecuente.

La nueva estrategia, así extendida, quedaría así:

Primer método extendido: Argumentos verdaderos, arbitrarios o falsos con valor verdadero

| $S_1$ | $\ldots$ | $S_f$ | $\ldots$ | $S_g$ | $O(S_1, \ldots, S_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | $\ldots$ | F | $\ldots$ | * | V |
| $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $\ldots$ |

$S_{i_1}, \ldots, S_{i_k} \vdash O(S_1, \ldots, S_n)$, $S_{j_1}, \ldots, S_{j_m}$, donde $S_{i_1}, \ldots$, $S_{i_k}$ corresponden a las columnas V, y $S_{j_1}, \ldots, S_{j_m}$ corresponden a las columnas F.

Tabla 16

[15] Después de todo, a través de este método obtenemos un patrón inferencial para el renglón <falso, verdadero> que le producía problemas a Peregrin dentro de la tabla de la negación: $\vdash \neg S$, $S$. Sin embargo, aún no resuelve el otro renglón problemático que él menciona de manera explícita en su artículo: el renglón <falso, falso, falso> en la tabla de verdad de la disyunción.

Segundo método extendido: Argumentos verdaderos, arbitrarios o falsos con valor falso

| $S_1$ | ... | $S_f$ | ... | $S_g$ | ... | $O(S_1,\ldots,S_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | ... | F | ... | * | ... | F |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

$S_{i_1},\ldots,S_{i_k},O(S_1,\ldots,S_n) \vdash S_{j_1},\ldots,S_{j_m}$, donde $S_{i_1},\ldots,S_{i_k}$ corresponden a las columnas V, y $S_{j_1},\ldots,S_{j_m}$ corresponden a las columnas F.

Tabla 17

El tercer método extendido es idéntico al segundo método extendido, y el cuarto al primero. De tal manera que nos quedan solo dos métodos generales para todos los renglones posibles dentro de una tabla de verdad (lo que efectivamente hace que el principio de exhaustividad sea superfluo): uno para los renglones cuyo valor es verdadero y otro para los de valor falso. El primer método nos da las reglas de introducción, mientras que el segundo nos da las reglas de eliminación.

Veamos ahora cómo funciona este método, tomando como ejemplo algunos casos problemáticos. Empecemos con la disyunción que tantos problemas le trajo a Peregrin.

| $S_1$ | $S_2$ | $S_1 \vee S_2$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Tabla 18

Nuestro método, aplicado a esta tabla, produce las siguientes reglas:

$S_1 \vdash S_1 \vee S_2$

$S_2 \vdash S_1 \vee S_2$

$S_1 \vee S_2 \vdash S_1, S_2$

Consideremos ahora las problemáticas tablas 10 y 11 (p. 12), antes mencionadas:

| $S_1$ | $S_2$ | $O_1(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

Tabla 10

| $S_1$ | $S_2$ | $O_2(S_1, S_2)$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Tabla 11

De la tabla 10 obtenemos:

$S_1, S_2, O_1(S_1, S_2) \vdash S$

$\vdash S_1, O_1(S_1, S_2)$

$\vdash S_2, O_1(S_1, S_2)$

mientras que de la tabla 11 obtenemos:

$S_1, S_2, O_1(S_1, S_2) \vdash S$

$S_1 \vdash O_2(S_1, S_2), S_2$

$S_2 \vdash O_2(S_1, S_2), S_1$

$O_2(S_1, S_2) \vdash S_1, S_2$

## 5. *Un nuevo problema*

Dado que este método no es más que una extensión del método de Peregrin, logra por lo menos tanto como el suyo. Sin embargo, pese a que le aventaja en poder —a diferencia del método de Peregrin, es capaz de recuperar la información de cualquier renglón de cualquier tabla en un patrón inferencial—, aún no es suficiente para lograr la traducción directa entre tablas de verdad y reglas o patrones inferenciales. Al igual que con el método original de Peregrin, este método tampoco logra recoger, en términos de reglas de introducción y eliminación, la información semántica contenida en *cualquier* tabla de verdad. Considérese la simple tabla de verdad siguiente:

| $S$ | $O(S)$ |
|---|---|
| V | V |
| F | V |

Tabla 19

Se reconocerá en ella la tabla correspondiente a la operación constante que asigna para cualquier argumento el valor verdadero. Aplicando el método anterior, obtenemos las siguientes tres reglas de inferencia, todas ellas válidas para este operador:

$S \vdash O(S)$

$\vdash S, O(S)$

$\vdash O(S)$

Dado que estas tres reglas de introducción incorporan la información contenida en todo renglón de la tabla, parecería que en conjunto han definido al operador; sin embargo, hay un problema precisamente en el hecho de que todas las reglas obtenidas son de introducción. Presumiblemente, para que cualquier operador lógico quede definido inferencialmente, es necesario contar tanto con reglas de introducción, como de eliminación para él.[16] En este caso, hace falta obtener la regla de eliminación:

ET. $S$, $O(S) \vdash S$

Sin embargo, no hay manera de obtener dicha regla de la tabla usando el método extendido.

El problema surge también con el otro operador constante. Dado que el método que aquí he propuesto genera reglas de introducción para renglones que dan verdadero, al operador constante de verdad le faltará su regla de eliminación, y dado que genera reglas de eliminación para renglones que dan falso, al operador constante de falsedad le faltará su regla de introducción:

[16] Aunque, siguiendo a Gentzen, las segundas estén determinadas por las primeras. Además, vale la pena notar que este desiderátum no se encuentra en la lista original de Peregrin 2003.

IF. $S \vdash S, O(S)$

Nótese que estas últimas dos reglas son válidas para cualquier operador, es decir, son *vacuas*. Por lo mismo, están disponibles para los operadores constantes. En otras palabras, ET es válida para cualquier operador, incluyendo el operador constante de verdad. De manera simétrica, IF es válida para cualquier operador, incluyendo el operador constante de falsedad. Así, IF y ET pueden funcionar como reglas de introducción para la función constante de falsedad y de eliminación para la función constante de verdad, respectivamente.

Pese a este problema, aún podemos concluir que si entendemos "patrón inferencial" en el sentido restringido de Peregrin (es decir, si no permitimos más que una fórmula al lado derecho del signo de implicación), será cierto que no tenemos un método simple y mecánico para traducir la información semántica contenida en cualquier tabla de verdad a patrones inferenciales. Por otro lado, si entendemos patrón inferencial en el sentido aquí propuesto, tenemos un método más poderoso y unificado para conciliar ambos tipos de teorías semánticas. Me parece que la elección es obvia.

En lo que resta del artículo primero exploraré alguna de las ventajas de extender así el sentido de patrón inferencial, explorando la posibilidad de una teoría general de patrones inferenciales.

## 6. *Dualidad*

Tal y como se empezó a vislumbrar en lo antes dicho, una de las principales ventajas de extender la noción de patrón inferencial es la obtención de una dualidad ampliamente útil.

Como se hizo obvio en las tablas 12 y 13 (pp. 14 y 15), todo patrón inferencial tiene un patrón dual. La regla 1 es dual de la regla 9, la regla 2 es dual de la regla 10, la regla 3 lo es de la 11, y así para las primeras reglas definidas por el método de Peregrin. Las reglas de introducción definidas por su primer método son duales de las reglas de eliminación obtenidas por su tercer método.

| | |
|---|---|
| $S_1, S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ | $S_1, S_2, O(S_1, S_2) \vdash$ |
| $S_1 \vdash O(S_1, S_2)$ | $S_1, O(S_1, S_2) \vdash S$ |
| $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ | $S_2, O(S_1, S_2) \vdash S$ |
| $\vdash O(S_1, S_2)$ | $O(S_1, S_2) \vdash S$ |

Tabla 20

Estas dualidades se extendieron con la introducción de reglas de introducción duales para aquellas reglas de eliminación obtenidas por el segundo métodos de Peregrin:

| | |
|---|---|
| $S_1 \vdash O(S_1, S_2), S_2$ | $S_1, O(S_1, S_2) \vdash S_2$ |
| $S_2 \vdash O(S_1, S_2), S_1$ | $S_2, O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| $\vdash O(S_1, S_2), S_1$ | $O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| $\vdash O(S_1, S_2), S_2$ | $O(S_1, S_2) \vdash S_2$ |

Tabla 21

También me parece interesante hacer notar que las dos reglas que causan problemas al método que he propuesto también son duales una de la otra:

| | |
|---|---|
| $S \vdash O(S), S$ | $S, O(S) \vdash S$ |

Tabla 22

Para todo patrón inferencial de un operador, su dual funciona como patrón inverso para la negación de dicho operador.[17] Así, por ejemplo, para todo operador $O$, para el cual cierta regla $X$ es una regla de introducción válida, su regla dual es una regla de eliminación válida, para la negación del operador $O$. Todo esto se ve fácilmente en las tablas anteriores.

Ahora bien, una vez extendida la noción de patrón inferencial, esta propiedad de dualidad se puede generalizar de la siguiente manera:

$$S_1,\ S_2, \dots,\ S_k,\ O(S_1,\ S_2, \dots,\ S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n) \vdash S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n$$

si y sólo si

$$S_1,\ S_2, \dots,\ S_k \vdash \neg O(S_1,\ S_2, \dots,\ S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n),\ S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n;$$

y viceversa:

$$S_1,\ S_2, \dots,\ S_k,\ \neg O(S_1,\ S_2, \dots,\ S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n) \vdash S_k,\ S_{k+1},\ S_{k+2}, \dots,\ S_n$$

[17] En sentido estricto, por supuesto, la negación es una operación entre enunciados, pero sobre ella podemos definir fácilmente su correspondiente operación entre operadores: para todo operador $O$, su negación $\neg O$ es el operador que da valores inversos a $O$ (falso por verdadero, verdadero por falso) para los mismos argumentos.

si y sólo si

$S_1, S_2, \ldots, S_k \vdash O(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n), S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n.$

Como corolario de lo anterior, para toda regla de introducción válida para un operador, su regla dual de eliminación no podrá ser válida para el mismo operador (y viceversa), so pena de caer en inconsistencia. Este resultado, que se puede apreciar en la tabla 23 (p. 24), es obvio si se lo concibe como la versión inferencial del principio de que toda función sólo puede tener un valor para cada argumento.

En general, podemos definir el operador de dualidad $\delta$ de la siguiente forma

$\delta\ (S_1, S_2, \ldots, S_k, O(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n) \vdash S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n) =_{def} S_1, S_2, \ldots, S_k \vdash O(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n), S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$

y viceversa:

$\delta\ (S_1, S_2, \ldots, S_k \vdash O(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n), S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n) =_{def} S_1, S_2, \ldots, S_k, O(S_1, S_2, \ldots, S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n) \vdash S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$

Gracias a este concepto de dualidad podemos resolver también el problema original de Gentzen, es decir, podemos saber exactamente qué conjunto de reglas de eliminación corresponden a un operador una vez que conocemos el conjunto de reglas de introducción que la definen (y viceversa). El método es muy sencillo si ignoramos los casos que usan *:

> *Principio de correspondencia*: Para todo conjunto de reglas de introducción $I(O)$ que definen un operador, el conjunto de reglas de eliminación que les corresponden $E(O)$ es el dual del conjunto complemento de $I(O)$ (y viceversa).[18]

[18] Para incorporar las reglas obtenidas de los renglones que usan *, basta buscar el límite mínimo de cada conjunto, como quedará más claro en la siguiente sección.

| $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1,S_2,)$ | $(RI)$ | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1,S_2,)$ | $\delta(RI)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $S_1, S_2 \vdash O(S_1,S_2)$ | $V$ | $V$ | $F$ | $S_1, S_2, O(S_1,S_2) \vdash$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $S_1 \vdash S_2, O(S_1,S_2)$ | $V$ | $F$ | $F$ | $S_1, O(S_1,S_2) \vdash S_2$ |
| $V$ | $*$ | $V$ | $S_1 \vdash O(S_1,S_2)$ | $V$ | $*$ | $F$ | $S_1, O(S_1,S_2) \vdash$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $S_2 \vdash O(S_1,S_2), S_1$ | $F$ | $V$ | $F$ | $S_2, O(S_1,S_2) \vdash S_1$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $\vdash O(S_1,S_2), S_1, S_2$ | $F$ | $F$ | $F$ | $O(S_1,S_2) \vdash S_1, S_2$ |
| $F$ | $*$ | $V$ | $\vdash O(S_1,S_2), S_1$ | $F$ | $*$ | $F$ | $O(S_1,S_2) \vdash S_1$ |
| $*$ | $V$ | $V$ | $S_2 \vdash O(S_1,S_2)$ | $*$ | $V$ | $F$ | $S_2, O(S_1,S_2)_1 \vdash$ |
| $*$ | $F$ | $V$ | $\vdash O(S_1,S_2), S_2$ | $*$ | $F$ | $F$ | $O(S_1,S_2) \vdash S_2$ |

Tabla 23

Pongamos un ejemplo. Considérese el operador cuyas reglas de introducción son:

$S_1, S_2 \vdash O(S_1, S_2)$

$S_2 \vdash O(S_1, S_2), S_1$

$\vdash O(S_1, S_2), S_1, S_2$[19]

El complemento de este conjunto sólo contiene la regla

$S_1 \vdash S_2,\ O(S_1,\ S_2),$

cuyo dual es

$\delta(S_1 \vdash S_2,\ O(S_1,\ S_2)) = S_1,\ O(S_1,\ S_2) \vdash S_2.$

Por lo tanto, ésta es la regla de eliminación que corresponde a dicho operador.

$S_1,\ O(S_1,\ S_2) \vdash S_2.$

Como se habrán dado cuenta, estamos hablando del operador de implicación material, y la regla que hemos obtenido no es otra que la del *modus ponens*.

De esta manera, se puede resolver el problema de *tonk* y *plonk* (Prior 1960, Belnap 1962), ya que el principio de correspondencia codifica lo que comúnmente se llama la "armonía lógica" entre reglas de introducción y eliminación (Dummett 1991), es decir, el requisito de que el conjunto de patrones inferenciales que define una conectiva no permita "inferir de un enunciado de una forma dada más de lo que está garantizado por la manera en que dicho enunciado fue obtenido en primera instancia" (Dummett 1995). A los conjuntos de patrones inferenciales que cumplen con esta propiedad se les llama "armónicos". Si el conjunto de reglas de introducción de un conectivo es más fuerte que el dual del conjunto de sus reglas de eliminación, el conectivo es lo que Dummett llama "inestable". Si, por el contrario, el conjunto es más débil, se obtiene un conectivo "disonante", a través del cual se pueden obtener consecuencias no justificadas. Por el método aquí definido, toda tabla de verdad posible determina un conjunto armónico de reglas. Además, dado que todo conjunto armónico de reglas determina un conectivo lógico, podemos usar este

[19] Ignorando las reglas $\vdash O(S_1, S_2), S_1$ y $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ que se obtienen de los renglones con *.

método y las relaciones de dualidad que hemos definido a partir de él para ofrecer una definición inferencialista de conectivo lógico. A ello dedico la siguiente sección.

## 7. *Hacia una definición general de conectivo lógico*

La manera más simple de ver estas ideas en juego es en su operación. Empecemos por el ejemplo más sencillo: operadores unarios. Como hemos señalado con anterioridad, existen cuatro reglas de introducción y cuatro de eliminación para operadores unarios.

| | $S$ | $O(S)$ | $\vdash$ | $S$ | $O(S)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ✓ | | $\vdash$ | ✓ | ✓ | $S \vdash S, O(S)$ |
| (2) | ✓ | | $\vdash$ | | ✓ | $S \vdash O(S)$ |
| (3) | | | $\vdash$ | ✓ | ✓ | $\vdash S, O(S)$ |
| (4) | | | $\vdash$ | | ✓ | $\vdash O(S)$ |
| (5) | ✓ | ✓ | $\vdash$ | ✓ | | $S, O(S) \vdash S$ |
| (6) | ✓ | ✓ | $\vdash$ | | | $S, O(S) \vdash$ |
| (7) | | ✓ | $\vdash$ | ✓ | | $O(S) \vdash S$ |
| (8) | | ✓ | $\vdash$ | | | $O(S) \vdash$ |

Tabla 24

Empecemos por las reglas de introducción:

(1) $S \vdash S,\ O(S)$

(2) $S \vdash O(S)$

(3) $\vdash S,\ O(S)$

(4) $\vdash O(S)$

Es sencillo observar que la regla (1) se aplica a cualquiera de los cuatro operadores unarios posibles: $I$ (identidad), $\neg$ (negación), $\top$ (tautología) y $\bot$ (contradicción). La regla (2) se aplica a $\top$ e $I$, mientras que (3) se aplica a $\top$ y $\neg$. Por último, la regla (4) se aplica solamente a $\top$. En otras palabras, las cuatro reglas son satisfechas por $\top$, y sólo (1) por $\bot$, mientras que $I$ y $\neg$ satisfacen (1) y (2), y (1) y (3), respectivamente. Como es posible ver de inmediato, las reglas pueden ordenarse en una retícula algebraica de cuatro puntos dependiendo de su *fuerza*, de tal manera que (4) sea la regla más débil y (1) la más fuerte:

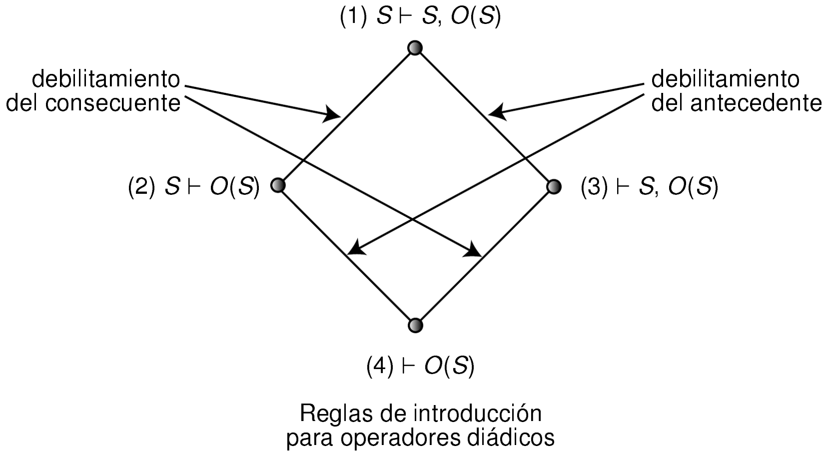



Figura 1

La relación de orden entre patrones inferenciales se define sintácticamente de la siguiente manera:

$$A \vdash B \leq \Gamma \vdash \Delta \text{ sii } A \subseteq \Gamma \text{ y } B \subseteq \Delta$$

En este orden, la relación de fuerza queda definida de tal manera que una regla $R$ es menor o igual de fuerte que otra regla $R^*$ si y sólo si todo conectivo que satisface a $R$ satisface también a $R^*$. Así, podemos asignar unívocamente a cada conectivo la regla más fuerte que satisfaga, de tal modo que los conectivos queden también ordenados de manera paralela:

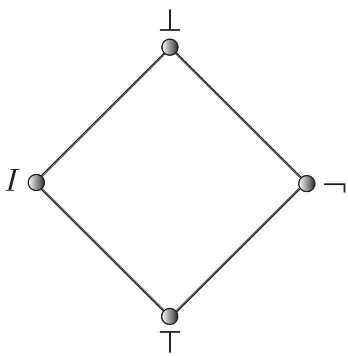



Figura 2

En este nuevo orden, un operador $O$ es menor o igual de fuerte que un segundo operador $O^*$ si y sólo si para todo $S$, $O^*(S)$ implica lógicamente a $O(S)$.

Las reglas de eliminación producen un patrón completamente análogo:

(5) $S, O(S) \vdash S$

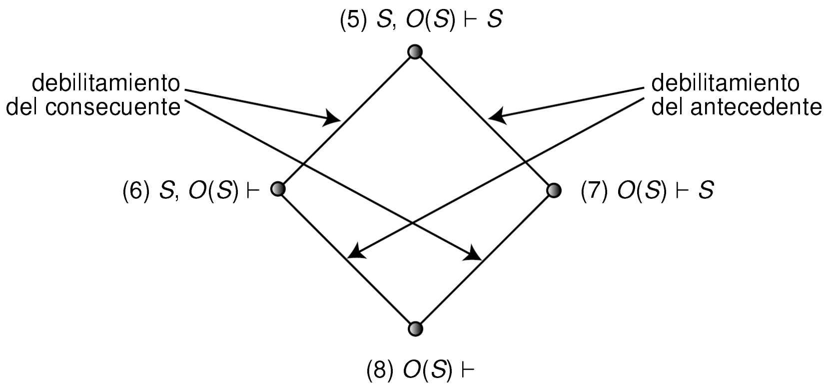
(6) $S, O(S) \vdash$

(7) $O(S) \vdash S$

(8) $O(S) \vdash$

De manera inversa a las reglas de introducción, esta vez es $\perp$ el operador que satisface las cuatro reglas, mientras que $\top$ sólo se aplica a la más fuerte (8). Para los operadores $I$ y $\neg$, una vez más se aplica la regla más débil (5) y sus respectivas reglas de eliminación: (6) para negación y (7) para identidad.

Usando la misma noción de orden que aplicamos a las reglas de introducción, podemos ordenar estas cuatro reglas de la siguiente forma:




Reglas de eliminación para operadores diádicos

Figura 3

Una vez más, podemos asignar unívocamente a cada conectiva la regla más fuerte que satisfaga, de tal modo que los conectivos queden también ordenados de la misma manera que en el caso de las reglas de introducción.

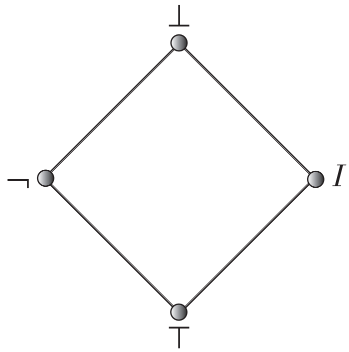



Figura 4

Por supuesto, el caso unario es muy sencillo, pero es interesante ver cómo se extiende al caso un poco más complejo de los conectivos diádicos:

| | $S_1$ | $S_2$ | $O(S_1, S_2, )$ | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | V | V | V | $S_1, S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| (2) | V | V | F | $S_1, S_2, O(S_1, S_2) \vdash$ |
| (3) | V | F | V | $S_1 \vdash S_2, O(S_1, S_2)$ |
| (4) | V | F | F | $S_1 \vdash O(S_1, S_2), S_2$ |
| (5) | V | $*$ | V | $S_1 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| (6) | V | $*$ | F | $S_1, O(S_1, S_2) \vdash$ |
| (7) | F | V | V | $S_2 \vdash O(S_1, S_2), S_1$ |
| (8) | F | V | F | $S_2, O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| (9) | F | F | V | $\vdash O(S_1, S_2), S_1, S_2$ |
| (10) | F | F | F | $O(S_1, S_2) \vdash S_1, S_2$ |
| (11) | F | $*$ | V | $\vdash O(S_1, S_2), S_1$ |
| (12) | F | $*$ | F | $O(S_1, S_2) \vdash S_1$ |
| (13) | $*$ | V | V | $S_2 \vdash O(S_1, S_2)$ |
| (14) | $*$ | V | F | $S_2, O(S_1, S_2)_1 \vdash$ |
| (15) | $*$ | F | V | $\vdash O(S_1, S_2), S_2$ |
| (16) | $*$ | F | F | $O(S_1, S_2) \vdash S_2$ |
| (17) | $*$ | $*$ | V | $\vdash O(S_1, S_2)$ |
| (18) | $*$ | $*$ | F | $O(S_1, S_2) \vdash$ |

Tabla 25

Esta vez, los patrones inferenciales se ordenan en un reticulado más complicado, como se ve en las figuras 5 y 6 (completando la retícula con los topes correspondientes a la regla de introducción de la constante falsa y la de eliminación para la constante verdadera).

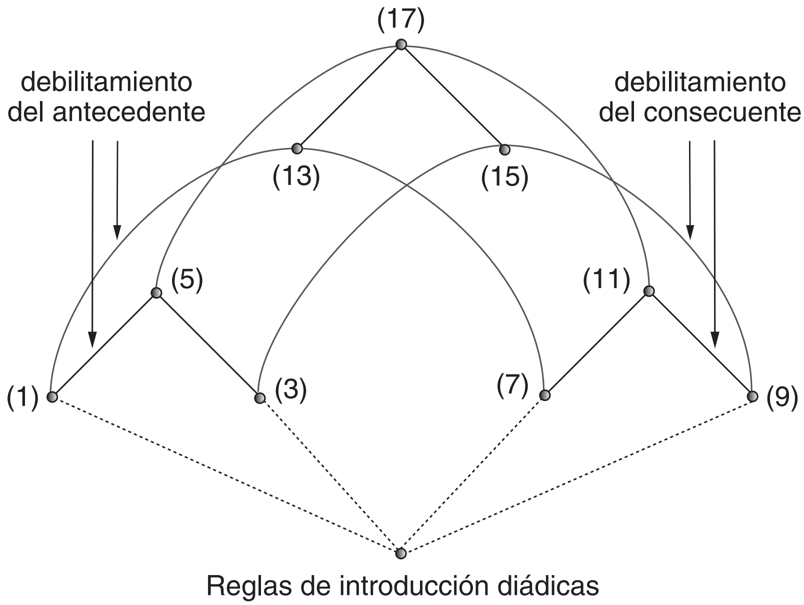



Figura 5

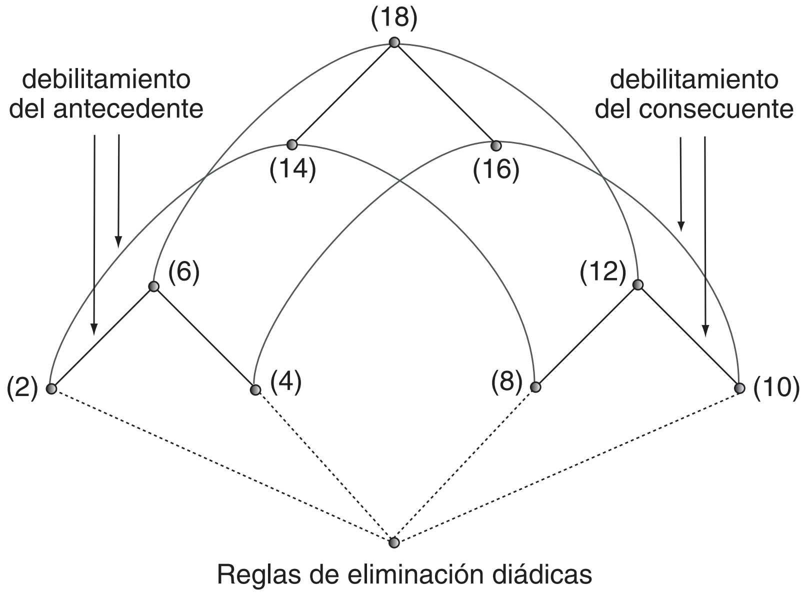
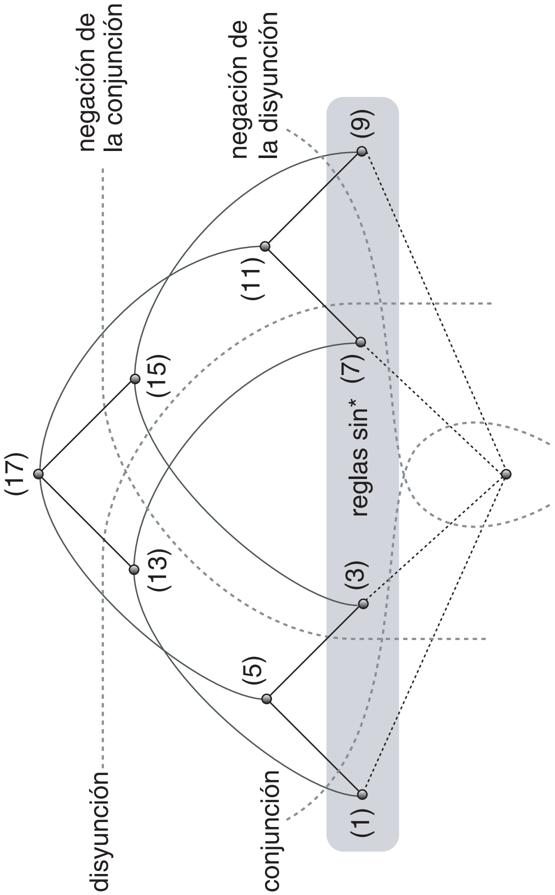


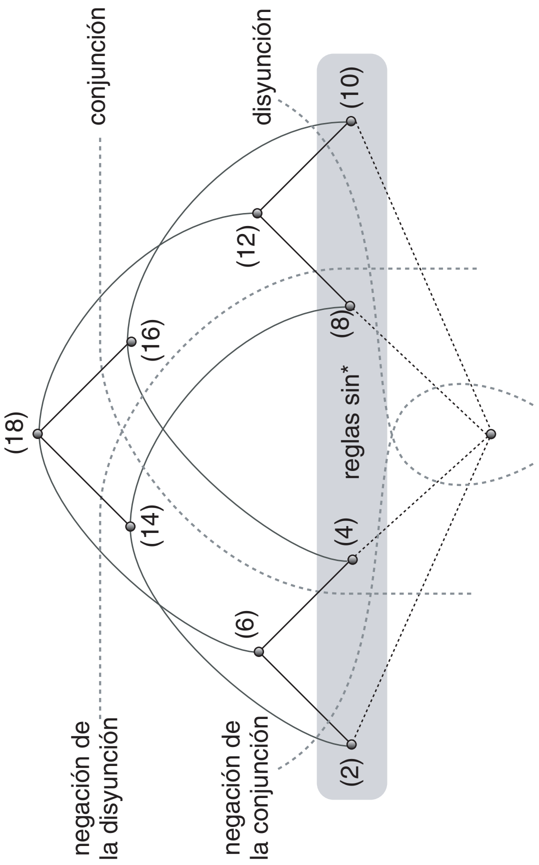

Figura 6

Una vez más, todo conectivo binario determina un conjunto de patrones de inferencia cerrado bajo el orden de fuerza, y viceversa, todo conjunto cerrado hacia abajo en el álgebra define un conectivo. Para ilustrar esto, en las figuras 7 y 8 aparecen los conjuntos de reglas correspondientes a la conjunción y la disyunción, junto con sus negaciones.




Reglas de introducción de la conjunción,
la disyunción y sus negaciones

Figura 7




Reglas de eliminación de la conjunción la disyunción y sus negaciones

Figura 8

Dado que la retícula está ordenada por orden de fuerza, cada operador lógico se puede definir por los límites inferiores de sus conjuntos de reglas. Además, los límites inferiores de todo conjunto de reglas de inferencia definen un operador lógico. De esta forma, podemos definir de manera sistemática y completamente inferencial todo operador lógico armónico (y solamente ellos) y lograr así la equivalencia total entre los métodos sintáctico y semántico de la lógica clásica proposicional.

Por supuesto, sería interesante explorar un mecanismo de equivalencia similar para otro tipo de lógicas. Tengo la intuición de que la idea es fácil de extender, especialmente para el caso de lógicas subestructurales y polivalentes, las cuales tienen una formulación inferencial bien desarrollada (es decir, una sintaxis elegante). No puedo decir lo mismo de la lógica de primer orden, ni mucho menos de la de órdenes superiores. Es muy probable que en estas lógicas, se generen un conjunto infinito de patrones inferenciales para algunas constantes lógicas.[20] Sin embargo, debo dejar cualquiera de estas tareas para un trabajo próximo.[21]

## BIBLIOGRAFÍA

Belnap, Nuel D., 1962, "Tonk, Plonk and Plink", *Analysis*, vol. 22, no. 6, pp. 130–134.

Block, Ned, 2000, "Conceptual Role Semantics", en Craig 2000, pp. 653–655.

———, 1993, "Holism, Hyper-Analyticity and Hyper-Compositionality", *Mind and Language*, vol. 8, no. 1, pp. 1–26.

Boghossian, Paul A., 1993, "Does an Inferential Role Semantics Rest Upon a Mistake?", *Mind and Language*, vol. 8, no. 1, pp. 27–40.

Brandom, Robert B., 2000, *Articulating Reasons: An Introduction to Inferentialism*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Craig, Edward (comp.), 2000, *The Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, Londres.

Crimmins, Mark, 2000, "Semantics", en Craig 2000, pp. 649–653.

Dummett, Michael, 1995, "Logical Harmony", en Ted Honderich (comp.), *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, p. 360.

[20] Agradezco a Max Freund el haberme insistido en este punto.

[21] Quiero agradecer a Federico Marulanda, Raymundo Morado, Max Freund y los árbitros anónimos de *Crítica* por sus comentarios a versiones previas de este trabajo y sus sugerencias para mejorarlo. Mención especial merece Michael Dunn, cuya inspiración es evidente en estas páginas.

Dummett, Michael, 1991, *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Field, Hartry, 1972, "Tarski's Theory of Truth", *The Journal of Philosophy*, vol. 69, no. 13, pp. 347–375.

Frege, Gottlob, 1879, *Begriffsschrift*, en Georg Olms (comp.), 1964, *Gottlob Frege's Begriffsschrift un andere Aufsatze*, Wissemschaftliche Buchgesselschaft, Darmstadt.

Gentzen, Gerhardt, 1964–1965, "Investigations into Logical Deduction", *American Philosophical Quarterly*, vol. 1, no. 4, pp. 288–306, y vol. 2, no. 1, pp. 204–218, reimpreso en M.E. Szabo (comp.), 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North Holland, Amsterdam, pp. 68–131.

Harman, Gilbert, 1987, "(Non Solipsistic) Conceptual Role Semantics", en E. Lepore (comp.), *New Directions in Semantics*, Academic Press, Londres, pp. 55–81.

———, 1986, "The Meaning of Logical Constants", en Ernest Lepore (comp.), *Truth and Interpretation: Perspectives on the Philosophy of Donald Davidson*, Blackwell, Oxford, pp. 125–134.

Kalderon, Mark Eli, 2001, "Reasoning and Representing", *Philosophical Studies*, vol. 105, no. 2, pp. 129–160.

Pelletier, Francis J., 1999, "A Brief History of Natural Deduction", *History and Philosophy of Logic*, vol. 20, no. 1, pp. 1–31.

Peregrin, Jaroslav, 2003, "Meaning and Inference", en Timothy Childers y Ondrej Majer (comps.), *Logica Yearbook 2002*, Filosofia, Praga, pp. 193–205.

———, 1994, "Interpreting Formal Logic", *Erkenntnis*, vol. 40, no. 1, pp. 5–20.

Prior, A.N., 1960, "The Runabout Inference-Ticket", *Analysis*, vol. 21, no. 2, pp. 38–39.

Wittgenstein, Ludwig, 1956, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, MIT Press, Cambridge, Mass. [Versión en castellano: *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*, trad. Isidoro Reguera, Alianza, Madrid, 1987.]

*Recibido el 31 de marzo de 2008; revisado el 4 de septiembre de 2008; aceptado el 10 de octubre de 2008.*